УДК 539.3

[1]С.Ю. Бабич, [2]Н.О. Ярецька

КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПРУЖНОГО КІЛЬЦЕВОГО ШТАМПА ТА ПІВПРОСТОРУ З ПОЧАТКОВИМИ (ЗАЛИШКОВИМИ) НАПРУЖЕННЯМИ.

[1] Інститут механіки ім. С.П. Тимошенко

национальної академії наук України,

вул. П. Нестерова, 3, 03057, Київ-57, Україна;

[2]Хмельницький національний університет,

вул. Інститутська, 11, 29016, Хмельницький, Україна;

e-mail: massacran2@ukr.net

Abstract. The article is devoted to the research of task of contact interaction of the pressure of the pre-stressed cylindrical annular punch on semispace with initial (residual) stresses without friction. It is solved for the case of unequal roots of the characteristic equation. In general, the research was carried out for the theory of great initial (ultimate) and two variants of the theory of small initial deformations within the framework of linearized theory of elasticity with the elastic potential having arbitrary structure. Numerical analysis is presented in the form of graphs for the case of Treloar's potential.

Key words: the linearized elasticity theory, initial (residual) stresses, contact problem, annular punch, semispace.

Вступ.

Підвищення надійності та довговічності інженерних споруд і машин є однією із найбільш актуальних задач сучасного будівництва і машинобудування. Успішному її розв'язку, у значній мірі, сприяє широке коло наукових досліджень у межах механіки твердого деформованого тіла, особливо, при вивченні проблеми передачі навантаження у конструкціях та деталей машин. Поява нових матеріалів, необхідність підвищення характеристик з експлуатації споруд та машин, зменшення їх ваги, збільшення термінів експлуатації, зниження вартості та досягнення економічної сумісності – все це залежить від методів розрахунку.

Проблематика задач, що стосується контакту пружних, в'язко пружних і пластичних тіл без початкових напружень, у даний час, висвітлена з широкого кола питань. Усі вони детально вивчені та висвітлені у багатьох працях монографічного та навчального характеру [5], а також відображені у багатьох публікаціях періодичних наукових видань.

Кількість публікацій з механіки контактної взаємодії безперервно збільшується, що пояснюється актуальністю проблем, які розглядаються в інженерній практиці. Але сучасні запити інженерної практики висунули серед дослідників ряд задач, що потребують використання більш ускладнених моделей суцільних середовищ (відмінних від класичних) зі складними фізичними та механічними властивостями. Ці моделі повинні враховувати при контактній взаємодії, наприклад, такі фактори як: вплив тертя, тепловиділення, поверхневі властивості матеріалу, жорсткість та зносостійкість поверхні, що у свою чергу, пов'язано з мікромеханікою фрикційної взаємодії.

Одним із важливих факторів контактної взаємодії (нарівні з іншими) є врахування початкових (залишкових) напружень. Не зважаючи на суттєве досягнення у розвитку контактних задач, все ще питання врахування початкових напружень при контактній взаємодії залишається майже повністю недослідженим до останнього часу. Як відомо, практично в усіх елементах конструкцій присутні початкові напруження. Останні можуть бути викликані різного роду причинами, наприклад: технологічними операціями, виробничими процесами (при виготовленні цілого ряду матеріалів) або складанням конструкцій. У земній корі початкові напруження виникають внаслідок дії геостатичних та геодинамічних сил, у композитних матеріалах – в результаті технологічних процесів при їх створенні, а також початкові напруження присутні й у кровоносних судинах живих організмів. Початкові напруження необхідно враховувати при розв'язуванні задач про деформацію ґрунтів (особливо мерзлих). Крім того, у пружно-пластичних тілах також можуть існувати внутрішні залишкові напруження після зняття навантаження. Іноді доречно навмисно створювати початкові напруження (залишкові та технологічні) для компенсації тих напружень, які виникають у елементах конструкцій у процесі роботи, та підвищують їх характеристики міцності.

Особливе зацікавлення у зв'язку із впровадженням у виробництво нових штучних матеріалів, що можуть витримувати великі початкові деформації, викликає дослідження контактних задач для попередньо напружених тіл.

Таким чином, механіка матеріалів та елементів конструкцій, геофізика, сейсмологія, механіка гірських порід, механіка композитів, біомеханіка, неруйнівні методи визначення напружень та ряд інших – далеко неповний перелік наукових напрямків фундаментального та прикладного характеру, в яких виникли проблеми пов'язані з необхідністю дослідження впливу початкових (залишкових) напружень або деформацій. На основі цього, слід зазначити важливість необхідності дослідження впливу початкових напружень на напружено-деформований стан на межі контакту.

Врахування початкових напружень при розрахунку відповідальних елементів конструкції, машин та споруджень дозволить при їх створенні більш ефективно враховувати міцнісні ресурси матеріалів шляхом правильної оцінки запасів міцності та суттєво знижати їх матеріаломісткість, зберігаючи необхідні фундаментальні характеристики в цілому. Досить часто з метою збільшення міцності конструкції виникає необхідність підсилення її деяких несних елементів пружними кріпленнями (стрингерами). Результати досліджень у цьому напрямі при наявності в конструкції початкових напружень виконані у [12]. Для даної статті характерним та загальним є те, що по перше, всі розглянуті тіла – пружні, по друге, ці основи (тіла) попередньо напружені.

Необхідно відзначити, що до теперішнього часу для дослідження вищевказаних задач склалися два підходи. Перший підхід пов'язаний із дослідженням тіл з конкретною формою пружного потенціалу. Мабуть, першою працею у цьому напрямку стала стаття [20], у якій розглядається задача для колової тріщини у випадку пружного нестисливого тіла з початковими напруженнями для потенціалу Трелоара (тіло неогуківського типу). Дослідження, пов’язані з вказаним підходом вітчизняних і зарубіжних вчених (ближнього і далекого зарубіжжя) розглянуті у працях Александрова В. М., Арутюняна Н. Х. [1] та їх учнів: Брудного С. Р., Порошина В. С., Соболя В. Б., Філіпової Л. М. [11], Калинчука В. В., Полякової І. В., Ананьевої І. В., Воротинцевої І. В., Сметанина Б. І., Чебакова М. І. та інших, а також у працях Dhaliwal R. S., Rokne J. G., Singh B. M. [14], Rajit S.

