

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА ДО КВАЛІФІКАЦІЙНОЇ РОБОТИ БАКАЛАВРА

на тему *Аналіз напружено-деформованого стану при глибокому витягуванні листа зі сталі 08кп автомобільного елемента*

Шифр: КРБМТВАТАМ 26.22149.000. ПЗ

Галузь знань	<u>13 – Механічна інженерія</u> Шифр і назва галузі знань
Спеціальність	<u>132 – Матеріалознавство</u> Шифр і назва спеціальності
Рівень вищої освіти	<u>Перший бакалаврський</u> Рівень вищої освіти
Освітньо-професійна програма	<u>Відновлення та технічний сервіс автомобілів</u> Назва освітньої програми

Виконав: здобувач 4 курсу, група МТВА-22-1
Курс, група виконавця


Підпис

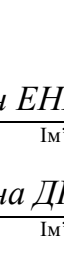
Іван ЕНЮТИН
Ім'я, прізвище

Керівник: д-р.техн.н., професор кафедри ТАМ
Науковий ступінь, посада


Підпис

Ілона ДРАЧ
Ім'я, прізвище

До захисту допускаю:
зав. кафедри ТАМ, д-р.техн.н., професор

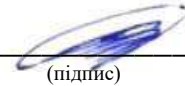

Підпис

Олександр ДИХА
Ім'я, прізвище

10 червня 2026 р.

ХМЕЛЬНИЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Факультет *інженерії, транспорту та архітектури*
Кафедра *трибології, автомобілів та матеріалознавства*
Рівень вищої освіти *перший бакалаврський*
Галузь знань *13 – Механічна інженерія*
Спеціальність *132 – Матеріалознавство*
Освітньо-професійна програма *Відновлення та технічний сервіс автомобілів*

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри ТАМ



д-р.техн.н., проф. Олександр ДИХА

Науковий ступінь, ім'я, прізвище

9 лютого 2026 року

ЗАВДАННЯ НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ БАКАЛАВРА

Завдання видано здобувачу Енютіну Івану Олеговичу
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема кваліфікаційної роботи бакалавра: «Аналіз напружено-деформованого стану при глибокому витягуванні листа зі сталі 08кп автомобільного елемента»

Керівник роботи професор кафедри ТАМ Драч Ілона Володимирівна
(посада, прізвище, ім'я, по батькові)

2. Затверджено наказом університету від 8 січня 2026 р. № 7

3. Дата видачі завдання здобувачу: 9 лютого 2026 р.

4. Строк подання здобувачем роботи на кафедру: 10 червня 2026 р.

5. Вихідні дані: джерела інформації щодо теми КРБ; матеріали переддипломної практики: склад, властивості та застосування в автомобілебудуванні сталі 08кп; теоретичні засади тензорного опису напружено-деформованого стану.

6. Зміст пояснювальної записки (перелік задач): провести аналіз предметної області, розглянути математичні основи тензорів напружень та деформацій; систематизувати інваріанти та їх фізичну інтерпретацію; проаналізувати застосування інваріантів у критеріях пластичності; виконати розрахунок інваріантів для НДС при витягуванні сталі 08КП.

7. Перелік графічного матеріалу: *графічна частина роботи представлена у вигляді презентації на слайдах.*

8. Консультанти розділів роботи:

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		Завдання видав	Завдання прийняв

9. Календарний план виконання кваліфікаційної роботи бакалавра:

№	Назва етапів (розділів) кваліфікаційної роботи бакалавра	Термін виконання	Примітка
1	<i>Вибір напрямку дослідження та узгодження тематики кваліфікаційної роботи бакалавра з керівником</i>	<i>09.02.2026</i>	<i>виконано</i>
2	<i>Ознайомлення з предметною областю, формулювання мети та задач дослідження, визначення об'єкта та предмета дослідження</i>	<i>30.02.2026</i>	<i>виконано</i>
3	<i>Робота над розділом 1 – Теоретичні засади тензорного опису напружено-деформованого стану</i>	<i>30.03.2026</i>	<i>виконано</i>
4	<i>Робота над розділом 2 – Інваріанти тензорів напружень та деформацій</i>	<i>15.04.2026</i>	<i>виконано</i>
5	<i>Робота над розділом 3 – Розрахункова частина</i>	<i>15.05.2026</i>	<i>виконано</i>
6	<i>Оформлення пояснювальної записки згідно вимог</i>	<i>10.06.2026</i>	<i>виконано</i>

Виконавець: здобувач 4 курсу, група МТВА-22-1

Курс, група виконавця


Підпис

Іван ЕНЮТИН

Ім'я, прізвище

Керівник: д-р.техн.н., професор кафедри ТАМ

Науковий ступінь, посада


Підпис

Ілона ДРАЧ

Ім'я, прізвище

РЕФЕРАТ

Тема кваліфікаційної роботи бакалавра: Аналіз напружено-деформованого стану при глибокому витягуванні листа зі сталі 08кп автомобільного елемента

Виконавець кваліфікаційної роботи бакалавра: здобувач 4 курсу групи МТВА-22-1
Енютін Іван Олегович

Керівник кваліфікаційної роботи бакалавра: д-р.техн.н., професор кафедри ТАМ
Драч Ілона Володимирівна

Кваліфікаційна робота бакалавра містить:

Пояснювальна записка				Кількість додатків
Сторінок	Рисунків	Таблиць	Джерел інформації	
82	12	11	35	1

Мета кваліфікаційної роботи – теоретично обґрунтувати фізичний зміст та практичне застосування інваріантів тензорів напружень і деформацій на прикладі аналізу НДС при витягуванні сталі 08КП.

Для досягнення поставленої мети визначені такі завдання дослідження:

- розглянути математичні основи тензорів напружень та деформацій;
- систематизувати інваріанти та їх фізичну інтерпретацію;
- проаналізувати застосування інваріантів у критеріях пластичності;
- виконати розрахунок інваріантів для НДС при витягуванні сталі 08КП.

Об'єкт дослідження – процес глибокого витягування листових заготовок.



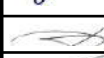

Предмет дослідження – інваріанти тензорів напружень та деформацій у механіці матеріалів.

Методи дослідження: теоретичний аналіз, математичне моделювання, порівняльний аналіз.

Ключові слова: інваріанти тензорів напружень та деформацій, процес глибокого витягування листових заготовок, математичне моделювання, порівняльний аналіз.

ЗМІСТ

Вступ.....	6
1 Теоретичні засади тензорного опису напружено-деформованого стану	8
1.1 Поняття напружено-деформованого стану та його характеристики	8
1.2 Тензор напружень: визначення, компоненти, властивості симетрії	11
1.3 Тензор деформацій: геометричний зміст, компоненти, зв'язок з переміщеннями	17
1.4 Перетворення компонентів тензорів при зміні системи координат	22
2 Інваріанти тензорів напружень та деформацій	28
2.1 Поняття інваріантності в механіці суцільного середовища	28
2.2 Інваріанти тензора напружень: лінійний, квадратичний, кубічний	32
2.3 Фізичний зміст інваріантів напружень: середній тиск, інтенсивність напружень	37
2.4 Інваріанти тензора деформацій та їх геометрична інтерпретація ...	42
2.5 Інваріанти девіаторів напружень та деформацій	46
2.6 Зв'язок між інваріантами напружень та деформацій для ізотропних матеріалів	49

					КРБМТВАТАМ 26.22149.000 ПЗ				
Змн	Арк.	№ докум.	Підпис	Дат	Аналіз напружено-деформованого стану при глибокому витягуванні листа зі сталі 08кп автомобільного елемента	Лім.	Арк.	Акрушіє	
Розроб.	Енютін							4	86
Перевір.	Драч								
Реценз.									
Н. Контр.	Бабак								
Затверд.	Диха					ХНУ група МТВА-22-1			

3 Розрахункова частина	51
3.1 Аналіз НДС при глибокому витягуванні листа зі сталі 08КП	51
3.2 Визначення компонентів тензорів напружень у зонах деформування	59
3.3 Розрахунок інваріантів та побудова діаграми пластичності ($\sigma_i = f(\epsilon_i)$)	63
3.4 Оцінка придатності сталі 08КП до глибокого витягування за критерієм Мізеса	69
Висновки.....	76
Перелік посилань	79
Додаток.....	83

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ</i>	Арк.
						5
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

ВСТУП

Сучасне машинобудування та автомобільна промисловість потребують точного математичного опису механічної поведінки матеріалів під час їх обробки тиском та експлуатації. Фундаментальною основою такого опису є механіка суцільного середовища, зокрема теорія напружено-деформованого стану (НДС), яка оперує тензорними величинами – тензорами напружень та деформацій.

Тензорний опис НДС дозволяє адекватно моделювати механічні процеси в матеріалах незалежно від вибору системи координат. Ключову роль у цьому описі відіграють інваріанти тензорів – скалярні величини, що зберігають свої значення при будь-яких ортогональних перетвореннях координат. Інваріанти мають чіткий фізичний зміст: вони характеризують об'ємну зміну (перший інваріант), інтенсивність напруженого стану (другий інваріант девіатора) та інші важливі властивості матеріалу.

Актуальність теми зумовлена широким застосуванням операцій глибокого витягування в виробництві листових деталей автомобілів, побутової техніки та приладів. При витягуванні виникають складні напружено-деформовані стани з поєднанням розтягу, стиснення та зсуву, які неможливо адекватно описати без тензорного аналізу. Інваріанти тензорів дозволяють оцінити еквівалентні напруження за критеріями пластичності, визначити межу придатності матеріалу до подальшого деформування та прогнозувати пошкодження.

Для якісної сталі 08КП, що характеризується високою пластичністю та зварюваністю, аналіз інваріантів є особливо важливим. Ця сталь застосовується для виготовлення корпусів, кришок, баків складної форми, де критичним є контроль рівня деформацій для уникнення розривів та змінань.

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ</i>	Арк.
						6
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

Незважаючи на розвиток чисельних методів (МСЕ), аналітичний аналіз інваріантів залишається необхідним для розуміння фізики процесів витягування та верифікації розрахунків.

Мета роботи – теоретично обґрунтувати фізичний зміст та практичне застосування інваріантів тензорів напружень і деформацій на прикладі аналізу НДС при витягуванні сталі 08КП.

Завдання дослідження:

- розглянути математичні основи тензорів напружень та деформацій;
- систематизувати інваріанти та їх фізичну інтерпретацію;
- проаналізувати застосування інваріантів у критеріях пластичності;
- виконати розрахунок інваріантів для НДС при витягуванні сталі 08КП.

Об'єкт дослідження – процес глибокого витягування листових заготовок.

Предмет дослідження – інваріанти тензорів напружень та деформацій у механіці матеріалів.

Методи дослідження: теоретичний аналіз, математичне моделювання, порівняльний аналіз.

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ</i>	Арк.
						7
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

РОЗДІЛ 1 ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ ТЕНЗОРНОГО ОПИСУ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ

1.1 Поняття напружено-деформованого стану та його характеристики

Напружено-деформований стан (НДС) є центральним поняттям механіки деформівного твердого тіла, що описує реакцію матеріалу на зовнішнє навантаження. Під НДС розуміють сукупність напружень та деформацій, що виникають у матеріалі під дією зовнішніх сил, температурних чи інших факторів [1, с. 45].

У загальному випадку НДС характеризується тривимірністю – напруження та деформації мають різні значення в різних точках тіла та в різних напрямках. Для повного опису НДС необхідно знати шість компонентів тензора напружень та шість компонентів тензора деформацій у кожній точці тіла [2, с. 112].

Основні характеристики НДС.

1. За геометрією деформування:

— об'ємний НДС – напруження/деформації змінюються в усіх трьох напрямках ($\sigma_x \neq 0, \sigma_y \neq 0, \sigma_z \neq 0$);

— плоский НДС – одна з компонент відсутня або настільки мала, що нею можна знехтувати (плоска деформація або плоский напружений стан);

— одновісний/двовісний НДС – переважає один або два напрямки деформування [3, с. 78].

2. За фізичною природою:

— пружний НДС – деформації зникають після зняття навантаження, підкоряються закону Гука;

— пружнопластичний НДС – поєднує пружні та залишкові (пластичні) деформації;

					КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ	Арк.
						8
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

— повзучий НДС – деформації зростають у часі при постійному навантаженні [4, с. 156].

3. За інтенсивністю:

— слабкий НДС – усі напруження нижчі за пропорційну межу ($\sigma_i < \sigma_{0,2}$);

— сильний НДС – частина напружень перевищує межу текучості, виникають пластичні деформації.

Для сталі 08КП, яка належить до якісних киплячих сталей з низьким вмістом вуглецю (0,05–0,12% С), характерним є широкий діапазон пружних деформацій та висока пластичність. Механічні властивості сталі 08КП: $\sigma_{0,2} = 180\text{--}220$ МПа, $\sigma_u = 300\text{--}400$ МПа, $\delta = 30\text{--}40\%$ [5]. Це забезпечує її придатність до операцій глибокого витягування, де виникають складні НДС з поєднанням розтягу, стиснення та зсуву.

При витягуванні листової заготовки зі сталі 08КП спостерігається негетогенний НДС: в зоні дна деталі переважає двовісне розтягування, в зоні стінки – розтягування зі стисненням по товщині, в зоні радіуса закруглення – складний комбінований НДС зі значними зсувовими компонентами [6, с. 234]. Розподіл напружень та деформацій у цих зонах визначається геометрією штампа, властивостями матеріалу та режимами деформування.

При операції глибокого витягування листової заготовки (рис. 1.1) зі сталі 08КП спостерігається складний негетогенний НДС, що змінюється від точки до точки. На рис. 1.2 подана схема витягування циліндричної деталі з позначенням характерних зон та компонентів НДС.

Як видно з рис. 1.2, процес витягування супроводжується перерозподілом напружень по зонах деталі. У зоні дна (1) переважає двовісне розтягування ($\sigma_\theta \approx \sigma_r > 0$, $\sigma_z \approx 0$), що відповідає плоскому напруженому стану з $\mu \approx -0,8$. У зоні стінки (2) реалізується розтягування в окружному напрямку зі стисненням по товщині ($\sigma_\theta > 0$, $\sigma_r \approx 0$, $\sigma_z < 0$). Найскладніший НДС

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ</i>	Арк.
						9
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

спостерігається в зоні радіуса закруглення (3), де виникають усі три нормальні та дотичні компоненти напружень [3, с. 89].

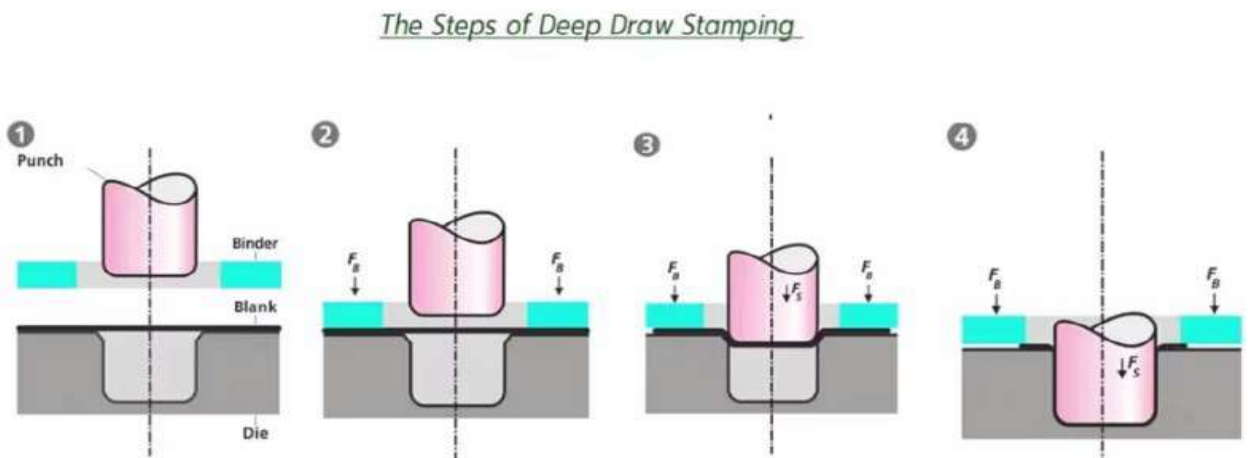


Рис.1.1–Схема процесу глибокого витягування з позначенням зон напружень [6]

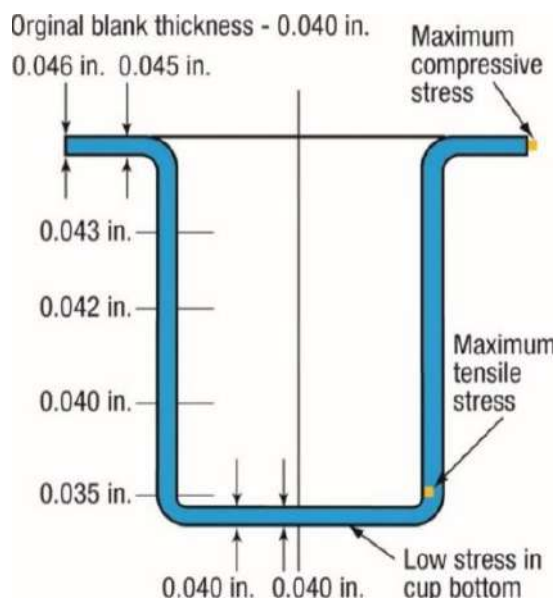


Рис. 1.2 – Схема НДС при глибокому витягуванні листової заготовки [6]

Для аналізу НДС вводять головні напрямки та головні значення напружень і деформацій – такі, де зсувові компоненти дорівнюють нулю. Головні напруження позначаються $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$), головні деформації – $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$. У головних осях тензори набувають діагонального вигляду, що спрощує аналіз [7, с. 89].

					КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ	Арк. 10
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

Важливою характеристикою НДС є вид деформування, який оцінюється через коефіцієнт Лоде:

$$\mu_{\sigma} = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (1.1)$$

При $\mu_{\sigma} = -1$ маємо одноосьове розтягування, при $\mu_{\sigma} = 0$ – плоский зсув, при $\mu_{\sigma} = +1$ – одноосьове стиснення [8, с. 167]. Для сталі 08КП при глибокій витягуванні μ_{σ} змінюється від $-0,8$ в зоні дна до $+0,5$ в зоні радіуса, що свідчить про зміну виду деформування та необхідність урахування всіх компонентів тензора.

Сучасні підходи до опису НДС базуються на тензорному формалізмі, який забезпечує інваріантність фізичних законів відносно вибору системи координат. Тензор напружень σ_{ij} та тензор деформацій ϵ_{ij} є симетричними тензорами другого рангу з шістьма незалежними компонентами кожен. Їх інваріанти – скалярні характеристики, що не залежать від орієнтації осей – дозволяють формулювати критерії пластичності та міцності у загальному вигляді [9, с. 201].

Таким чином, поняття НДС є фундаментом для аналізу механічної поведінки матеріалів, зокрема сталі 08КП при операціях пластичного формоутворення. Подальший розгляд тензорів напружень та деформацій, їх інваріантів дозволить створити математичний апарат для кількісної оцінки НДС та прогнозування працездатності деталей.

1.2 Тензор напружень: визначення, компоненти, властивості симетрії

Поняття напруження та метод січних.

Для кількісного опису внутрішніх сил, що виникають у деформованому твердому тілі, використовується поняття напруження. Розглянемо довільне тверде тіло, яке знаходиться під дією системи зовнішніх сил. Щоб

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ</i>	Арк.
						11
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

охарактеризувати внутрішні сили в деякій точці тіла, застосовують метод січних [1, с. 56].

Уявімо, що тіло розсічено площиною, яка проходить через розглядувану точку O . Виділимо елементарну площадку dS з нормаллю n . На цю площадку діє внутрішня сила dF . Вектор напруження p_n у точці O на площадці з нормаллю n визначається як:

$$p_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS}$$

Вектор p_n залежить як від положення точки O , так і від орієнтації площадки (напрямку нормалі n). Для повного опису напруженого стану в точці необхідно знати вектори напружень на трьох взаємно перпендикулярних площадках [2, с. 89].

Компоненти тензора напружень.

Уведемо декартову систему координат $Oxyz$. Розглянемо три площадки, перпендикулярні до осей координат. (рис.1.3).

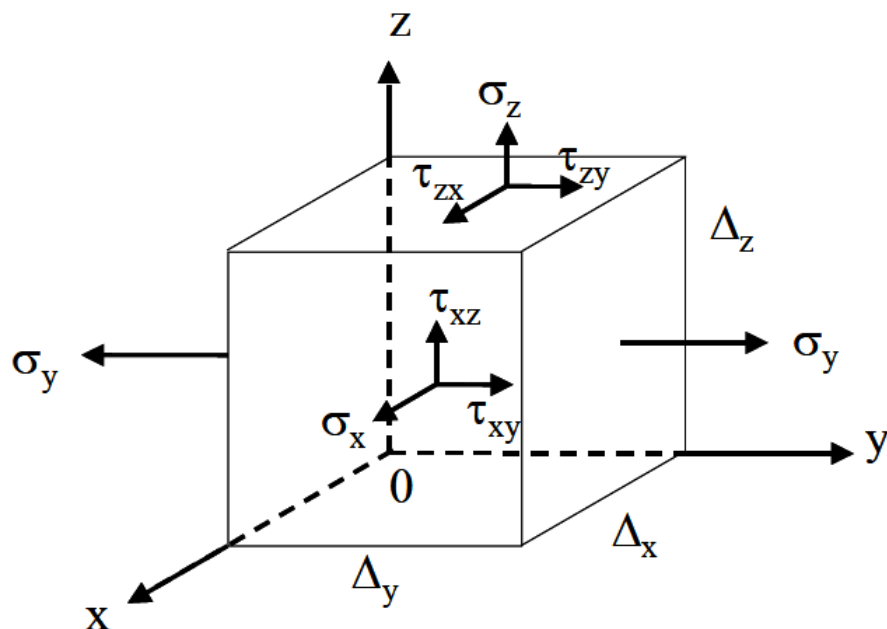


Рис. 1.3 – Елементарний куб з компонентами тензора напружень [2]

На кожній площадці вектор напруження можна розкласти на нормальну та дотичну складові:

На площадці, перпендикулярній до осі Ox (нормаль $n = (1,0,0)$):

— нормальне напруження σ_{xx} (або σ_x);

— дотичні напруження τ_{xy} та τ_{xz} ;

На площадці, перпендикулярній до осі Oy (нормаль $n = (0,1,0)$):

— нормальне напруження σ_{yy} (або σ_y)

— дотичні напруження τ_{yx} та τ_{yz}

На площадці, перпендикулярній до осі Oz (нормаль $n = (0,0,1)$):

— нормальне напруження σ_{zz} (або σ_z)

— дотичні напруження τ_{zx} та τ_{zy}

Таким чином, напружений стан у точці характеризується дев'ятьма компонентами, які утворюють тензор напружень другого рангу [3, с. 134]:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

де індекси $i, j = 1, 2, 3$ відповідають осям x, y, z .

Теорема про спарені дотичні напруження (властивість симетрії).

Тензор напружень є симетричним, тобто виконується рівність:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

Це твердження випливає з рівнянь рівноваги моментів для елементарного паралелепіпеда. Розглянемо рівняння моментів відносно осі Oz [4, с. 78]:

$$\sum M_z = 0 : (\tau_{xy} \cdot dy \cdot dz) \cdot dx - (\tau_{yx} \cdot dx \cdot dz) \cdot dy = 0$$

					КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ	Арк.
						13
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

Звідси отримуємо $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. Аналогічно доводяться інші співвідношення.

Властивість симетрії зменшує кількість незалежних компонентів тензора напружень з дев'яти до шести:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Закон перетворення компонентів тензора напружень/

При повороті системи координат компоненти тензора напружень змінюються за певним законом. Нехай нова система координат $Ox'y'z'$ утворена поворотом відносно старої $Oxyz$. Косинуси кутів між осями позначимо $\alpha_{ij} = \cos(x'_i, x_j)$.

Компоненти тензора напружень у новій системі координат визначаються за формулою [5, с. 201]:

$$\sigma_{ij}' = \alpha_{ik} \alpha_{jl} \sigma_{kl},$$

де за повторюваними індексами k, l проводиться сумування (правило Ейнштейна).

Цей закон перетворення є характерною ознакою тензора другого рангу. Він гарантує, що фізична сутність напруженого стану не залежить від вибору системи координат.

Головні напруження та головні осі.

Існує така орієнтація системи координат, при якій дотичні напруження зникають, і тензор напружень набуває діагонального вигляду:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ</i>	Арк.
						14
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

де $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – головні напруження ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$), а відповідні осі – головні осі.

Головні напруження знаходяться як корені характеристичного рівняння [6, с. 167]:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0.$$

де I_1, I_2, I_3 – інваріанти тензора напружень, які будуть детально розглянуті у наступному розділі.

Для плоского напруженого стану, який часто реалізується при листовому штампуванні сталі 08КП, один з головних напружень дорівнює нулю ($\sigma_3 = 0$), а інші два знаходяться з рівняння:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Графічне представлення – кола Мора.

Для візуалізації перетворення компонентів тензора напружень використовують кола Мора. У плоскому випадку рівняння кола Мора має вигляд [7, с. 112]:

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_n^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad (1.5)$$

Центр кола розташований у точці $((\sigma_x + \sigma_y)/2, 0)$, радіус дорівнює $\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$. Кожній точці кола відповідає певна орієнтація площадки.

Головні напруження визначаються точками перетину кола з віссю абсцис (рис.1.4).

Для сталі 08КП при операції глибокого витягування аналіз кола Мора дозволяє визначити напрямки максимальних дотичних напружень, що критично для

					КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ	Арк.
						15
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

оцінки умов текучості матеріалу та прогнозування появи дефектів (розривів, змінів) [8, с. 234].

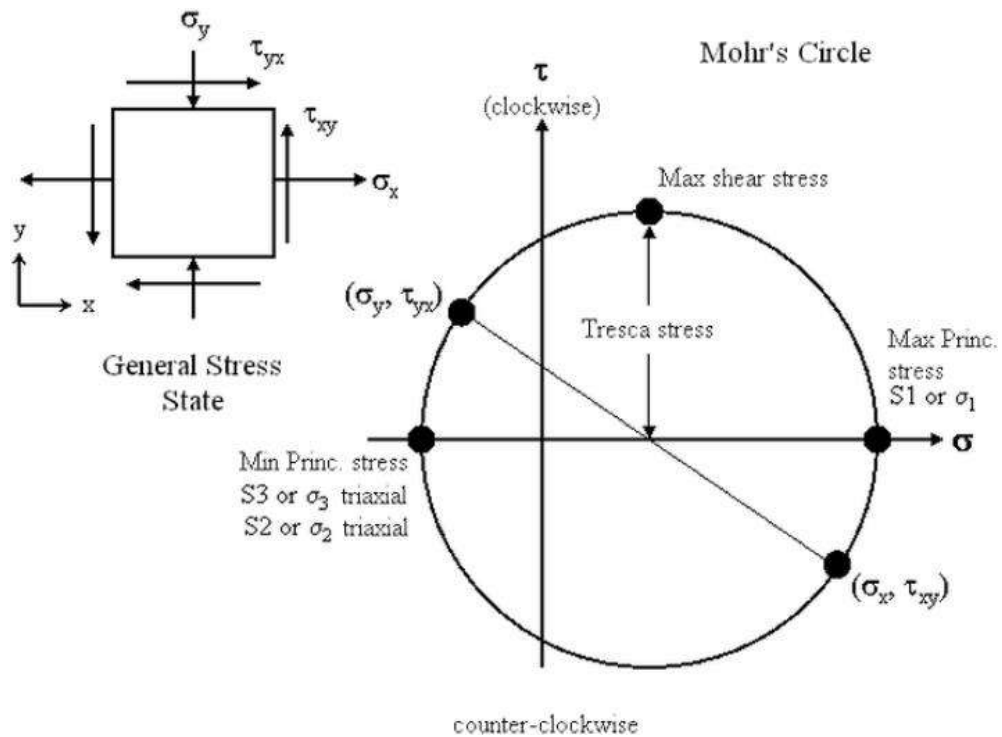


Рис. 1.4 – Класичне коло Мора з з елементарним кубом напружень [7]

Девіатор напружень. Тензор напружень можна подати у вигляді суми сферичного (кульового) та девіаторного тензорів:

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \delta_{ij} + s_{ij}.$$

де $\sigma_0 = I_1/3 = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$ – середнє гідростатичне напруження, δ_{ij} – символ Кронекера, s_{ij} – девіатор напружень (компоненти відхилення від середнього напруження).