Другий підхід, який розвивався паралельно із першим, й належить академіку Гузю О.М. [6–10], пов’язаний з дослідженням задач для пружних тіл з початковими напруженнями при довільній структурі пружного потенціалу. Задачі розв’язані у загальному вигляді для стисливих та нестисливих матеріалів для теорії великих (кінцевих) початкових деформацій та різних варіантів теорії малих початкових деформацій окремо для рівних та нерівних коренів характеристичного (визначального) рівняння [8]. Усі наведені у цій статті результати отримані в межах другого підходу, який на погляд авторів має низку переваг у порівнянні з першим.

Так до недавнього часу одна і та ж задача (контактна або задача для тріщини) для попередньо напружених тіл розглядалась одними авторами, наприклад, для потенціалу Трелоара, а іншими авторами для потенціалу

Муні і т.д., тобто для конкретної форми пружного потенціалу. У даній статті (як і в низці інших) дослідження проведені в єдиній загальній формі для стисливих та нестисливих попередньо напружених тіл при довільній структурі пружного потенціалу. І лише на завершальному етапі досліджень при отриманні чисельних результатів були використані конкретні пружні потенціали.

До теперішнього часу всі дослідження контактних задач для жорстких та пружних штампів у межах другого підходу отримані у працях академіка НАН України Гузя О.М. та його учнів: Рудницького В.Б., Григоренко П. П., Рамського А. О., Глухова Ю. П., Діхтярука М. М., Примаченко О. В., Матняка С. В., зокрема і авторів даної статті. Дослідження з контактних задач перерахованих вище авторів (українських вчених) відображені у багатьох працях монографічного та навчального характеру, а також увійшли у численні публікації, зокрема і в оглядові статті періодичних вітчизняних та закордонних видань. Серед них слід відзначити роботи [6–10, 12–13, 15–19, 22–24].

У даній роботі з використанням співвідношень лінеаризованої теорії пружності досліджена вісесиметрична контактна задача про тиск попередньо напруженого пружного кільцевого штампа з плоскою основою на півпростір з початковими напруженнями без врахування сил тертя для нерівних коренів характеристичного (визначального) рівняння [8]. Дослідження виконано у загальному вигляді для стисливих та нестисливих тіл для теорії великих (кінцевих) початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу, тобто у межах другого підходу. Вважаємо, що початкові напружено-деформовані стани у штампі та півпросторі є однорідними та рівними. Величини, що відповідають пружному штампу, будемо записувати з верхнім індексом (1), а величини, які відносяться до попередньо напруженого півпростору – з верхнім індексом (2). Подібна контактна задача у класичному випадку, тобто без початкових напружень розглянута у [5].

1. Постановка задачі та основні співвідношення.

Нехай скінченний пружний кільцевий штамп висотою H з початковими напруженнями, геометрична вісь симетрії якого співпадає з віссю y_3 циліндричної системи координат (r, θ, y_3) і направлена всередину півпростору (рис.1), тисне на півпростір з силою P, після виникнення там початкового деформованого стану. Величини R_1, R_2 – відповідно внутрішній та зовнішній радіуси штампа. Будемо вважати, що зовнішнє навантаження прикладене лише до вільного торця пружного штампа, під дією якого усі точки торця штампа переміщаються вздовж осі симетрії y_3 на одну й ту ж величину ε. Будемо також вважати, що поверхні поза межею контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил, а на межі контакту переміщення та напруження – неперервні. На рис. 1. величини λ_i (i=1,2,3) – коефіцієнти видовження, що визначають переміщення початкового стану, а S_0^{11}, S_0^{22} – компоненти симетричного тензора початкових напружень.

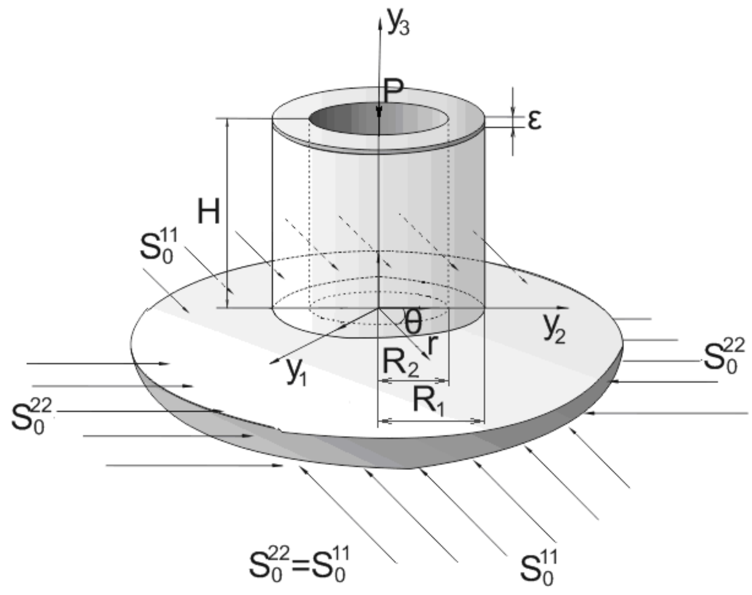

Рис. 1. Тиск пружного кільцевого штампа на півпростір з початковими напруженнями.

Скажімо, що початкові стани півпростору та штампа – однорідні, й для них виконуються співвідношення [10, 16]:

$$y_m = x_m + U_m^0, \quad U_m^0 = \delta_{mi}(\lambda_m - 1)\lambda_i^{-1} y_i \quad (i, m = \overline{1,3}).$$

Тоді основне рівняння у переміщеннях [10, 16] для стисливих тіл має вигляд

$$L'_{m\alpha} U_\alpha = 0,\ L'_{m\alpha} = \omega'_{ij\alpha\beta}\, \partial^2 / \partial y_i \partial y_\beta,\ (i, m, \alpha, \beta = \overline{1,3}), \tag{1.1}$$

а для нестисливих тіл виконується умова нестисливості:

$$L'_{m\alpha} U_\alpha + q'_{\alpha m}\, \partial p' / \partial y_\alpha = 0, \quad L'_{m\alpha} = \kappa'_{im\alpha\beta}\, \partial^2 / \partial y_i \partial y_\beta, \tag{1.2}$$

$$q'_{ij}\, \partial U_j / \partial y_i = 0,\ q'_{ij} = \lambda_i q_{ij}, \quad (i, j, m, \alpha, \beta = \overline{1,3}).$$

Вирази для визначення складових тензора напружень для стисливих та нестисливих тіл запишемо у вигляді:

$$Q'_{ij} = \omega'_{ij\alpha\beta} \frac{\partial U_\alpha}{\partial y_\beta},\; Q'_{ij} = \kappa_{ij\alpha\beta} \frac{\partial U_\alpha}{\partial y_\beta} + q'_{ij}\, p,\; \omega'_{ij\alpha\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_\beta}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\omega_{ij\alpha\beta},\; \kappa'_{ij\alpha\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_\beta}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\kappa_{ij\alpha\beta}.$$

При однорідних початкових напруженнях вважаємо, що має місце $S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0;\; S_0^{33} = 0;\; \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$. Враховуючи ці умови, розв'язок рівнянь (1.1), (1.2) представимо через функцію χ, яка задовольняє рівняння

$$(\Delta_1 + \xi_2'^2\, \partial^2/\partial y_3^2)(\Delta_1 + \xi_3'^2\, \partial^2/\partial y_3^2)\chi = 0\,, \tag{1.3}$$

де $\Delta_1 = \partial^2/\partial r^2 + r^{-1}\,\partial/\partial r$.

Як зазначалося вище, у даній статті обмежимося випадком нерівних коренів $(\xi_2'^2 \neq \xi_3'^2)$ характеристичного рівняння, яке відповідає рівнянню (1.3).

У системі колових циліндричних координат $(r,\, \theta,\, z_i)$, де $z_i = v_i^{-1} y_3$, $v_i = \sqrt{n_i}$, $(i = 1,2)$, $n_1 = \xi_2'^2$, $n_2 = \xi_3'^2$ такій постановці відповідають граничні умови:

$$U_3^{(1)} = -\varepsilon,\quad Q_{3r}^{(1)} = 0 \quad (R_1 < r < R_2),\; z_i = H v_i^{-1} \quad (i = 1,2), \tag{1.4}$$

$$U_3^{(1)} = U_3^{(2)};\quad \tilde{Q}_{33}^{(1)} = \tilde{Q}_{33}^{(2)};\quad \tilde{Q}_{3r}^{(1)} = \tilde{Q}_{3r}^{(2)} = 0 \quad (R_1 < r < R_2),\; z_i = 0\; (i = 1,2), \tag{1.5}$$

$$\tilde{Q}_{33}^{(2)} = 0,\quad \tilde{Q}_{3r}^{(2)} = 0 \quad (0 < r < R_1 \quad R_2 < r < \infty),\; z_i = 0,\; (i = 1,2) \tag{1.6}$$

$$\tilde{Q}_{rr}^{(1)} = 0,\quad \tilde{Q}_{3r}^{(1)} = 0 \quad (0 \le z_i \le H v_i^{-1}),\; r = R_1,\; r = R_2. \tag{1.7}$$

Умова рівноваги, яка встановлює зв'язок між осіданням торця та рівнодійною навантаження P має вигляд:

$$P = -2\pi \int_{R_1}^{R_2} r Q_{33}^{(2)}(0, r)\, dr\,. \tag{1.8}$$

2. Метод розв'язку.

Для визначення напружено-деформованого стану у пружному кільцевому штампі з початковими напруженнями використовуємо лінеаризовані рівняння [10, с. 78]. Із цих рівнянь випливають вирази для компонентів вектора переміщення та тензора напружень для стисливих та нестисливих тіл. Тоді загальний розв'язок $\chi = \chi_1 + \chi_2$ для випадку нерівних коренів визначального рівняння [10, формули (2.19)] приймемо у вигляді

$$\chi_1 = A_0(r^2 - 2z_1^2) + C_0 z_1 (3r^2 - 2z_1^2) +$$

$$+[A_k^{(1)} I_0(\gamma_k v_1 r) + A_k^{(2)} K_0(\gamma_k v_1 r)] C_k \sin(\gamma_k v_1 z_1) + [T_k^{(1)} J_0(\alpha_k r) + T_k^{(2)} Y_0(\alpha_k r)] \tilde{S}_2(\alpha_k z_1) \Big\} M_k \,,$$

$$\chi_2 = A_0(r^2 - 2z_2^2) + C_0 z_2 (3r^2 - 2z_2^2) +$$

$$+[B_k^{(1)} I_0(\gamma_k v_2 r) + B_k^{(2)} K_0(\gamma_k v_2 r)] C_k \sin(\gamma_k v_2 z_2) + [T_k^{(1)} J_0(\alpha_k r) + T_k^{(2)} Y_0(\alpha_k r)] \tilde{S}_3(\alpha_k z_2) \Big\} M_k \,,$$

$$\Big(\tilde{S}_2(x) = \tilde{E}_k sh(x) + \tilde{F}_k ch(x), \; \tilde{S}_3(x) = \tilde{N}_k sh(x) + ch(x) \,, \; T_k^{(1)} = -Y_1(\alpha_k R_1 R_2^{-1})(J_1(\alpha_k R_1 R_2^{-1}))^{-1} T_k^{(2)}$$

$$A_k^{(1)} = K_1(\gamma_k v_1 R_1)(I_1(\gamma_k v_1 R_1))^{-1} A_k^{(2)}, \; B_k^{(1)} = K_1(\gamma_k v_2 R_1)(I_1(\gamma_k v_2 R_1))^{-1} B_k^{(2)} \,,$$

$$A_0 = (3C_0 H(v_1)^{-1} - \varepsilon n_1 n_2 (4(m_1 n_2 + m_2 n_1))^{-1}) \,, \tilde{E}_k = (1+m_2) n_1 ((1+m_1) n_2)^{-1} cth(\alpha_k H v_1^{-1}) \,,$$

$$\tilde{N}_k = -cth(\alpha_k H v_2^{-1}) \,, \; \tilde{F}_k = -(1+m_2) n_1 ((1+m_1) n_2)^{-1} \,, \tilde{S}_4(x) = \tilde{E}_k ch(x) + \tilde{F}_k sh(x) \Big)$$

де $\alpha_k, \gamma_k -$ власні значення задачі (1.4) – (1.7), $M_k = \tilde{M}_k T_k^{(2)}$, $A_k^{(2)}, B_k^{(2)}, T_k^{(2)}, C_0, C_k, \tilde{M}_k = const \;\; M_k -$ невідомі величини.