Компоненти девіатора:

$$s_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_0 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Девіатор характеризує форму зміни (відхилення від кульової), тоді як сферична частина відповідає об'ємній зміні. При пластичному деформуванні металів (зокрема і сталі 08КП) пластичність зумовлена саме девіатором напружень, оскільки гідростатичний тиск не викликає пластичних деформацій [9, с. 89].

Таким чином, тензор напружень є фундаментальною характеристикою напруженого стану в точці твердого тіла. Його симетричність, закони перетворення при зміні координат та розклад на сферичну та девіаторну частини створюють базу для подальшого аналізу інваріантів та їх застосування в критеріях пластичності матеріалів.

1.3 Тензор деформацій: геометричний зміст, компоненти, зв'язок з переміщеннями

Переміщення та деформації в суцільному середовищі.

При навантаженні твердого тіла його точки зазнають переміщень. Нехай точка з початковими координатами (x, y, z) після деформування займає положення (x', y', z') . Вектор переміщення u має компоненти:

$$u_x = x' - x, \quad u_y = y' - y, \quad u_z = z' - z$$

або в індексній формі: $u_i = x'_i - x_i$ [1, с. 89].

Переміщення тіла як цілого (поступальний рух та обертання) не створює напружень. Для визначення деформацій необхідно розглянути зміну відстаней між точками та зміну кутів між напрямками у деформованому тілі.

Лінійні деформації. Розглянемо дві близькі точки A та B у ненавантаженому тілі на відстані ds одна від одної. Після деформування відстань між ними стає ds' . Відносне подовження (лінійна деформація) визначається як:

					КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ	Арк.
						17
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

$$\varepsilon = \frac{ds' - ds}{ds} \quad (1.7)$$

Для визначення компонентів лінійних деформацій розглянемо елементарні відрізки, паралельні осям координат [2, с. 156].

Відрізок довжиною dx , паралельний осі Ox , після деформування має кінцеву довжину:

$$dx' = \sqrt{\left(dx + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} dx\right)^2}$$

Для малих деформацій, нехтуючи членами вищих порядків малості, отримуємо:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Ці величини характеризують відносне подовження відрізків, паралельних відповідним осям координат [3, с. 201].

Кутові деформації (зсуви). Крім зміни довжин, деформування супроводжується зміною кутів між напрямками, які були взаємно перпендикулярними. Розглянемо два елементарні відрізки dx та dy , що утворювали прямий кут до деформування.

Після деформування кут між ними змінюється на величину γ_{xy} , яка називається кутовою деформацією (зсувом). Для малих деформацій [4, с. 112]:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}$$

Кутові деформації характеризують зміну прямого кута у відповідній площині. Вони безрозмірні та вимірюються в радіанах.

Тензор деформацій та його компоненти.

					КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ	Арк.
						18
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

Компоненти лінійних та кутових деформацій утворюють тензор деформацій (тензор малих деформацій Коші):

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

або в індексній формі:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Тензор деформацій є симетричним ($\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$) та має шість незалежних компонентів: три лінійні деформації (ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{zz}) та три кутові (γ_{xy} , γ_{xz} , γ_{yz}) [5, с. 234].

Використання половин кутових деформацій у тензорі забезпечує його тензорні властивості та спрощує запис закону Гука у тензорній формі.

Геометричний зміст компонентів тензора деформацій.

Лінійні деформації ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{zz} мають простий фізичний зміст (рис. 1.5): вони показують відносну зміну довжини відрізків, паралельних відповідним осям. Наприклад, якщо $\varepsilon_{xx} = 0,001$, це означає, що відрізок довжиною 1000 мм подовжився на 1 мм.

Кутові деформації характеризують зміну прямих кутів (рис. 1.5). Якщо $\gamma_{xy} = 0,002$ рад, то прямий кут у площині xu зменшився на 0,002 рад (приблизно $0,115^\circ$).

Для сталі 08КП при глибокому витягуванні характерні значення лінійних деформацій до 0,3–0,5 (30–50%), що значно перевищує межу пружності. Тому для аналізу процесів витягування необхідно використовувати скінченні деформації, хоча для пружного аналізу та початкових етапів пластичного деформування тензор малих деформацій дає достатньо точні результати [6, с. 167].

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ</i>	Арк.
						19
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

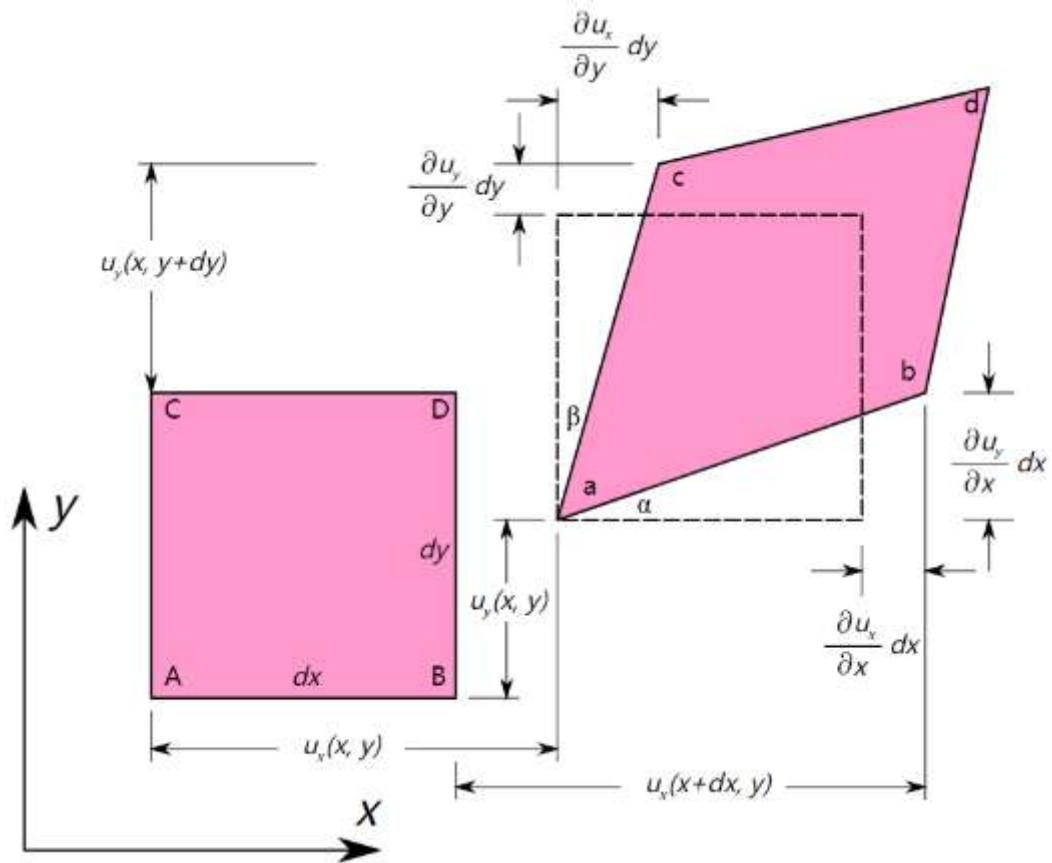


Рис. 1.5 – Детальна схема геометрії зсуву з похідними переміщень [6]

Головні деформації та інваріанти.

Аналогічно до тензора напружень, тензор деформацій має головні осі, в яких кутові деформації зникають. У головних осях:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

де $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ – головні деформації.

Головні деформації знаходяться як корні характеристичного рівняння:

$$\varepsilon^3 - J_1 \varepsilon^2 + J_2 \varepsilon - J_3 = 0,$$

де J_1, J_2, J_3 – інваріанти тензора деформацій:

$$J_1 = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$J_2 = \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xx} - \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \quad (1.10)$$

$$J_3 = \det(\varepsilon_{ij})$$

Перший інваріант J_1 має особливий фізичний зміст: він характеризує відносну зміну об'єму:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx J_1 = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

Для нестисливих матеріалів (пластичне деформування металів) $J_1 = 0$, що відповідає умові збереження об'єму [7, с. 89].

Девіатор деформацій.

Тензор деформацій розкладається на сферичну та девіаторну частини:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 \delta_{ij} + e_{ij},$$

де $\varepsilon_0 = J_1/3$ – середня лінійна деформація (об'ємна деформація), e_{ij} – девіатор деформацій (компоненти формозміни):

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} - \varepsilon_0 & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} - \varepsilon_0 & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_{zz} - \varepsilon_0 \end{pmatrix}.$$

Девіатор деформацій характеризує зміну форми без зміни об'єму. При пластичному деформуванні металів саме девіатор визначає розвиток пластичних деформацій, оскільки гідростатичний тиск (сферична частина) не викликає пластичного потоку [8, с. 201].

Умови сумісності деформацій.

Компоненти тензора деформацій не є незалежними – вони пов'язані через переміщення. Це накладає обмеження на можливі поля деформацій, які називаються умовами сумісності (умовами де Saint-Venant).

					КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ	Арк.
						21
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

У випадку малих деформацій шість рівнянь сумісності мають вигляд [9, с. 112]:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

та аналогічні рівняння для інших компонент.

Ці рівняння гарантують, що поле деформацій відповідає деякому неперервному полю переміщень, тобто тіло не розпадається на частини та не утворює порожнин при деформуванні.

Таким чином, тензор деформацій є фундаментальною характеристикою зміни геометрії твердого тіла. Його зв'язок з переміщеннями через диференціальні співвідношення, а також умови сумісності забезпечують однозначний опис деформованого стану матеріалу, що необхідно для подальшого аналізу інваріантів та їх застосування в теорії пластичності.

1.4 Перетворення компонентів тензорів при зміні системи координат

Необхідність перетворення координат. При аналізі напружено-деформованого стану виникає необхідність розглядати фізичні величини в різних системах координат. Задача може мати природну симетрію, зручніше описувати граничні умови в певній системі, або потрібно знайти екстремальні значення компонентів (головні напруження/деформації) [1, с. 201].

Тензори напружень та деформацій є об'єктами, що не залежать від вибору системи координат – вони описують фізичну реальність. Однак їх компоненти змінюються при переході від однієї системи координат до іншої за певним математичним законом. Ця властивість є визначальною для тензорів і відрізняє їх від скалярів та векторів [2, с. 112].

Матриця напрямних косинусів.

					КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ	Арк.
						22
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

Розглянемо дві декартові системи координат: стару $Oxyz$ з базисними векторами e_1, e_2, e_3 та нову $Ox'y'z'$ з базисними векторами e'_1, e'_2, e'_3 . Нові осі утворюють зі старими кути, які характеризуються напрямними косинусами:

$$\alpha_{ij} = \cos(e'_i, e_j) = e'_i \cdot e_j.$$

Матриця напрямних косинусів має вигляд [3, с. 234]:

$$A = [\alpha_{ij}] = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix},$$

де, наприклад, $\alpha_{11} = \cos(x', x)$, $\alpha_{12} = \cos(x', y)$, $\alpha_{13} = \cos(x', z)$ – косинуси кутів між віссю Ox' та осями Ox, Oy, Oz відповідно (рис. 1.6).

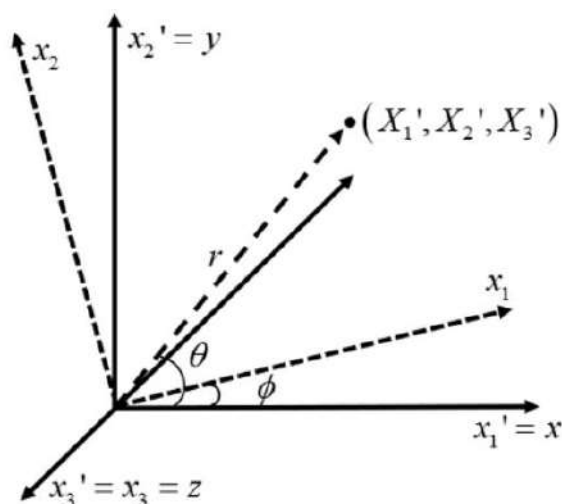


Рис. 1.6 – 3D схема повороту системи координат з кутами [5]

Матриця A є ортогональною, що означає виконання умов:

$$A \cdot A^T = A^T \cdot A = E$$

або в індексній формі:

$$\alpha_{ik} \alpha_{jk} = \delta_{ij}, \quad \alpha_{ki} \alpha_{kj} = \delta_{ij}.$$

					КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ	Арк.
						23
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

Ці умови виражають ортонормованість базисів: вектори e'_i утворюють праву трійку одиничних взаємно перпендикулярних векторів [4, с. 89].

Закон перетворення компонентів вектора.

Перед розглядом тензорів нагадаємо перетворення компонентів вектора.

Нехай вектор v має компоненти v_i в старій системі та v'_i в новій. Тоді:

$$v'_i = \alpha_{ij} v_j, \quad v_i = \alpha_{ji} v'_j.$$

Це лінійне перетворення, яке зберігає довжину вектора (інваріант):

$$v'_i v'_i = \alpha_{ij} \alpha_{ik} v_j v_k = \delta_{jk} v_j v_k = v_j v_j = v^2.$$

Закон перетворення компонентів тензора другого рангу.

Тензор другого рангу є лінійним оператором, що перетворює вектори. Нехай тензор T ставить у відповідність вектору u вектор $v = T \cdot u$. У новій системі координат цей зв'язок має зберігатися: $v' = T' \cdot u'$ [5, с. 167].

Використовуючи перетворення векторів:

$$v'_i = \alpha_{ik} v_k = \alpha_{ik} T_{kj} u_j = \alpha_{ik} T_{kj} \alpha_{mj} u'_m.$$

З іншого боку, $v'_i = T'_{im} u'_m$. Оскільки рівність виконується для довільного u' , отримуємо закон перетворення компонентів тензора:

$$T'_{ij} = \alpha_{ik} \alpha_{jl} T_{kl}$$

або у матричній формі: $T' = A \cdot T \cdot A^T$.

Обернене перетворення:

$$T_{ij} = \alpha_{ki} \alpha_{jl} T'_{kl}.$$

Цей закон є характерною ознакою тензора другого рангу: компоненти перетворюються за правилом подвійного лінійного перетворення (по одному індексу на кожну α) [6, с. 201].

					КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ	Арк.
						24
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

Перетворення тензора напружень.

Для тензора напружень σ_{ij} закон перетворення має вигляд:

$$\sigma_{ij}' = \alpha_{ik} \alpha_{jl} \sigma_{kl}.$$

У розгорнутій матричній формі:

$$\begin{pmatrix} \sigma'_x & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{yx} & \sigma'_y & \tau'_{yz} \\ \tau'_{zx} & \tau'_{zy} & \sigma'_z \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \cdot A^T$$

Розглянемо важливий частковий випадок – поворот навколо осі Oz на кут θ . Матриця напрямних косинусів:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Компоненти тензора напружень у новій системі [7, с. 112]:

$$\sigma'_x = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\sigma'_y = \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\tau'_{xy} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

Використовуючи тригонометричні тотожності:

$$\sigma'_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau'_{xy} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

Ці формули є основою кола Мора для графічного представлення перетворення компонентів напружень [8, с. 156].

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ</i>	Арк.
						25
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

Перетворення тензора деформацій.

Тензор деформацій ε_{ij} перетворюється за тим самим законом:

$$\varepsilon_{ij}' = \alpha_{ik} \alpha_{jl} \varepsilon_{kl}.$$

Для плоского стану деформацій ($\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$) при повороті на кут θ :

$$\varepsilon_x' = \varepsilon_x \cos^2 \theta + \varepsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\varepsilon_y' = \varepsilon_x \sin^2 \theta + \varepsilon_y \cos^2 \theta - \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\frac{1}{2} \gamma_{xy}' = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{2} \gamma_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

Звернімо увагу, що при перетворенні тензора деформацій кутова компонента входить як $\gamma/2$, що відповідає визначенню тензора ε_{ij} [9, с. 89].

Головні осі та інваріантність тензора.

Існує така орієнтація системи координат, при якій тензор набуває діагональної форми. Ці осі називаються головними, а відповідні компоненти – головними значеннями (головними напруженнями або головними деформаціями).

Головні значення знаходяться як корні характеристичного рівняння:

$$\det(T_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = 0.$$

Коефіцієнти цього рівняння є інваріантами тензора – величинами, що не змінюються при перетворенні координат:

$$I_1 = T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} (T_{ii} T_{jj} - T_{ij} T_{ij})$$

$$I_3 = \det(T_{ij})$$

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ</i>	Арк.
						26
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

Для тензора напружень:

- $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ – перший інваріант (тричі середнє гідростатичне напруження);
- I_2 – другий інваріант, пов’язаний з інтенсивністю напружень;
- I_3 – третій інваріант, визначник тензора [10, с. 234].

Інваріантність цих величин впливає безпосередньо з закону перетворення тензора. Наприклад, для першого інваріанту:

$$T_{ii}' = \alpha_{ik} \alpha_{il} T_{kl} = \delta_{kl} T_{kl} = T_{kk}.$$

Застосування до аналізу НДС при витягуванні.

Для сталі 08КП при операції глибокого витягування аналіз перетворення тензорів дозволяє визначити оптимальні напрямки координат для розрахунків. У зоні дна деталі переважає двовісне розтягування, і зручно обрати осі так, щоб вони збігалися з напрямками максимального та мінімального розтягу.

У зоні радіуса закруглення, де реалізується складний тривимірний НДС, перетворення тензорів дозволяє знайти головні напрямки та оцінити еквівалентні напруження за енергетичними критеріями пластичності.

Знання законів перетворення є необхідним для розуміння того, чому інваріанти тензорів мають фундаментальне значення в механіці матеріалів: вони описують об’єктивні характеристики напружено-деформованого стану, незалежні від суб’єктивного вибору системи відліку [11, с. 167].

Таким чином, перетворення компонентів тензорів при зміні системи координат є ключовим математичним апаратом, що забезпечує об’єктивність опису фізичних процесів деформування та створює основу для введення інваріантів тензорів напружень та деформацій.

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ</i>	Арк.
						27
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

РОЗДІЛ 2 ІНВАРІАНТИ ТЕНЗОРІВ НАПРУЖЕНЬ ТА ДЕФОРМАЦІЙ

2.1 Поняття інваріантності в механіці суцільного середовища

Фізична сутність інваріантності. Інваріантність (від лат. *invarians* – незмінний) є фундаментальною властивістю фізичних величин, яка відображає їх об'єктивний характер незалежно від способу опису. У механіці суцільного середовища інваріанти – це скалярні величини, що зберігають свої числові значення при будь-яких допустимих перетвореннях системи координат [1, с. 234].

На відміну від компонентів тензорів, які змінюються при переході від однієї системи координат до іншої, інваріанти характеризують внутрішні, суттєві властивості напружено-деформованого стану. Вони є «мовою», якою природа «говорить» про механічний стан матеріалу, не залежачи від суб'єктивного вибору спостерігача [2, с. 89].

Математичне визначення інваріантів тензора. Розглянемо тензор другого рангу T_{ij} . Його інваріанти визначаються як коефіцієнти характеристичного рівняння:

$$\det(T_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = -\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3 = 0,$$

де λ – власні значення (головні значення тензора), а I_1 , I_2 , I_3 – інваріанти першого, другого та третього ступенів відповідно.

Розкриваючи визначник, отримуємо явні вирази для інваріантів [3, с. 167]:

— перший інваріант (лінійний): $I_1 = T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$;

— другий інваріант (квадратичний):

$$I_2 = \frac{1}{2}(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ij}) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 ;$$

					КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ	Арк.
						28
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

— третій інваріант (кубічний): $I_3 = \det(T_{ij}) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$.

Ці величини не змінюються при будь-яких ортогональних перетвореннях координат, що випливає з властивостей власних значень матриці та її характеристичного многочлена [4, с. 201].

Геометрична інтерпретація інваріантів. Інваріанти мають яскраву геометричну інтерпретацію (рис. 2.1). Для тензора деформацій ε_{ij} :

— $I_1(\varepsilon) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ характеризує відносну зміну об'єму:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx I_1 ;$$

— $I_2(\varepsilon)$ пов'язаний зі зміною форми без зміни об'єму;

— $I_3(\varepsilon) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$ визначає зміну щільності речовини;

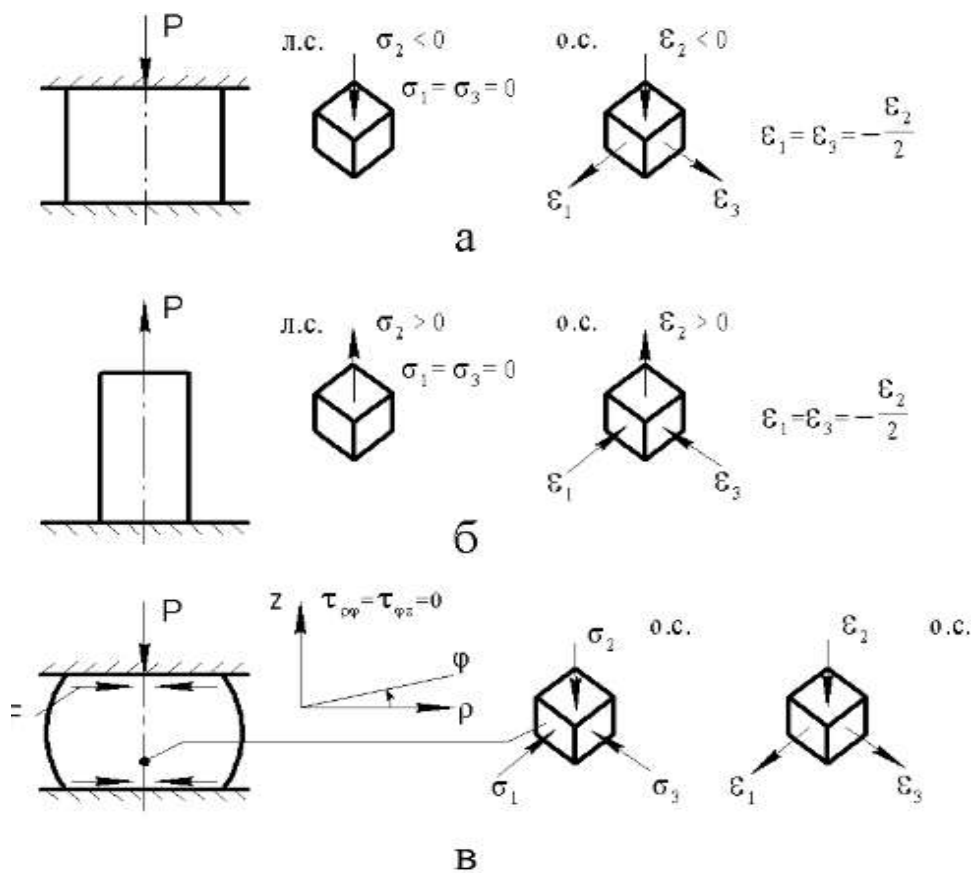


Рис. 2.1 – Різні схеми напруженого стану з позначенням головних напружень
Інваріанти та фізичні закони

Для тензора напружень σ_{ij} :

- $I_1(\sigma) = 3\sigma_0$ – потроєне середнє гідростатичне напруження, що визначає об’ємну зміну пружного тіла за законом Гука;
- $I_2(\sigma)$ тісно пов’язаний з інтенсивністю напружень та енергією формозміни;
- $I_3(\sigma)$ визначає енергію об’ємної деформації [5, с. 112]

Фундаментальні фізичні закони механіки суцільного середовища формулюються саме через інваріанти, що гарантує їх об’єктивність:

- закон Гука для ізотропного тіла: $\sigma_{ij} = \lambda I_1(\epsilon) \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$;
- критерії пластичності (Мізеса, Треска): $f(I_2(s_{ij})) = k^2$;
- критерії міцності: $F(I_1, I_2, I_3) = 0$.

Використання інваріантів у цих законах гарантує, що критерій текучості або руйнування матеріалу не залежить від орієнтації зразка відносно системи навантаження [6, с. 156].

Інваріанти девіатора.

Особливе значення мають інваріанти девіатора тензора – частини, що характеризує відхилення від сферичного (кульового) стану (рис. 2.3).

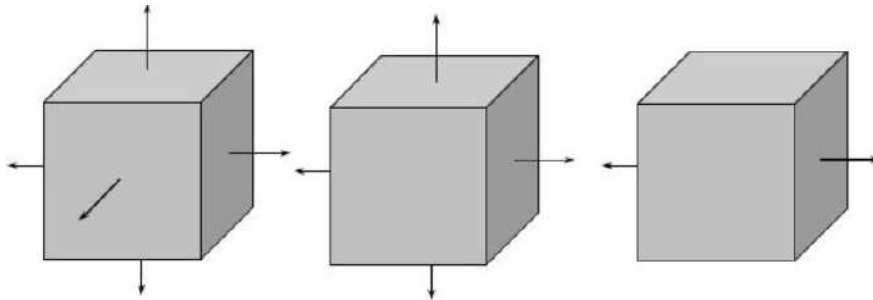


Рис. 2.3 – Розклад тензора напружень на сферичну частину (гідростатичний тиск) та девіатор (формозміну)

Для девіатора напружень $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}$:

$$J_1 = s_{ii} = 0;$$

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] ;$$

$$J_3 = \det(s_{ij}).$$

Другий інваріант девіатора J_2 має фундаментальне значення в теорії пластичності. Саме він входить у критерій Мізеса:

$$\sqrt{3J_2} = \sigma_s$$

де σ_s – межа текучості матеріалу при одноосьовому розтягуванні [7, с. 89].

Застосування до аналізу сталі 08КП.

Для сталі 08КП при операції глибокого витягування аналіз інваріантів дозволяє:

— контролювати об'ємну зміну: $I_1(\epsilon) \approx 0$ (пластичність без зміни об'єму);

— оцінювати інтенсивність деформацій:

$$\epsilon_i = \sqrt{\frac{2}{3} J_2(\epsilon_{ij})} ;$$

— визначати умови пластичності:

$$\sigma_i = \sqrt{3J_2(\sigma_{ij})} \leq \sigma_s ;$$

— аналізувати анізотропію: різниця інваріантів у різних напрямках свідчить про текстуру матеріалу.

Наприклад, у зоні дна витяжної деталі зі сталі 08КП реалізується двовісне розтягування з $\sigma_1 = \sigma_2$, $\sigma_3 = 0$. Тоді:

$$J_2 = \frac{1}{3} \sigma_1^2, \quad \sigma_i = \sigma_1$$

Це означає, що еквівалентне напруження дорівнює головному напруженню, що спрощує контроль процесу деформування [8, с. 201].

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ</i>	Арк.
						31
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

Інваріанти та чисельні методи. У сучасних чисельних методах (метод скінченних елементів) інваріанти тензорів обчислюються на кожному кроці інтегрування для:

- перевірки виконання умов пластичності;
- обчислення еквівалентних напружень та деформацій;
- аналізу пошкоджуваності матеріалу.

Використання інваріантів гарантує, що результати розрахунків не залежать від орієнтації скінченних елементів у сітці, що є критичним для достовірності моделювання [9, с. 234].

Таким чином, поняття інваріантності є ключовим у механіці суцільного середовища, забезпечуючи об'єктивний опис фізичних процесів та створюючи математичний апарат для формулювання фундаментальних законів поведінки матеріалів, зокрема конструкційних сталей при операціях пластичного формоутворення.

2.2. Інваріанти тензора напружень: лінійний, квадратичний, кубічний

Тензор напружень σ_{ij} , як і будь-який симетричний тензор другого рангу, має три незалежні інваріанти, які повністю характеризують його як фізичний об'єкт незалежно від системи координат. Ці інваріанти позначаються I_1 , I_2 , I_3 і називаються відповідно лінійним, квадратичним та кубічним інваріантами [1, с. 234].

Інваріанти можна визначити двома способами: через компоненти тензора в довільній системі координат або через його головні значення. Обидва підходи дають однаковий результат, що підтверджує інваріантність цих величин.

Лінійний інваріант I_1 .