Тоді напружено-деформований стан у попередньо напруженому кільцевому штампі для стисливих (нестисливих) тіл та нерівних коренів, із врахуванням (1.4) – (1.7), представимо у вигляді

$$U_r^{(1)} = -6C_0 r \theta_+ - \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{ \gamma_k^2 \Big[v_1 (K_1(v_1\gamma_k R_1)(I_1(v_1\gamma_k R_1))^{-1} I_1(v_1\gamma_k r) - K_1(v_1\gamma_k r)) \tilde{A}_k \cos(\gamma_k v_1 z_1) +$$

$$+ v_2 (K_1(v_2\gamma_k R_1)(I_1(v_2\gamma_k R_1))^{-1} I_1(v_2\gamma_k r) - K_1(v_2\gamma_k r)) \tilde{B}_k \cos(\gamma_k v_2 z_2) \Big] -$$

$$-\alpha_k^2 R_2^{-1} (Y_1(\alpha_k r R_2^{-1}) - Y_1(\alpha_k R_1 R_2^{-1}) J_1(\alpha_k r R_2^{-1})(J_1(\alpha_k R_1 R_2^{-1}))^{-1}) \Big(v_1^{-1} \tilde{S}_4(\alpha_k z_1) + v_2^{-1} \tilde{S}_5(\alpha_k z_2) \Big) \Big\} M_k \,,$$

$$U_3^{(1)} = 12C_0(m_1z_1n_1^{-1} + m_2z_2n_2^{-1}) - 4A_0\theta_8 + \sum_{k=1}^{\infty}\Big\{m_1\gamma_k^2(K_1(v_1\gamma_kR_1)(I_1(v_1\gamma_kR_1))^{-1}I_1(v_1\gamma_kr) -$$

$$-K_1(v_1\gamma_kr))\tilde{A}_k\cos(\gamma_kv_1z_1) - \alpha_k^2R_2^{-1}(Y_1(\alpha_krR_2^{-1}) - Y_1(\alpha_kR_1R_2^{-1})J_0(\alpha_krR_2^{-1})(J_0(\alpha_kR_1R_2^{-1}))^{-1})\times$$

$$\times\Big[m_1n_1^{-1}\tilde{S}_2(\alpha_kz_1) + m_2n_2^{-1}\tilde{S}_3(\alpha_kz_2)\Big]\Big\}M_k, \qquad (2.1)$$

$$Q_{33}^{(1)} = C_{44}\Big\langle 12(1+m_1)l_1\Big[v_1^{-1} + sv_2^{-1}\Big]C_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\gamma_k^3\Big((1+m_1)l_1v_1^2\tilde{A}_k\sin(\gamma_kv_1z_1)\Big[K_0(\gamma_kv_1r) + K_1(\gamma_kv_1R_1)\times$$

$$\times(I_1(\gamma_kv_1R_1))^{-1}I_0(\gamma_kv_1r)\Big] + (1+m_2)l_2v_2^2\tilde{B}_k\cos(\gamma_kv_1z_1)\Big[K_0(\gamma_kv_2r) + K_1(\gamma_kv_2R_1)(I_1(\gamma_kv_2R_1))^{-1}I_0(\gamma_kv_2r)\Big]\Big) -$$

$$-\alpha_k^3R_2^{-1}(Y_1(\alpha_krR_2^{-1}) - Y_1(\alpha_kR_1R_2^{-1})J_0(\alpha_krR_2^{-1})(J_0(\alpha_kR_1R_2^{-1}))^{-1})((1+m_1)l_1v_1^{-1}\tilde{S}_4(\alpha_kz_1) +$$

$$+(1+m_2)l_2v_2^{-1}\tilde{S}_5(\alpha_kz_1))\Big\}M_k\Big\rangle,$$

$$Q_{3r}^{(1)} = C_{44}\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\gamma_k^3\Big[(1+m_1)\tilde{A}_kv_1\sin(\gamma_kv_1z_1)\Big(K_1(\gamma_kv_1R_1)(I_1(\gamma_kv_1R_1))^{-1}I_1(\gamma_kv_1r) - K_1(\gamma_kv_1r)\Big) +$$

$$+(1+m_2)v_2\tilde{B}_k\sin(\gamma_kv_2z_2)\Big(K_1(\gamma_kv_2R_1)(I_1(\gamma_kv_2R_1))^{-1}I_1(\gamma_kv_2r) - K_1(\gamma_kv_2r)\Big)\Big] +$$

$$+\alpha_k^3R_2^{-1}(Y_1(\alpha_krR_2^{-1}) - Y_1(\alpha_kR_1R_2^{-1})J_1(\alpha_krR_2^{-1})(J_1(\alpha_kR_1R_2^{-1}))^{-1})\times$$

$$\times\Big[(1+m_1)n_1^{-1}\tilde{S}_2(\alpha_kz_1) + (1+m_2)n_2^{-1}\tilde{S}_3(\alpha_kz_2)\Big]\Big\}M_k,$$

$$\Big(\tilde{S}_5(x) = \tilde{N}_kch(\alpha_kz_2) + sh(\alpha_kz_2), \ \tilde{A}_k = A_k^{(2)}C_k, \ \tilde{B}_k = B_k^{(2)}C_k, \ \theta_8 = m_1n_1^{-1} + m_2n_2^{-1}, \ \theta_+ = v_2^{-1} + 2v_1^{-1}\Big),$$

де $J_v(x)$, $I_v(x)$ – функції Бесселя дійсного та уявного аргументу, $K_v(x)$ – функція Макдональда, $Y_v(x)$ – функція Неймана, відповідно, значення $D_{44}, C_{44}, l_1, l_2, m_1, m_2, s_0$ визначаються з [8].

Напружено-деформований стан у попередньо напруженому півпросторі для нерівних коренів, з врахуванням (1.4) – (1.7) та $z_1 = 0$, представимо у вигляді [10, 23, 24]

$$Q_{33}^{(2)} = \frac{\omega_3}{R_2 - R_1}\int_0^\infty F(\eta)J_0(\eta r)d\eta, \quad U_3^{(2)} = -\frac{1}{\omega_2}\int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta}J_0(\eta r)d\eta, \tag{2.2}$$

$$U_r^{(2)} = \omega_1\int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta}J_1(\eta r)d\eta,$$

де, $\omega_3 = c_{44}l_1(1+m_1)(s-s_0)$, $\omega_2 = v_1(m_1(s_3-s_2))^{-1}$, $\omega_1 = s_0 - 1$, $s = s_0 l_2 l_1^{-1}$, $s_2 = m_2 v_1 (m_1 v_2)^{-1}$, $s_3 = (1+m_2)v_1((1+m_1)v_2)^{-1}$, $F(\eta)$ – невідома функція.

Використовуючи розв’язок для штампа (2.1) та задовольняючи другій умові (1.4), другій умові (1.7), знаходимо власні значення задачі (1.4) – (1.7) для $n_1 \neq n_2$:

$$\gamma_k = \frac{\pi k}{H}, \quad \alpha_k = \frac{\mu_k R_2}{R_1} \; \left(J_1(\mu_k)Y_1(\mu_k R_2 R_1^{-1}) - Y_1(\mu_k)J_1(\mu_k R_2 R_1^{-1}) = 0 \right).$$

Із граничних умов (1.7) маємо $C_0 = C_k = 0$. Також, задовольнивши першу умову (1.5), визначимо невідому функцію $F(\eta)$ для (2.2) з потрійних інтегральних рівнянь:

$$\int_0^\infty F(\eta)J_0(\eta r)d\eta = 0 \quad (R_2 < r < \infty)$$

$$\int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta}J_0(\eta r)d\eta = f(r) \quad (R_1 < r < R_2), \tag{2.3}$$

$$\int_0^\infty F(\eta)J_0(\eta r)d\eta = 0 \quad (0 < r < R_1)$$

де $f(r) = \frac{\omega_2}{R_2}\left(\varepsilon + t_1\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2\left(\frac{Y_1(\alpha_k R_1 R_2^{-1})}{J_1(\alpha_k R_1 R_2^{-1})}J_0(\alpha_k R_2^{-1} r) - Y_0(\alpha_k R_2^{-1} r)\right)M_k\right)$, $t_1 = \frac{m_1 - m_2}{n_2(1+m_1)}$.

Інтегральні рівняння (2.3) зведемо до одного, як у [3] використовуючи розривний інтеграл [21]:

$$\int_0^\infty \eta J_n(0.5\eta(R_2 - R_1))J_n(0.5\eta(R_2 + R_1))J_0(\eta r)d\eta = \begin{cases} 0, \quad r^2 < R_1^2, r^2 > R_2^2, \\ 4P_{n-0.5}^{0.5}(\alpha)(\sqrt{2\pi}(R_1^2 - R_2^2)\sqrt[4]{1-\alpha^2})^{-1}, R_1^2 < r^2 > R_2^2 \end{cases} \tag{2.4}$$

де $\alpha = 2(R_2^2 - 2r^2 + R_1^2)(R_2^2 - R_1^2)^{-1}$, $P_{n-0.5}^{0.5}(\alpha)$ – приєднана функція Лежандра першого роду [4].

Функцію $F(\eta)$ будемо шукати у вигляді [3]:

$$F(\eta) = R_2 \sum_{n=0}^{\infty} W_{2n} J_{2n}(0.5\eta(R_2 - R_1)) J_{2n}(0.5\eta(R_2 + R_1)) \tag{2.5}$$

де W_{2n} – невідомі константи.

Підставимо (2.5) у (2.3), враховуючи (2.4), отримаємо інтегральне рівняння

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_{2n} \int_0^{\infty} J_{2n}(0.5\eta(R_2 - R_1)) J_{2n}(0.5\eta(R_2 + R_1)) J_0(\eta r) d\eta = f(r) \tag{2.6}$$

Для розв’язку (2.6) використовуємо наступний розклад [2]:

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{\gamma-\mu-\nu} J_\mu(az) J_\nu(bz) = \frac{a^\mu b^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \sum_{m=0}^{\infty} (\gamma+2m) J_{\gamma+2m}(z) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(\gamma+m+n)\,{}_2F_1(-n, -n+\mu, \nu+1; b^2 a^{-2})}{n!(m-n)!\Gamma(m+\mu+1)}$$

де ${}_2F_1(-n, -n+\mu, \nu+1; b^2 a^{-2})$ – гіпергеометрична функція, $\Gamma(z)$ – гамма-функція [4].

Враховуючи значення інтеграла [4]:

$$\int_0^{\infty} J_\mu(az) J_\nu(bz) dz = \frac{a^{-\nu-1} b^\nu \Gamma(0.5(\mu+\nu+1))}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(0.5(\mu-\nu+1))}\, {}_2F_1(0.5(\nu+\mu+1), 0.5(\nu-\mu+1), \nu+1; b^2 a^{-2}) \tag{2.7}$$

Після використання (2.7) в (2.6), помножимо обидві частини (2.6) на

$$\frac{T_{2n}(0.5\alpha)}{\sqrt{R_2^2 - r^2}\sqrt{r^2 - R_1^2}} r dr, \; n=0,1,2,..$$

де $T_{2n}(z)$ – поліном Чебишева першого роду [4].

І зінтеґруємо його по r, враховуючи значення інтеграла

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{T_{2n}(0.5\alpha) T_{2k}(0.5\alpha)}{\sqrt{R_2^2 - r^2}\sqrt{r^2 - R_1^2}} r dr = \begin{cases} \pi/2, & n = k = 0, \\ \pi/4, & n = k > 0, \\ 0, & n \neq k. \end{cases}$$

Задовольнивши другу граничну умову (1.5), маємо

$$\int_0^\infty F(\eta)\int_{R_1}^{R_2} rJ_0(\mu_k r)J_0(\eta r)drd\eta = \frac{C_{44}(R_2-R_1)(1+m_2)}{\omega_3 v_2}\alpha_k^2 t_1\left[\frac{Y_1(\alpha_k R_1 R_2^{-1})}{J_1(\alpha_k R_1 R_2^{-1})}\tilde{O}_k^{(1)}-\tilde{O}_k^{(2)}\right]M_k\ ,$$

$$\left(\tilde{O}_1=\frac{R_2}{\alpha_k}\left[R_1J_1(\alpha_k R_1R_2^{-1})-R_2J_1(\alpha_k)\right],\tilde{O}_2=\frac{R_2}{\alpha_k}\left[R_1Y_1(\alpha_k R_1R_2^{-1})-R_2Y_1(\alpha_k)\right]\right) \tag{2.8}$$

Підставимо (2.5) у (2.8), одержимо:

$$\sum_{n=0}^\infty W_{2n}\int_0^\infty J_{2n}(0.5\eta(R_2-R_1))J_{2n}(0.5\eta(R_2+R_1))\int_{R_1}^{R_2} rJ_0(\mu_k r)J_0(\eta r)drd\eta =$$

$$=\frac{C_{44}(R_2-R_1)(1+m_2)}{\omega_3 v_2}\alpha_k^2 t_1\left[\frac{Y_1(\alpha_k R_1 R_2^{-1})}{J_1(\alpha_k R_1 R_2^{-1})}\tilde{O}_k^{(1)}-\tilde{O}_k^{(2)}\right]M_k \tag{2.9}$$

Для визначення сталих M_i, W_{2i} (i=0,1,2,…), які входять до (2.1) – (2.3), отримаємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь, що складається із (2.9) та (2.6). Дану систему розв'яжемо методом редукції, враховуючи, що $W_0=\omega_2\varepsilon\pi(R_2-R_1)(8\omega_3R_2)^{-1}$.