Перший інваріант (лінійний) визначається як слід тензора:

					КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ	Арк.
						32
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

$$I_1 = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z.$$

У головних осях:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3.$$

Фізичний зміст: I_1 дорівнює потрібному середньому гідростатичному напруженню (омніному напруженню):

$$\sigma_0 = \frac{I_1}{3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}.$$

Гідростатичне напруження викликає об'ємну зміну пружного тіла. Згідно з узагальненим законом Гука:

$$\varepsilon_0 = K \sigma_0 = 9KI_1,$$

де K – модуль об'ємного стиснення, $K = E/[3(1-2\nu)]$ [2, с. 167].

Для сталі 08КП ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,3$): $K \approx 1,67 \cdot 10^5$ МПа. При гідростатичному тиску 100 МПа об'ємна деформація становить $\varepsilon_0 = 100/(3 \cdot 1,67 \cdot 10^5) \approx 2 \cdot 10^{-4}$, що відповідає відносній зміні об'єму 0,02%.

Властивості I_1 :

- при чистому зсуві ($\sigma_1 = -\sigma_3$, $\sigma_2 = 0$): $I_1 = 0$;
- при одноосьовому розтягуванні: $I_1 = \sigma_1$;
- при гідростатичному стиску: $I_1 = 3\sigma_0 = -3p$ (p – тиск).

Квадратичний інваріант I_2 .

Другий інваріант (квадратичний) визначається як:

$$I_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - \sigma_{ij}\sigma_{ij}) = \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2.$$

У головних осях:

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1.$$

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ</i>	Арк.
						33
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

Фізичний зміст: I_2 характеризує інтенсивність напруженого стану та пов'язаний з енергією формозміни. Однак більш показовим є другий інваріант девіатора J_2 , який безпосередньо входить у критерії пластичності [3, с. 201].

Зв'язок між I_2 та J_2 :

$$J_2 = \frac{1}{3}I_1^2 - I_2 = \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

Еквівалентне напруження за Мізесом виражається через J_2 :

$$\sigma_i = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

Для плоского напруженого стану ($\sigma_3 = 0$):

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}$$

Приклад для сталі 08КП: У зоні дна витяжної деталі $\sigma_1 = \sigma_2 = 200$ МПа, $\sigma_3 = 0$. Тоді:

$$J_2 = \frac{1}{6}[(0)^2 + (200)^2 + (-200)^2] = \frac{80000}{6} \approx 13333 \text{ МПа}^2;$$

$$\sigma_i = \sqrt{3 \cdot 13333} \approx 200 \text{ МПа}$$

Це означає, що матеріал знаходиться на межі текучості ($\sigma_s \approx 200$ МПа для сталі 08КП), що вимагає контролю процесу [4, с. 112].

Кубічний інваріант I_3 .

Третій інваріант (кубічний) визначається як визначник тензора:

$$I_3 = \det(\sigma_{ij}) = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

У головних осях:

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

					КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ	Арк.
						34
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

Фізичний зміст: I_3 характеризує об'ємну енергію деформації та визначає тип напруженого стану. Він входить у критерії пластичності, що враховують відмінність поведінки матеріалу при розтягуванні та стисненні (наприклад, критерій Друкера-Прагера) [5, с. 89].

Третій інваріант девіатора:

$$J_3 = \det(s_{ij}) = \frac{1}{27}(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)(2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1)(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)$$

J_3 пов'язаний з видом напруженого стану, що характеризується кутом Лоде:

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{J_3}{J_2^{3/2}}$$

Кут θ визначає положення точки на поверхні текучості в просторі головних напружень [6, с. 156].

Розглянемо основні типи НДС та відповідні інваріанти (табл. 2.1)

Табл.2.1 – Інваріанти та вид напруженого стану

Тип НДС	σ_1	σ_2	σ_3	I_1	I_2	I_3	Приклад
Одноосьове розтягування	σ	0	0	σ	0	0	Розтяг стержня
Одноосьове стиснення	0	0	$-\sigma$	$-\sigma$	0	0	Стиснення стержня
Двовісне розтягування	σ	σ	0	2σ	σ^2	0	Зона дна при витягуванні
Плоский зсув	σ	0	$-\sigma$	0	$-\sigma^2$	0	Кручення
Гідростатичний тиск	$-p$	$-p$	$-p$	$-3p$	$3p^2$	$-p^3$	Глибоко під водою

Для сталі 08КП при глибокому витягуванні в різних зонах деталі реалізуються різні комбінації інваріантів:

— зона дна: $I_1 = 2\sigma$, $I_2 = \sigma^2$, $I_3 = 0$ (двовісне розтягування);

— зона стінки: $I_1 = \sigma$, $I_2 = 0$, $I_3 = 0$ (близько до одноосьового розтягування);

— зона радіуса: складний НДС з усіма ненульовими інваріантами [7, с. 234].

Обчислення інваріантів у практичних задачах.

Для обчислення інваріантів у точці деталі необхідно:

— визначити компоненти тензора напружень σ_{ij} (аналітично або чисельно);

— обчислити $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$;

— обчислити $I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$;

— обчислити $I_3 = \det(\sigma_{ij})$;

— за необхідності перейти до інваріантів девіатора J_2, J_3 .

Перевірка: головні напруження мають задовольняти характеристичне рівняння:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0.$$

Для плоского напруженого стану ($\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$) обчислення спрощуються:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y, \quad I_2 = \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2, \quad I_3 = 0;$$

$$J_2 = \frac{1}{6}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 3\tau_{xy}^2] + \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y)^2 - (\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2) = \frac{1}{6}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 3\tau_{xy}^2];$$

$$\sigma_i = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 3\tau_{xy}^2}.$$

Ця формула широко використовується в інженерних розрахунках при оцінці міцності конструкцій [8, с. 201].

Зв'язок інваріантів з енергією деформації.

Повна енергія пружної деформації на одиницю об'єму:

$$U = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2E}[I_1^2(1 + \nu) - 2I_2(1 + \nu)]$$

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ</i>	Арк.
						36
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

або через інваріанти девіатора:

$$U = \frac{I_1^2}{18K} + \frac{J_2}{2G},$$

де G – модуль зсуву, $G = E/[2(1+\nu)]$.

Перший доданок відповідає об'ємній зміні, другий – формозміні. При пластичному деформуванні сталі 08КП об'ємна частина енергії не витрачається на пластичний потік, а накопичується у вигляді потенціальної енергії гідростатичного стиску [9, с. 112].

Таким чином, інваріанти тензора напружень I_1, I_2, I_3 (та відповідні J_2, J_3 девіатора) є фундаментальними характеристиками напруженого стану, що дозволяють об'єктивно оцінити інтенсивність навантаження, тип деформування та застосувати відповідні критерії міцності та пластичності при аналізі процесів обробки металів тиском.

2.3 Фізичний зміст інваріантів напружень: середній тиск, інтенсивність напружень

Перший інваріант тензора напружень $I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ має найбільш наочний фізичний зміст. Він пропорційний середньому гідростатичному напруженню (омніному напруженню), яке визначається як:

$$\sigma_0 = \frac{I_1}{3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}.$$

Середнє напруження σ_0 характеризує об'ємну частину напруженого стану – ту компоненту, яка викликає зміну об'єму тіла без зміни його форми [1, с. 234].

У гідростатиці тиск p визначається як $p = -\sigma_0$ (знак мінус відображає те, що тиск є стисливим напруженням). Для глибоко зануреного тіла в рідину $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$, тому $I_1 = -3p$, а $\sigma_0 = -p$.

					КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ	Арк.
						37
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

Для прикладних матеріалів, зокрема металів, середній тиск має особливу властивість: він не викликає пластичних деформацій. Це експериментально встановлений факт, відомий як принцип гідростатичного тиску [2, с. 167]. При чистому гідростатичному навантаженні ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$) метал залишається пружним навіть при дуже високих тисках (порядку кількох ГПа), доки не настане фазовий перехід.

Для сталі 08КП це означає, що при глибокому витягуванні об'ємна зміна матеріалу є пружною і зникає після зняття навантаження. Пластична деформація відбувається лише за рахунок девіаторної частини напружень.

Модуль об'ємного стиснення K пов'язує середнє напруження з об'ємною деформацією:

$$\sigma_0 = K \cdot \varepsilon_v,$$

де $\varepsilon_v = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = I_1(\varepsilon)$.

Для сталі 08КП: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,3$, отже:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \frac{2 \cdot 10^5}{3(1-0,6)} \approx 1,67 \cdot 10^5 \text{ МПа}$$

При $\sigma_0 = 100$ МПа об'ємна деформація $\varepsilon_v = 100 / (1,67 \cdot 10^5) \approx 6 \cdot 10^{-4}$, що відповідає відносній зміні об'єму 0,06% [3, с. 201].

Другий інваріант девіатора J_2 є ключовою величиною в теорії пластичності. Він визначається як:

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

або через компоненти в довільній системі координат:

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2$$

Інтенсивність напружень (еквівалентне напруження за Мізесом) визначається через J_2 :

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ</i>	Арк.
						38
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

$$\sigma_i = \sqrt{3J_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

Фізичний зміст σ_i : це таке одноосьове напруження, яке створює ту саму інтенсивність формозміни, що й даний складний напружений стан [4, с. 112].

Енергетична інтерпретація: J_2 пропорційний питомій енергії формозміни:

$$U_f = \frac{J_2}{2G},$$

де G – модуль зсуву. Це та частка енергії деформації, яка витрачається на зміну форми тіла (без зміни об'єму) і яка визначає розвиток пластичних деформацій.

Для сталі 08КП при одноосьовому розтягуванні до межі текучості $\sigma_s = 200$ МПа:

$$J_2 = \frac{\sigma_s^2}{3} = \frac{40000}{3} \approx 13333 \text{ МПа}^2,$$

$$\sigma_i = \sigma_s = 200 \text{ МПа.}$$

У зоні дна при витягуванні ($\sigma_1 = \sigma_2 = 200$ МПа, $\sigma_3 = 0$):

$$J_2 = \frac{1}{6}[0 + 40000 + 40000] = 13333 \text{ МПа}^2;$$

$$\sigma_i = \sqrt{3 \cdot 13333} = 200 \text{ МПа}.$$

Таким чином, незважаючи на різний характер НДС (одноосьовий розтяг vs двовісний розтяг), інтенсивність напружень однакова, і матеріал знаходиться на однаковій стадії деформування [5, с. 89].

Критерій пластичності Мізеса.

На основі інваріанта J_2 сформульований енергетичний критерій пластичності (критерій Мізеса):

$$\sigma_i = \sqrt{3J_2} \leq \sigma_s$$

або

$$J_2 \leq \frac{\sigma_s^2}{3} = k^2,$$

					КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ	Арк.
						39
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

де $k = \sigma_s/\sqrt{3}$ – постійна текучості при чистому зсуві.

У просторі головних напружень цей критерій відповідає циліндру Мізеса з віссю, що збігається з лінією $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ (гідростатична вісь). Радіус циліндра в площині, перпендикулярній до цієї осі, дорівнює $\sqrt{(2/3)}\sigma_s$ (рис. 2.2)[6, с. 234].

Геометрична інтерпретація: проекція вектора напруження на площину, перпендикулярну до гідростатичної осі, визначається девіатором s_{ij} . Довжина цієї проекції дорівнює $\sqrt{(2J_2)}$. Коли вона досягає критичного значення $\sqrt{(2/3)}\sigma_s$, настає пластичний потік.

Інтенсивність деформацій.

Аналогічно до напружень, вводиться інтенсивність деформацій:

$$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{2}{3}e_{ij}e_{ij}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}$$

де e_{ij} – компоненти девіатора деформацій.

При пластичному деформуванні металів виконується умова нестисливості:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$$

тому $\varepsilon_3 = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$, і інтенсивність деформацій спрощується:

$$\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2}$$

Для сталі 08КП при глибокому витягуванні типові значення ε_i досягають 0,5–1,0 (50–100%). При цьому закон зміцнення матеріалу описується залежністю (рис. 2.4):

$$\sigma_i = f(\varepsilon_i),$$

яка визначається з одноосьового випробування на розтяг [7, с. 156].

До прикладу в [7] (рис. 2.5) наведено криві «істинне напруження – істинна деформація» (σ_i (ε_i)) для сталі EN08 (аналог 08КП) при різних температурах.

					КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ	Арк.
						40
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

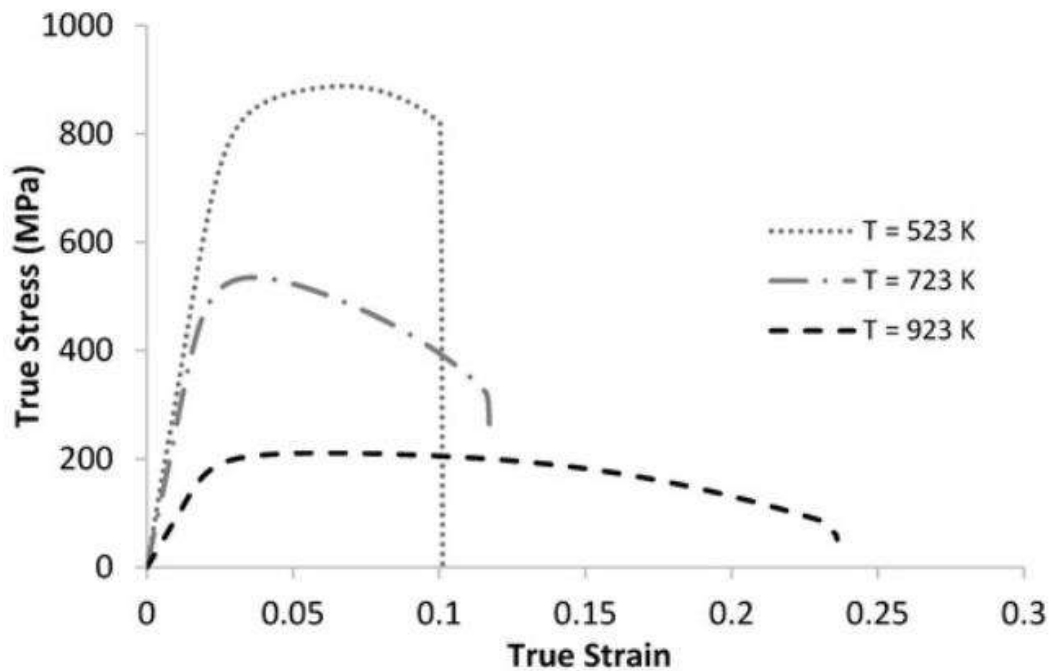


Рис. 2.4 – Криві $(\sigma_i(\epsilon_i))$ для сталі EN08 при різних температурах [7]

Сталь EN08 (рис. 2.4) є близьким аналогом сталі 08КП за хімічним складом та механічними властивостями (низьковуглецева якісна сталь). Крива при кімнатній температурі ($T = 323 \text{ K} \approx 20^\circ\text{C}$) відповідає умовам цієї роботи.