Використавши умову рівноваги (1.8), встановимо зв'язок між осіданням та рівнодіючою навантаження P у вигляді

$$P=2\omega_2\omega_3\varepsilon(\pi(R_2-R_1))^{-1}$$

Визначивши невідомі сталі M_i, W_{2i} (i = 0,1,2,..) із системи лінійних алгебраїчних рівнянь, обчислимо переміщення та напруження як у пружному штампі, так і у пружному півпросторі за формулами (2.1) – (2.2). У наслідок цього, розв'язок представимо у вигляді рядів через нескінченну систему констант, які визначаються із системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Також відмітимо, що коефіцієнти системи залежать від величин, що визначають структуру пружного потенціалу та висоту пружного штампа H.

3. Числові результати.

В роботі проведений числовий розв’язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом редукції для потенціалу Трелоара при наступних значеннях параметрів: $R_1 = 1 \cdot 10^{-2}$ м, $R_2 = 2 \cdot 10^{-2}$ м, $\varepsilon = 10^{-4}$, $E = 8 \cdot 10^{-5}$ МПа, $\lambda_1 = 0.7; 0.8; 0.9; 1; 1.1; 1.2; 1.3$, де $R_1 \le r \le R_2$. Алгоритм розв’язку реалізовано у вигляді програми у пакеті Maple 15.

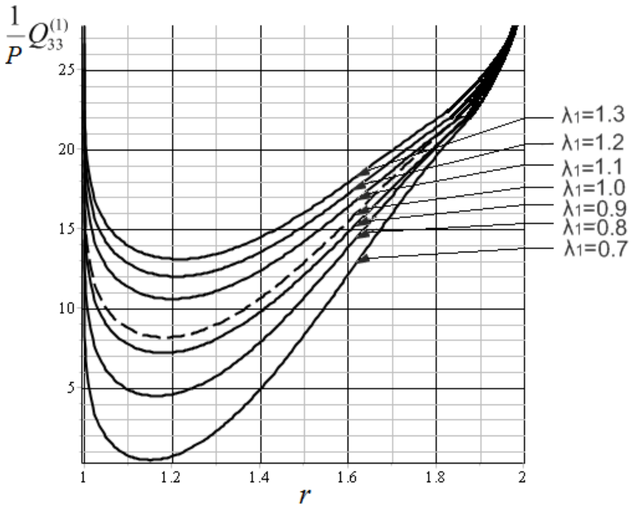

Рис. 2. Контактні напруження $Q_{33}^{(1)}$ для потенціалу Трелоара.

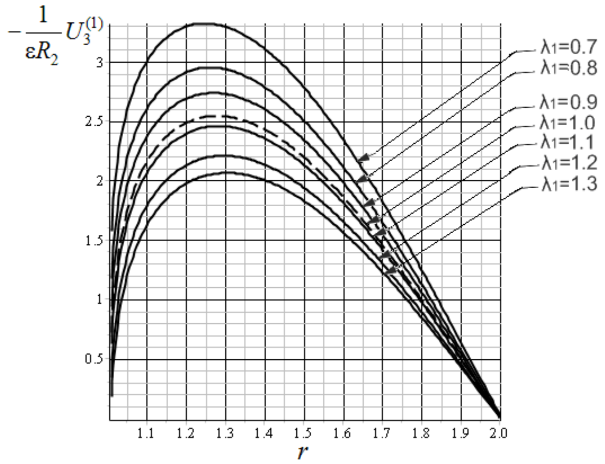

Рис. 3. Контактні переміщення $U_3^{(1)}$ (потенціал Трелоара).

На рис. 2, 3 представлені розподіли нормального контактного напруження $\frac{1}{P}Q_{33}^{(1)}$ та переміщення $-\frac{1}{\varepsilon R_2}U_3^{(1)}$ під кільцевим штампом на межі контакту у безрозмірних координатах. Пунктирна крива відповідає півпростору без початкових напружень (λ_1=1), а суцільна – з початковими напруженнями.

У випадку відсутності початкових напружень (λ_1=1) графік розподілу контактних напружень відповідає відомим раніше розв'язкам контактної задачі про тиск кільцевого штампа на півпростір [5].

Висновок.

На основі числового аналізу можна стверджувати, що при сталому зовнішньому навантаженні початкові напруження суттєво впливають на основні контактні характеристики (особливо для нестисливих тіл). Крім того, вплив початкових напружень на напружено-деформований стан пружного півпростору, у який втискається пружний кільцевий штамп з початковими напруженнями, полягає у тому, що:

1) початкові напруження у півпросторі призводять у випадку стискання ($\lambda_1 < 1$) до зменшення напружень, а у випадку розтягання ($\lambda_1 > 1$) – до їх збільшення;

2) у випадку переміщень (рис.3) – навпаки. При стисканні ($\lambda_1 < 1$) початкові напруження у півпросторі призводять до збільшення переміщень по абсолютній величині, а у випадку розтягання ($\lambda_1 > 1$) – до їх зменшення.

Таким чином, отримані результати із врахуванням попередньо напруженого стану у випадку контактної взаємодії пружного штампа та пружного півпростору можуть бути використані для регулювання контактних напружень та переміщень при розрахунках конструкцій на міцність.

РЕЗЮМЕ.

Стаття присвячена дослідженню задачі контактної взаємодії тиску пружного циліндричного кільцевого штампа на пружний півпростір з початковими (залишковими) напруженнями без врахування сил тертя у випадку нерівних коренів характеристичного рівняння. Дослідження представлено в загальному вигляді для теорії великих початкових (кінцевих) деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій в рамках лінеаризованої теорії пружності при довільній структурі пружного потенціалу. Чисельний аналіз представлений у вигляді графіків для потенціалу Трелоара.