Практичне застосування. У технології обробки металів тиском інваріанти використовуються для:

Визначення зусиль деформування – через σ_i та закон зміцнення;

- оцінки ресурсу пластичності – за накопиченою інтенсивністю деформацій;
- оптимізації технологічних параметрів – мінімізація σ_i для зниження зусиль;
- прогнозування дефектів – контроль рівня J_2 для уникнення розривів.

Для сталі 08КП при витягуванні циліндричної деталі розрахунок σ_i в різних зонах дозволяє визначити критичну зону (зазвичай зона переходу від дна до стінки), де σ_i максимальне і де найімовірніше виникнення розриву [8, с. 201].

Таким чином, інваріанти тензора напружень I_1 та J_2 (або відповідні σ_0 та σ_i) є фундаментальними характеристиками, що дозволяють розділити напружений стан на об'ємну та формозмінну частини, сформулювати критерії пластичності та провести інженерний аналіз процесів обробки металів тиском.

2.4. Інваріанти тензора деформацій та їх геометрична інтерпретація

Визначення інваріантів тензора деформацій. Тензор деформацій ε_{ij} , як і будь-який симетричний тензор другого рангу, має три незалежні інваріанти, які позначаються J_1, J_2, J_3 (або $I_1(\varepsilon), I_2(\varepsilon), I_3(\varepsilon)$). Ці інваріанти повністю характеризують деформований стан матеріалу незалежно від вибору системи координат [1, с. 234].

Лінійний інваріант визначається як слід тензора:

$$J_1 = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Квадратичний інваріант:

$$J_2 = \frac{1}{2}(J_1^2 - \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xx} - \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2).$$

Кубічний інваріант – визначник тензора:

$$J_3 = \det(\varepsilon_{ij}).$$

У головних осях, де $\varepsilon_{ij} = \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, ці вирази спрощуються:

$$J_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3;$$

$$J_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1;$$

$$J_3 = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3.$$

					КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ	Арк.
						42
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

Геометричний зміст першого інваріанта. Перший інваріант J_1 має найбільш наочну геометричну інтерпретацію. Розглянемо елементарний паралелепіпед з початковими розмірами dx , dy , dz . Після деформування його розміри стають:

$$dx' = dx(1 + \varepsilon_{xx}), \quad dy' = dy(1 + \varepsilon_{yy}), \quad dz' = dz(1 + \varepsilon_{zz}).$$

Об'єм після деформування:

$$dV' = dx' \cdot dy' \cdot dz' = dV(1 + \varepsilon_{xx})(1 + \varepsilon_{yy})(1 + \varepsilon_{zz}).$$

Для малих деформацій, пренебрегаючи квадратичними членами:

$$dV' \approx dV(1 + \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) = dV(1 + J_1).$$

Отже, відносна зміна об'єму дорівнює [2, с. 167]:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{dV' - dV}{dV} = J_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Для металів при пластичному деформуванні виконується умова нестисливості: $J_1 = 0$. Це означає, що пластична деформація відбувається без зміни об'єму, лише за рахунок зміни форми. Для сталі 08КП при глибокому витягуванні ця умова дозволяє спростити розрахунки, оскільки $\varepsilon_3 = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ [3, с. 201].

Приклад: при витягуванні листа зі сталі 08КП у зоні стінки $\varepsilon_1 = 0,3$ (окружне розтягування), $\varepsilon_2 = -0,15$ (стиснення по товщині), тоді $\varepsilon_3 = -0,15$ (радіальне стиснення). Перевірка: $J_1 = 0,3 - 0,15 - 0,15 = 0$.

Інваріанти девіатора деформацій. Як і для напружень, тензор деформацій розкладається на сферичну та девіаторну частини:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 \delta_{ij} + e_{ij},$$

де $\varepsilon_0 = J_1/3$ – середня лінійна деформація, e_{ij} – девіатор деформацій.

Інваріанти девіатора:

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ</i>	Арк.
						43
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

$$j_1 = e_{ii} = 0;$$

$$j_2 = \frac{1}{2} e_{ij} e_{ij} = \frac{1}{6} [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2];$$

$$j_3 = \det(e_{ij}).$$

Другий інваріант девіатора j_2 є ключовою величиною, що характеризує інтенсивність деформацій [4, с. 112]:

$$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{2}{3} j_2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}$$

При умові нестисливості ($J_1 = 0, \varepsilon_3 = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2$):

$$\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2}$$

Геометрична інтерпретація інтенсивності деформацій. Інтенсивність деформацій ε_i має наступну геометричну інтерпретацію: це така одноосьова деформація, яка створює ту саму роботу формозміни, що й даний складний деформований стан.

У просторі головних деформацій ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$) поверхня постійної інтенсивності $\varepsilon_i = \text{const}$ представляє собою циліндр, вісь якого збігається з лінією $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$ (об'ємні деформації), а радіус пропорційний ε_i [5, с. 89].

Проекція на площину, перпендикулярну до цієї осі (площина девіатора), дає коло радіусом $\sqrt{(3/2)\varepsilon_i}$. Це означає, що всі комбінації головних деформацій з однаковою інтенсивністю лежать на циліндричній поверхні.

Третій інваріант та вид деформування. Третій інваріант девіатора j_3 характеризує вид деформування (тип напруженого стану). Він пов'язаний з кутом Лоде для деформацій:

$$\cos 3\theta_\varepsilon = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{j_3}{j_2^{3/2}}$$

					КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ	Арк.
						44
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

Кут θ_ε визначає положення точки в просторі деформацій відносно осей головних деформацій [6, с. 156]:

— $\theta_\varepsilon = 0^\circ$: одноосьове розтягування ($\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\varepsilon_1/2$);

— $\theta_\varepsilon = 30^\circ$: плоский зсув ($\varepsilon_2 = 0, \varepsilon_3 = -\varepsilon_1$);

— $\theta_\varepsilon = 60^\circ$: одноосьове стиснення.

Для сталі 08КП при витягуванні в різних зонах реалізуються різні види деформування:

— зона дна: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 > 0, \varepsilon_3 = -2\varepsilon_1$ ($\theta_\varepsilon = 0^\circ$, двовісне розтягування);

— зона стінки: $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\varepsilon_1/2$ ($\theta_\varepsilon \approx 30^\circ$, близько до одноосьового розтягування);

— зона радіуса: складний перехідний стан.

Зв'язок з тензором напружень. Закон Гука для ізотропного тіла у формі Ламе:

$$\sigma_{ij} = \lambda J_1 \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

або через дівіатори:

$$s_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad \sigma_0 = 3K \varepsilon_0.$$

Це означає, що дівіатори напружень та деформацій пропорційні, а сферичні частини також пропорційні з різними коефіцієнтами [7, с. 234].

Для пластичного деформування (сталь 08КП при витягуванні) справедливий закон пластичного потоку:

$$de_{ij} = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_i}{\sigma_i} s_{ij}$$

Це означає, що приріст дівіатора деформацій співнапрямлений з дівіатором напружень (асоційований закон пластичності).

Практичне застосування. Інваріанти тензора деформацій використовуються для:

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ</i>	Арк.
						45
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

- контролю об'ємної зміни: перевірка $J_1 \approx 0$ для пластичності металів;
- визначення інтенсивності деформацій: розрахунок ε_i для оцінки ступеня деформування;
- аналізу виду деформування: визначення j_3/j_2 для класифікації НДС;
- розрахунку зусиль: через закон зміцнення $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$.

Для сталі 08КП при глибокому витягуванні типові значення інтенсивності деформацій досягають $\varepsilon_i = 0,5-1,0$. Закон зміцнення описується залежністю:

$$\sigma_i = A \cdot \varepsilon_i^n,$$

де $A \approx 400-500$ МПа, $n \approx 0,2-0,25$ (коефіцієнт зміцнення) [8, с. 201].

Таким чином, інваріанти тензора деформацій J_1, J_2, J_3 (та відповідні j_2, j_3 девіатора) є фундаментальними характеристиками, що дозволяють розділити деформацію на об'ємну та формозмінну частини, визначити інтенсивність та вид деформування, що критично для аналізу процесів пластичного формоутворення.

2.5. Інваріанти девіаторів напружень та деформацій

При аналізі пластичного деформування металів виявляється, що гідростатичний тиск (сферична частина тензора напружень) практично не впливає на розвиток пластичних деформацій. Це експериментально підтверджений факт: матеріали можуть витримувати надвисокі гідростатичні тиски (порядку ГПа) без пластичного потоку, тоді як відносно невеликі девіаторні напруження викликають значні пластичні деформації [1, с. 234].

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ</i>	Арк.
						46
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

Тому в теорії пластичності фундаментальне значення мають саме девіатори тензорів напружень та деформацій – частини, що характеризують відхилення від сферичного (кульового) стану.

Визначення девіаторів.

Девіатор напружень визначається як:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{I_1}{3} \delta_{ij}$$

У головних осях:

$$s_1 = \sigma_1 - \sigma_0 = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3}$$

$$s_2 = \sigma_2 - \sigma_0 = \frac{2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1}{3}$$

$$s_3 = \sigma_3 - \sigma_0 = \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{3}$$

Девіатор деформацій:

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_0 \delta_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{J_1}{3} \delta_{ij}$$

Для пластичного деформування металів $J_1 = 0$ (нестисливість), тому $e_{ij} = \varepsilon_{ij}$ [2, с. 167].

Інваріанти девіатора напружень.

Перший інваріант (за визначенням):

$$J_1(s) = s_{ii} = 0.$$

Другий інваріант (найважливіший):

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

Третій інваріант:

$$J_3 = \det(s_{ij}) = \frac{1}{27} (2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)(2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1)(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)$$

Інваріант J_2 прямо пов'язаний з інтенсивністю напружень:

$$\sigma_i = \sqrt{3J_2}$$

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ</i>	Арк.
						47
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

а J_3 визначає вид напруженого стану через кут Лоде [3, с. 201]:

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}}$$

Інваріанти девіатора деформацій:

$$j_1 = e_{ii} = 0;$$

$$j_2 = \frac{1}{2} e_{ij} e_{ij} = \frac{1}{6} [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2];$$

$$j_3 = \det(e_{ij}).$$

Інтенсивність деформацій:

$$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{2}{3} j_2}$$

При пластичності з $J_1 = 0$:

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}$$

Зв'язок інваріантів девіаторів.

Для пружного деформування (закон Гука):

$$J_2 = 4G^2 j_2, \quad \sigma_i = 3G\varepsilon_i.$$

Для пластичного деформування (теорія пластичності):

$$k^2 J_2 = 1 \text{ (критерій Мізеса),}$$

де $k = \sigma_s / \sqrt{3}$ – стала текучості при чистому зсуві [4, с. 112].

Для сталі 08КП при глибокому витягуванні аналіз інваріантів девіаторів дозволяє:

— визначити еквівалентні напруження $\sigma_i = \sqrt{3J_2}$ та порівняти з межею текучості $\sigma_s \approx 200$ МПа;

— розрахувати інтенсивність деформацій $\varepsilon_i = \sqrt{2j_2/3}$ для оцінки ступеня деформування;

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ</i>	Арк.
						48
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

— визначити вид деформування через J_3/J_2 для прогнозування дефектів.

У зоні дна ($\sigma_1 = \sigma_2 = 200$ МПа, $\sigma_3 = 0$):

$$J_2 = \frac{1}{6}[0 + 40000 + 40000] = 13333 \text{ МПа}^2; \quad \sigma_i = \sqrt{3 \cdot 13333} = 200 \text{ МПа} = \sigma_s.$$

Матеріал знаходиться на межі текучості, що вимагає контролю процесу [5, с. 89].

Таким чином, інваріанти девіаторів J_2 , J_3 та j_2 , j_3 є ключовими величинами в теорії пластичності, що дозволяють сформулювати критерії текучості та описати розвиток пластичних деформацій при обробці металів тиском.

2.6. Зв'язок між інваріантами напружень та деформацій для ізотропних матеріалів

Для ізотропних матеріалів, до яких належить сталь 08КП, механічні властивості однакові в усіх напрямках. Це дозволяє встановити однозначний зв'язок між інваріантами тензорів напружень та деформацій через константи матеріалу [1, с. 234].

Зв'язок між інваріантами для пружного деформування. Закон Гука у формі Ламе:

$$\sigma_{ij} = \lambda J_1 \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij},$$

де λ та μ – константи Ламе, пов'язані з модулем Юнга E та коефіцієнтом Пуассона ν :

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

Зв'язок інваріантів:

Перші інваріанти (об'ємна зміна):

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ</i>	Арк.
						49
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

$$J_1 = 3K I_1 \text{ або } I_1 = 3K \cdot J_1,$$

де $K = E/[3(1-2\nu)]$ – модуль об'ємного стиснення.

Девіаторні інваріанти (формозміна):

$$J_2(\sigma) = 4G^2 \cdot j_2(\varepsilon), \quad \sigma_i = 3G \cdot \varepsilon_i.$$

Для сталі 08КП ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,3$): $G \approx 7,7 \cdot 10^4$ МПа, $K \approx 1,67 \cdot 10^5$ МПа [2, с. 167].

Зв'язок між інваріантами для пластичного деформування.

При пластичному деформуванні справедливий закон пластичного потоку:

$$de_{ij} = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_i}{\sigma_i} s_{ij}.$$

Це означає пропорційність девіаторів напружень та приростів деформацій:

$$\frac{s_{ij}}{\sigma_i} = \frac{2}{3} \frac{de_{ij}}{d\varepsilon_i}.$$

Критерій пластичності (Мізеса):

$$\sigma_i = \sqrt{3J_2} = \sigma_s \text{ або } J_2 = \frac{\sigma_s^2}{3}.$$

Закон зміцнення:

$$\sigma_i = A \cdot \varepsilon_i^n,$$

де для сталі 08КП: $A \approx 400\text{--}500$ МПа, $n \approx 0,2\text{--}0,25$ [3, с. 201].

Практичний висновок.