1. *Александров В.М., Арутюнян Н.Х.* Контактные задачи для преднапряженных деформируемых тел // Прикл. механика. – 1984. – **20**, № 3. – С. 9 – 16.

2. *Бейтмен П., Эрдейи А*. Высшие трансцендентные функции. В 2 ч. – М.: Наука, 1974. Ч. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – 295 с.

3. *Босаков С. В.* Две контактные задачи о вдавливании кольцевого штампа в упругое полупространство. // Наука и техника. – 2018. – **17**, № 6. – С. 458–464. https://doi.org/10.21122/2227-1031-2018-17- 6-458-464

4. *Градштейн И. С., И. М. Рыжик* Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. – М.: Физматлит, 1963. – 1100 с.

5. *Грилицкий Д.В., Кизыма Я.М.* Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости – Львов: Вища шк., 1981. – 136 с.

6. *Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П.* Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. – Германия, Saarbrücken LAPLAMBERT Academic Publishing. – 2015. – 468 с.

7. *Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П.* Статика и динамика упругих оснований с начальными (остаточными) напряжениями: Монография. – Кременчук «Press - Line». – 2007. – 795 с.

8. *Гузь О.М., Бабич С.Ю., Рудницький В.Б.* Контактна взаємодія пружних тіл з початковими напруженнями: Навчальний посібник. – Київ.: Вища школа. – 1995. – 304 с.

9. *Гузь А.Н.* О контактных задачах для упругих сжимаемых тел с начальными напряжениями // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1980. – №6. – С. 48 – 52.

10. *Гузь А.Н., Рудницкий В.Б.* Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями [Текст]. – Хмельницький, вид. ПП Мельник. – 2006. – 710 с.

11. *Филиппова Л.М.* Пространственная контактная задача для предварительно напряженного упругого тела // Прикл. математика и механика. – 1978. – **42**, №6. – С. 1080 – 1084.

12. *Babich. S. Yu., Dikhtyaruk N. N., Degtyar S. V.* Contact Problem for Two Identical Strips Reinforced by Periodically Arranged Fasteners with Initial Stresses. // International Applied Mechanics. – 2019. – **55**, №6. – Pp. 629 – 635.

13. *Babich. S. Yu., Dikhtyaruk N. N.* Load transfer from an infinite inhomogeneous stringer to an elastic strip clamped by one face with initial stresses. // International Applied Mechanics. – 2020. – **56**, №6. – Pp. 346 – 356.

14. *Dhaliwal R. S., Singh B. M., Rokne J. G.* Axisymmetric contact and crack problems for a initially stressed Neo-Hooken elastic layer // Int. J. Eng. Sci. – 1980. – **18**, №1. – Pp. 169 – 179.

15. *Guz A. N., Babich S. Yu., Rudnitsky V. B*. Contact problems for elastic bodies with initial (residual) stresses (Part I) // Problems of Tribology. – 2002. – № 2. – Pp. 34-51.

16. *Guz A.N., Babich S.Y., Rudnitskii V.B.* Contact problems for elastic bodies with initial stresses: Focus on Ukrainian research. // Int. Appl. Mech. Rew. – 1998. – **51**, №5. – P. 343–371. https://doi.org/10.1115/1.3099009

17. *Guz A. N. , Bagno A. M.* Influence of Prestresses on Normal Waves in an Elastic Compressible Half-Space Interacting with a Layer of a Compressible Ideal Fluid. // International Applied Mechanics. – 2019. – **55**, №6. – Pp. 585-595.

18. *Guz A. N., Bagno A. M.* Influence of Prestresses on Quasi-Lamb Modes in Hydroelastic Waveguides // International Applied Mechanics. – 2020. – **56**, №1. – Pp. 1–12.

19. *Guz A. N.* Nonclassical Problems of Fracture/Failure Mechanics: On the Occasion of the 50th Anniversary of Research (Review). III. // International Applied Mechanics. – 2019. – **55**, №4. – Pp. 343–415.

20. *Kurashige M.* Circular crack problem for initially stressed neo-Hookean solid // ZAMM. - 1969. - **49**, №8.- Pp. 671-678.

21. *MacDonald, H. M*. Note on the Evaluation of the Certain Integral Containing Bessel's Functions. // Proc. London Math. Sos. – 1909. – **S2–7**, №1. – Pp. 142–149.

22. *Semenyuk, N.P., Zhukova, N.B.* Stability of a Sandwich Cylindrical Shell with Core Subject to External Pressure and Pressure in the Inner Cylinder. // International Applied Mechanics. – 2020. – **56**, №1. – Pp. 40-53. https://doi.org/10.1007/s10778-020-00995-y

23. *Yaretskaya N. A.* Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses. // International Applied Mechanics. – 2014. – **50**, №4. – Pp. 378–388.

24. *Yaretskaya N. A*. Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. // International Applied Mechanics. – 2018. – **54**, №5. – Pp. 539-543.

КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПРУЖНОГО КІЛЬЦЕВОГО ШТАМПА ТА ПІВПРОСТОРУ З ПОЧАТКОВИМИ (ЗАЛИШКОВИМИ) НАПРУЖЕННЯМИ

[1]С.Ю. Бабич, [2]Н.О. Ярецька

[1] Інститут механіки ім. С.П. Тимошенко

національної академії наук України,

вул. П. Нестерова, 3, 03057, Київ-57, Україна;

[2]Хмельницький національний університет,

вул. Інститутська, 11, 29016, Хмельницький, Україна;

e-mail: massacran2@ukr.net

Анотація. Стаття присвячена дослідженню задачі контактної взаємодії тиску пружного циліндричного кільцевого штампа на півпростір з початковими (залишковими) напруженнями без врахування сил тертя у випадку нерівних коренів характеристичного рівняння. Дослідження представлено в загальному вигляді для теорії великих початкових (кінцевих) деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій в рамках лінеаризованої теорії пружності при довільній структурі пружного потенціалу. Чисельний аналіз представлений у вигляді графіків для потенціалу Трелоара.

Ключові слова: лінеаризована теорія пружності, початкові (залишкові) напруження, контактна задача, кільцевий штамп, півпростір.