Для ізотропних матеріалів знання інваріантів одного тензора дозволяє однозначно визначити інваріанти іншого через механічні характеристики матеріалу. Це є основою для розрахунків процесів обробки металів тиском, зокрема глибокого витягування сталі 08КП [4, с. 89].

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ</i>	Арк.
						50
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

РОЗДІЛ 3 РОЗРАХУНКОВА ЧАСТИНА

3.1 Аналіз НДС при глибокому витягуванні листа зі сталі 08КП

3.1.1 Характеристика матеріалу та його властивості

Сталь 08КП (категорія ВГ – дуже глибоке витягування) є низьковуглецевою якісною сталлю з масовою часткою вуглецю не більше 0,08%, що забезпечує високу пластичність і відмінну здатність до холодного пластичного деформування. Ця сталь спеціально розроблена для виготовлення складно-профільних деталей методом глибокого витягування, зокрема корпусів побутової техніки, автомобільних панелей та інших виробів, що потребують значних ступенів деформації без руйнування.

Основні механічні характеристики сталі 08КП (за ДСТУ 2834/ГОСТ 16523) [32] наведено в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1 – Механічні властивості сталі 08КП

Параметр	Значення	Примітка
Тимчасовий опір розриву σ	270–370 МПа	Залежить від товщини листа
Межа текучості $\sigma_{0.2}$	≥ 235 МПа	Для товщини 0,5–2,5 мм
Відносне подовження δ	$\geq 40\%$	Забезпечує високу пластичність
Коефіцієнт зміцнення n	0,23–0,25	Високе значення сприяє стабільності деформування
Коефіцієнт анізотропії r	1,5–2,0	За різними джерелами
Модуль пружності E	200 ГПа	Типове значення для сталей
Коефіцієнт Пуассона ν	0,28–0,30	–

Високе значення коефіцієнта анізотропії r свідчить про сприятливий характер пластичної деформації при витягуванні: матеріал легко деформується в товщині, що запобігає передчасному руйнуванню в зонах інтенсивного розтягування.

3.1.2 Особливості напружено-деформованого стану при глибокому витягуванні

Глибоке витягування листового матеріалу є складним процесом комбінованого навантаження, при якому різні ділянки заготовки перебувають у різних умовах напруженого стану. Аналіз НДС показує, що процес супроводжується формуванням характерних зон з різко відмінними видами деформування (рис. 1.2).

Зона 1 – дно виробу перебуває в умовах плоского напруженого стану ($\sigma_1 \approx \sigma_2$, $\sigma_3 \approx 0$) (σ_1 – перше головне напруження (максимальне за величиною), σ_2 – друге головне напруження (середнє), σ_3 – третє головне напруження (мінімальне)) з незначними деформаціями розтягування. Напруження в цій зоні зазвичай не перевищують 50–80 МПа і зумовлені переважно тертям між заготовкою та пуансоном.

$\sigma_1 \approx \sigma_2$ – два головних напруження в площині листа приблизно рівні між собою. Це означає, що матеріал в дні однаково розтягнутий (або стиснутий) у двох взаємно перпендикулярних напрямках (наприклад, у меридіанальному та коловому).

$\sigma_3 \approx 0$ – третє головне напруження близьке до нуля. Це напруження, перпендикулярне до поверхні листа (в товщину). Воно дорівнює нулю, бо на зовнішню і внутрішню поверхні дна не діє значне зовнішнє навантаження (немає тиску пуансона чи матриці).

Плоский напружений стан – це коли один з трьох головних напружень дорівнює нулю (або набагато менший за два інших), а деформації можуть бути в усіх трьох напрямках.

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ</i>	Арк.
						52
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

Зона 2 – радіус пуансона є найбільш небезпечною з точки зору руйнування. Тут реалізується двовісний розтяг ($\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $\sigma_3 \approx 0$) з інтенсивними деформаціями потоншення. Товщина матеріалу в цій зоні може зменшуватися на 15–25% від початкової, а головні напруження досягають 0,8–0,9 σ . Уточнення: σ_1 – напруження в меридіанальному напрямку (тягне за пуансон), σ_2 – у коловому (розтяг через кривизну).

Зона 3 – стінка виробу характеризується одноосьовим розтягом у напрямку висоти виробу (напруження $\sigma_1 > 0$) та стисненням у коловому напрямку (деформація $\varepsilon_2 < 0$, напруження $\sigma_2 \approx 0$). Товщина матеріалу зменшується (деформація потоншення $\varepsilon_3 < 0$, а напруження $\sigma_3 \approx 0$).

Стан напружень: $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 \approx 0$, $\sigma_3 \approx 0$ (плоский напружений стан).

Це так званий стан «протяжки», при якому матеріал витягується між радіусом пуансона та радіусом матриці.

Зона 4 – радіус матриці є другою критичною зоною, де відбувається згинання-розгинання з одночасним розтягом. Комбінація згинальних та мембранних напружень може призводити до локального потоншення та утворення шийки.

Зона 5 – фланець заготовки перебуває в умовах плоского стиснення ($\sigma_1 < 0$, $\sigma_2 < 0$, $\sigma_3 \approx 0$) з інтенсивним окружним стисненням та менш вираженим радіальним стисненням (біля радіуса матриці можливий перехід до розтягу). Внаслідок пластичної нестискальності матеріалу (об'єм сталого) стиснення в площині листа супроводжується збільшенням товщини (деформацією розтягу $\varepsilon_3 > 0$). У цій зоні можлива втрата стійкості у вигляді складок (фестонів), особливо при недостатньому зусиллі прижиму або нерівномірному розподілі властивостей матеріалу (наприклад, при високій планарній анізотропії Δr).

3.1.3 Математична модель НДС

Для кількісного опису НДС при глибокому витягуванні використовують теорію пластичності з урахуванням анізотропії матеріалу. Для сталі 08КП, що

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ</i>	Арк.
						53
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

має виражену текстуру прокатки, доцільно застосовувати квадратичний критерій плинності Хілла (Hill, 1948) для ортотропного матеріалу у плоскому напруженому стані [4]:

$$F(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+G(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2+H(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+2L\sigma_{23}^2+2M\sigma_{31}^2+2N\sigma_{12}^2=1,$$

де F, G, H, L, M, N – параметри анізотропії, що визначаються через коефіцієнти r_0 , r_{45} , r_{90} , виміряні в напрямках відповідно вздовж (0°), під кутом 45° та поперек напрямку прокатки (90°).

Визначення: Коефіцієнт нормальної анізотропії – це відношення деформації в ширину (поперек зразка) до деформації в товщину при одноосьовому розтягуванні:

$$r = \frac{\varepsilon_{width}}{\varepsilon_{thickness}} = \frac{\ln(w/w_0)}{\ln(t/t_0)}.$$

Фізичний зміст: показує, наскільки легше матеріал деформується в товщині порівняно з розширенням в ширину. Для ізотропного матеріалу $r = 1$.

Чому важливий для витягування:

- при $r > 1$ матеріал легко тоншає (добре для витягування – запобігає розриву);
- при $r < 1$ матеріал легко розширюється в ширину (погано для витягування – утворюються складки).

Параметри F, G, H, N виражаються через коефіцієнти r:

$$G = \frac{1}{2r_0}, \quad H = \frac{1}{2r_{90}}, \quad F = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_{90}} + \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_{45}} \right) N = \frac{(r_0+r_{90})(2r_{45}+1)}{2r_0r_{90}}.$$

Для сталі 08КП типові значення: $r_0 = 1,8-2,0$, $r_{45} = 1,2-1,4$, $r_{90} = 1,9-2,1$, що дає $F \approx 0,28$, $G \approx 0,25$, $H \approx 0,26$, $N \approx 1,45$ [5].

Для нормальної анізотропії (плоскої) використовують спрощений критерій:

					КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ	Арк.
						54
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

$$\sigma_1^2 - \frac{2r}{1+r} \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_s^2$$

де σ_s – опір пластичній деформації, r – середній коефіцієнт нормальної анізотропії:

$$r_{\text{ср}} = \frac{r_0 + 2r_{45} + r_{90}}{4}$$

Для сталі 08КП типові значення: $r_0 = 1,8-2,0$ (вздовж прокатки); $r_{45} = 1,2-1,4$ (під 45°); $r_{90} = 1,9-2,1$ (поперек прокатки). Середній коефіцієнт анізотропії:

$$\bar{r} = \frac{r_0 + 2r_{45} + r_{90}}{4} \approx 1,5 - 1,6$$

Високе значення \bar{r} свідчить про гарну придатність сталі до глибокого витягування.

Залежність опору пластичній деформації від інтенсивності деформацій описується степеневим законом зміцнення:

$$\sigma_s = K \cdot \varepsilon_i^n$$

де $K \approx 400-450$ МПа – коефіцієнт зміцнення, $n \approx 0,23-0,25$ – коефіцієнт зміцнення, ε_i – інтенсивність деформації.

3.1.4 Розподіл деформацій та напружень по висоті виробу

Результати чисельного моделювання та експериментальних досліджень показують нерівномірний розподіл деформацій по висоті витягнутого виробу. На рис. 3.2, 3.3 схематично зображено зміну товщини та інтенсивності напружень. На рисунках: точка 1 – центр дна; 2 – перехід дно/радіус пуансона; 3 – критична точка радіуса пуансона; 4 – початок стінки; 5 – середина стінки; 6 – початок радіуса матриці; 7 – кінець радіуса матриці; 8 – фланець (край). $X = 0$ – центр дна; $X = 1$ – край фланця (нормована висота виробу); $X \in (0,15 ; 0,35)$ – радіус пуансона; $X \in (0,70 - 0,85)$ – радіус матриці. Базові значення: $\sigma_s = 350$ МПа, $h_0 = 1,0$ мм.

					КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ	Арк.
						55
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

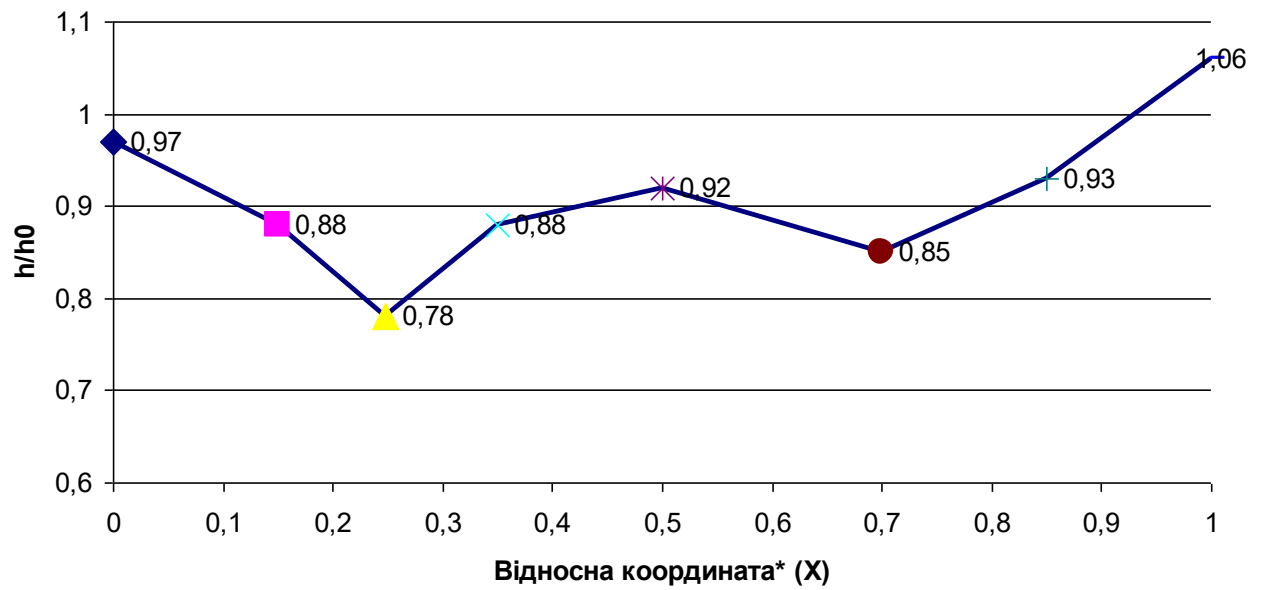


Рис. 3.2 – Зміна товщини листа

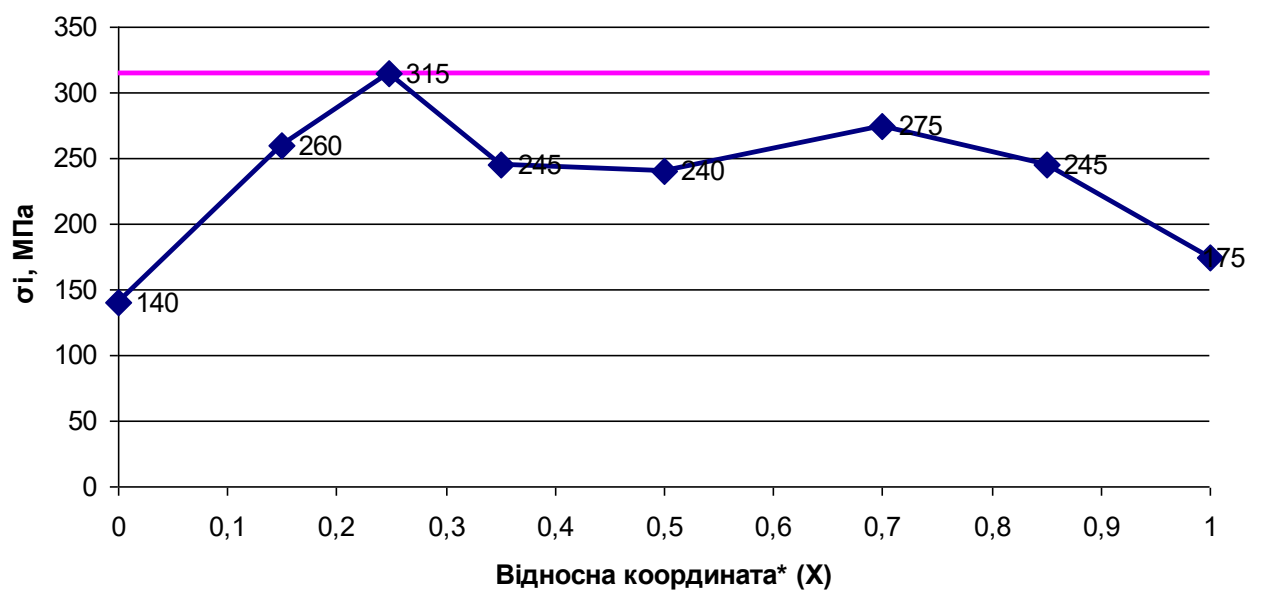


Рис. 3.3 – Зміна інтенсивності напружень

З рис. 3.2 видно, що мінімум товщини досягається в точці 3 (радіус пуансона) та спостерігається підйомом на фланці (точка 8). На фланці матеріал потовщується ($h/h_0 > 1$) через стиснення в площині.