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОГО КОЛЬЦЕВОГО ШТАМПА И ПОЛУПРОСТРАНСТВА С НАЧАЛЬНЫМИ (ОСТАТОЧНЫМИ) НАПРЯЖЕНИЯМИ

[1]С.Ю. Бабич, [2]Н.А. Ярецкая

[1] Институт механики им. С.П. Тимошенко

национальной академии наук Украины,

ул. П. Нестерова, 3, 03057, Киев-57, Украина;

[2]Хмельницкий национальный университет,

ул. Институтская, 11, 29016, Хмельницкий, Украина;

e-mail: massacran2@ukr.net

Аннотация. Статья посвящена исследованию задачи контактного взаимодействия о давлении упругого цилиндрического кольцевого штампа на полупространство с начальными (остаточными) напряжениями без учета сил трения в случае неравных корней характеристического уравнения. Исследование представлено в общем виде для теории больших начальных (конечных) деформаций и двух вариантов теории малых начальных деформаций в рамках линеаризованной теории упругости при произвольной структуре упругого потенциала. Численный анализ представлен в виде графиков для потенциала Трелоара.

Ключевые слова: линеаризованная теория упругости, начальные (остаточные) напряжения, контактная задача, кольцевой штамп, полупространство.

CONTACT PROBLEM FOR AN ELASTIC ANNULAR PUNCH AND SEMISPACE WITH INITIAL (RESIDUAL) STRESSES

[1]Babich. S. Yu. [2]Yaretskaya N. A.

[1]Institute of Mechanics S.P. Tymoshenko

National Academy of Sciences of Ukraine,

st. P. Nesterova, 3, 03057, Kiev-57, Ukraine;

[2]Khmelnytsky National University,

Institutska str., 11, 29016, Khmelnytsky, Ukraine

e-mail: massacran2@ukr.net

Abstract. The article is devoted to the research of task of contact interaction of the pressure of an elastic cylindrical annular punch on semispace with initial (residual) stresses without friction. It is solved for the case of unequal roots of the characteristic equation. In general, the research was carried out for the theory of great initial (ultimate) and two variants of the theory of small initial deformations within the framework of linearized theory of elasticity with the elastic potential having arbitrary structure. Numerical analysis is presented in the form of graphs for the case of Treloar's potential.

Key words: the linearized elasticity theory, initial (residual) stresses, contact problem, annular punch, semispace.

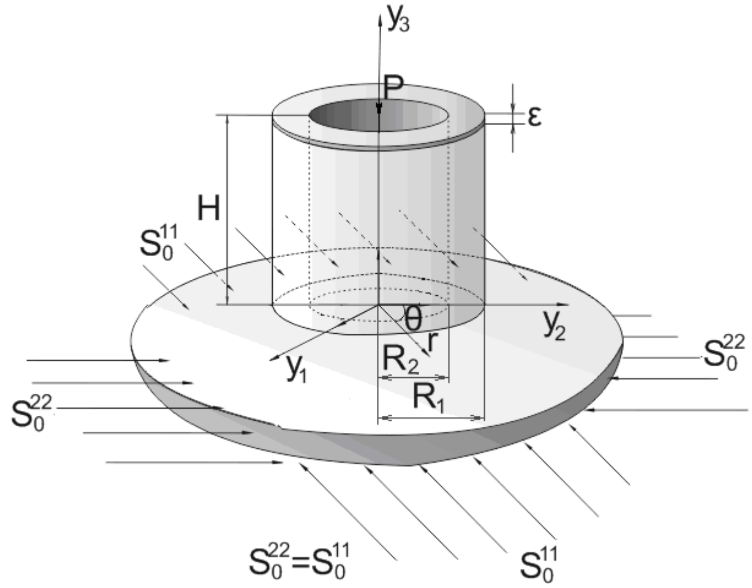

Рис. 1. Тиск пружного кільцевого штампа на півпростір з початковими напруженнями.

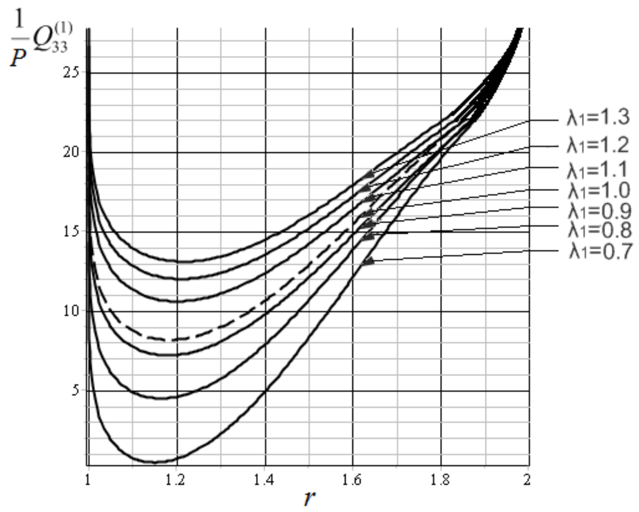

Рис. 2. Контактні напруження $Q_{33}^{(1)}$ для потенціалу Трелоара.

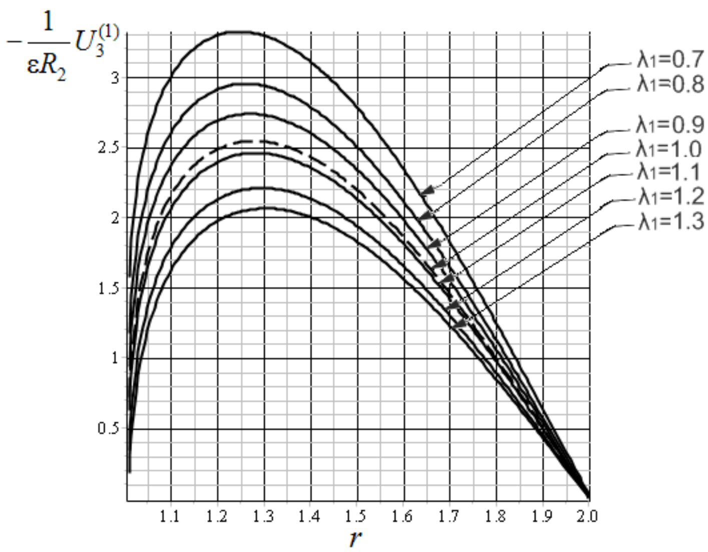

Рис. 3. Контактні переміщення $U_3^{(1)}$ (потенціал Трелоара).