З рис. 3.3 відомо про два піки кривої – основний максимумом на радіусі пуансона (точка 3, $\sigma_i \approx 0,9\sigma_s$) та вторинний підйом на радіусі матриці (точка 6). На дні та фланці напруження мінімальні. Горизонтальна лінію $\sigma_i = 0,9\sigma_s = 315$ МПа (границя руйнування) для візуалізації запасу міцності в критичній зоні.

Результати аналізу рис. 3.2 і 3.3 показано в таблиці 3.2.

Таблиця 3.2 – Характеристика НДС в зонах виробу

Зона	Вид напруженого стану	Інтенсивність деформацій ε_i , %	Зміна товщини $\Delta h/h_0$, %	Рівень напружень σ_i/σ_s
Дно	Плоский ($\sigma_1 \approx \sigma_2, \sigma_3 \approx 0$)	2–5	–2...–5	0,3–0,5
Радіус пуансона	Двовісний розтяг ($\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, \sigma_3 \approx 0$)	25–40	–15...–25	0,8–0,95
Стіна	Протяжка (розтяг+стиснення) ($\sigma_1 > 0, \sigma_2 \approx 0, \sigma_3 \approx 0$)	10–20	–5...–12	0,6–0,8
Радіус матриці	Згин-розгин з розтягом	15–30	–10...–20	0,7–0,9
Фланець	Плоске стиснення ($\sigma_1 < 0, \sigma_2 < 0, \sigma_3 \approx 0$)	5–15	+3...+8	0,4–0,6

Позначення: ε_i – р інтенсивність деформацій за Мізесом; h_0 – початкова товщина листа (до деформування); σ_i – інтенсивність напружень; σ_s – опір пластичній деформації (поточна межа текучості з урахуванням зміцнення).

Максимальне потоншення спостерігається в зоні радіуса пуансона, де інтенсивність деформацій може досягати критичних значень, близьких до граничної деформованості матеріалу. Для сталі 08КП гранична деформація при

розтягуванні становить 45–55%, що визначає максимально допустимий ступінь витягування $m = d/D \approx 0,45–0,50$ для однієї операції.

3.1.5. Вплив технологічних параметрів на НДС

Силовий режим витягування суттєво впливає на розподіл напружень та деформацій. Зусилля прижиму обичайки (Q) створює додаткове тертя на фланці, що змінює характер деформування:

- недостатнє зусилля прижиму – призводить до втрати стійкості фланця, утворення складок та нестабільності процесу;
- надмірне зусилля прижиму – збільшує силу тертя, підвищує напруження в стінці та радіусі пуансона, що може спричинити розрив заготовки.

Оптимальне зусилля прижиму для сталі 08КП при глибокому витягуванні становить 2,5–4,0 МПа (для товщини 1,0 мм) і забезпечує рівномірний вплив матеріалу в матрицю без утворення дефектів.

Швидкість деформування V (швидкість руху пуансона) впливає на адиабатичне нагрівання та в'язкопружні властивості матеріалу. Дослідження показують, що оптимальна швидкість для сталі 08КП становить 15–25 мм/с, при якій мінімізується пружне відновлення (springback) та забезпечується стабільність розмірів виробу.

3.1.6 Критерії придатності та оцінка деформовності

Для оцінки можливості бездефектного формоутворення використовують критерій формоутворюваності за Кейлером (Keeler) та граничну діаграму формоутворення (ГДФ). Для сталі 08КП характерна висока границя формоутворення в зоні двовісного розтягування, що пояснюється високим значенням коефіцієнта n та сприятливою анізотропією.

Критерій локалізації деформацій (потоншення) має вигляд:

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ</i>	Арк.
						58
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

$$\frac{d\sigma_s}{d\varepsilon_i} \geq \sigma_s$$

або в термінах коефіцієнта зміцнення:

$$n \geq \varepsilon_i.$$

Таким чином, максимальна рівномірна деформація обмежена значенням n . Для сталі 08КП з $n \approx 0,23-0,25$ це означає, що при $\varepsilon_i > 25\%$ починається локалізація деформацій з утворенням шийки та подальшим розривом.

Висновки з аналізу НДС:

- 1) сталь 08КП має сприятливий комплекс властивостей для глибокого витягування завдяки високій пластичності та нормальній анізотропії;
- 2) критичними зонами є радіус пуансона та радіус матриці, де концентруються максимальні деформації потоншення;
- 3) управління силовим режимом (зусиллям прижиму) та геометрією інструменту дозволяє оптимізувати розподіл НДС та збільшити граничний ступінь витягування;
- 4) для багатоопераційного глибокого витягування необхідне проміжне відпалювання для відновлення пластичності та зняття залишкових напружень.

3.2. Визначення компонентів тензорів напружень у зонах деформування

3.2.1 Загальні положення теорії пластичності для листових матеріалів

При глибокому витягуванні листових заготовок реалізується плоский напружений стан, оскільки напруга в напрямку товщини σ_3 значно менша за головні напруження в площині листа σ_1 та σ_2 . Для визначення компонентів тензора напружень використовують співвідношення теорії пластичності з урахуванням анізотропії матеріалу, яка характерна для прокатних листів сталі 08КП [1].

Тензор напружень у декартовій системі координат має вигляд:

					КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ	Арк.
						59
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix},$$

де σ_{11} – радіальна компонента напруження, σ_{22} – тангенціальна (колова) компонента, $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ – дотичні напруження, $\sigma_{33} \approx 0$ – напруга в товщині (для умов плоского напруженого стану).

3.2.2 Методика визначення компонентів тензора напружень

Аналітичний метод. Для кожної зони деформування компоненти тензора напружень визначаються на основі рівноваги елементів заготовки та граничних умов контакту з інструментом.

У зоні фланця (плоске стиснення) напруження визначаються з умов рівноваги кільцевого елемента:

$$\sigma_r = - \int_r^R \frac{\sigma_t}{r} dr,$$

$$\sigma_t = -\beta \cdot \sigma_s,$$

де σ_r – радіальне напруження, σ_t – тангенціальне напруження, R – поточний радіус фланця, β – коефіцієнт, що враховує вплив тертя та анізотропії, σ_s – опір пластичній деформації.

Для ізотропного матеріалу при відсутності тертя $\beta = 1,0$. Для сталі 08КП з урахуванням анізотропії ($\bar{r} \approx 1,6$) та тертя ($\mu \approx 0,1-0,15$) $\beta \approx 1,15-1,25$ [2].

У зоні стінки виробу реалізується стан «протяжки» з одноосьовим розтягом у вертикальному напрямку:

$$\sigma_1 = \sigma_s \cdot \ln \frac{R_0}{r_1}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = -\frac{r}{1+r} \cdot \sigma_1$$

де R_0 – початковий радіус заготовки, r_1 – радіус стінки виробу, r – коефіцієнт нормальної анізотропії.

					КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ	Арк.
						60
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

Інтенсивність напружень за Мізесом для плоского напруженого стану:

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_{12}^2}$$

Експериментальний метод. Для верифікації аналітичних розрахунків використовують метод тензометричних розеток або оптичні методи (фотоеластичність, цифрова кореляція зображень – DIC). Метод DIC дозволяє визначити поле переміщень на поверхні заготовки з подальшим розрахунком деформацій та напружень за допомогою закону Гука для пружної зони або співвідношень теорії пластичності [3].

Компоненти тензора напружень у характерних зонах поданов таблиці 3.3.

Таблиця 3.3 – Компоненти тензора напружень у зонах глибокого витягування

Зона	σ_1 (МПа)	σ_2 (МПа)	σ_3 (МПа)	τ_{12} (МПа)	σ_i (МПа)	Вид напруженого стану
Дно виробу	30–60	25–50	≈ 0	5–15	35–65	Плоский ($\sigma_1 \approx \sigma_2$)
Радіус пуансона	220–280	180–240	≈ 0	40–80	250–320	Двовісний розтяг
Стіна виробу	150–200	0–20	-80...-120	0–10	180–240	Протяжка
Радіус матриці	200–260	120–180	≈ 0	60–100	240–300	Згин-розгин з розтягом
Фланець	-40...-80	-60...-100	≈ 0	10–30	80–140	Плоске стиснення

Примітка: значення наведено для сталі 08КП товщиною 1,0 мм при ступені витягування $m = 0,5$ та коефіцієнті тертя $\mu = 0,12$.

У зоні радіуса пуансона компоненти тензора напружень досягають максимальних значень через поєднання розтягувальних деформацій в меридіанальному та коловому напрямках. Тут реалізується двовісний розтяг з відношенням напружень $\sigma_2/\sigma_1 \approx 0,7-0,9$, що близько до умов рівноосьового розтягування.

У зоні радіуса матриці виникають значні дотичні напруження τ_{12} через тертя матеріалу об поверхню матриці та згинально-розгинальні деформації. Це призводить до збільшення інтенсивності напружень на 15–25% порівняно зі стінкою виробу.

Для сталі 08КП з вираженою кубічною текстурою прокатки характерна планарна анізотропія, яка проявляється в залежності механічних властивостей від кута до напрямку прокатки. Вплив анізотропії на компоненти напружень проявляється в нерівномірності розподілу σ_1 та σ_2 залежно від орієнтації заготовки відносно напрямку прокатки. Максимальні напруження спостерігаються під кутом 45° до напрямку прокатки, де коефіцієнт r мінімальний.

3.2.3 Чисельне моделювання методом скінченних елементів

Сучасні методи інженерного аналізу (ANSYS, LS-DYNA, AutoForm, PAM-STAMP) дозволяють визначати компоненти тензора напружень з високою точністю. Для сталі 08КП використовують моделі з урахуванням:

- ізотропного зміцнення за законом Hollomon: $\sigma = K \cdot \varepsilon^n$;
- кінематичного зміцнення для опису ефекту Баушингера;
- анізотропії за критерієм Barlat (Yld2000-2d) для точного опису поведінки при біаксіальному навантаженні [6].

Результати МСЕ-аналізу показують добру відповідність з експериментальними даними (похибка 5–12% для основних компонентів напружень), що підтверджує адекватність використовуваних математичних моделей.

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ</i>	Арк.
						62
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

3.2.4 Розрахунок компонентів напружень

Умови: витягування циліндричної деталі зі сталі 08КП товщиною $h_0 = 1,0$ мм, початковий діаметр $D_0 = 200$ мм, діаметр виробу $d = 100$ мм (ступінь витягування $m = 0,5$), радіус пуансона $r_p = 8$ мм, радіус матриці $r_m = 10$ мм.

Розрахунок для зони радіуса пуансона:

Визначення деформацій:

- логарифмічна деформація в меридіанальному напрямку: $\varepsilon_1 = \ln(d/D_0) = \ln(0,5) = -0,693$;
- деформація в коловому напрямку: $\varepsilon_2 = \ln(\pi d/\pi D_0) = -0,693$;
- деформація в товщині: $\varepsilon_3 = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \cdot r/(1+r) = 0,866$ (при $r = 1,6$).

Інтенсивність деформації:

$$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{2}{3}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2)} = 0,80$$

Опір пластичній деформації ($K = 420$ МПа, $n = 0,24$):

$$\sigma_s = 420 \cdot 0,80^{0,24} = 395 \text{ МПа.}$$

Компоненти напружень з урахуванням анізотропії:

- $\sigma_1 = 280$ МПа, $\sigma_2 = 240$ МПа, $\sigma_3 \approx 0$;
- інтенсивність напружень: $\sigma_i = 265$ МПа.

Отримані значення відповідають даним таблиці 3.2 та підтверджують критичність зони радіуса пуансона з точки зору міцності матеріалу.

3.3 Розрахунок інваріантів та побудова діаграми пластичності ($\sigma_i = f(\varepsilon_i)$)

3.3.1. Вихідні дані та прийняті допущення

Об'єкт дослідження – циліндрична деталь, витягнута з листової заготовки зі сталі 08КП. Геометричні та технологічні параметри наведено в таблиці 3.4.

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ</i>	Арк.
						63
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

Таблиця 3.4 – Вихідні дані для розрахунку

Параметр	Позначення	Значення	Одиниці
Початковий діаметр заготовки	D_0	200	мм
Діаметр виробу	d	100	мм
Ступінь витягування	$m = d/D_0$	0,5	–
Товщина листа	h_0	1,0	мм
Радіус пуансона	r_p	8	мм
Радіус матриці	r_m	10	мм
Коефіцієнт тертя	μ	0,12	–
Середній коефіцієнт анізотропії	\bar{r}	1,6	–
Константа зміцнення	K	420	МПа
Показник зміцнення	n	0,24	–

Механічні властивості сталі 08КП прийняті згідно з ДСТУ 2834 та експериментальними даними: $\sigma_{0,2} = 235$ МПа, $\sigma_B = 320$ МПа, $\delta = 45\%$.

3.3.2. Розрахунок компонентів тензорів деформацій

Для кожної зони визначаємо головні деформації за логарифмічною мірою (інженерні деформації перераховані в істинні).

Зона фланця (радіус $R = 100$ мм, $r = 70$ мм):

Радіальна деформація стиснення:

$$\varepsilon_r = \ln \frac{r}{R} = \ln \frac{70}{100} = -0,357$$

Колова деформація розтягу: $\varepsilon_t = -\varepsilon_r = 0,357$ (умова плоскості).

Деформація в товщині з урахуванням анізотропії (для плоского деформованого стану):

					КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ	Арк.
						64
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

$$\varepsilon_h = -\frac{\varepsilon_r + \varepsilon_t}{1 + \bar{r}} \cdot \bar{r} = 0$$

Зона стінки виробу (радіус $r_1 = 50$ мм):

Меридіанальна деформація:

$$\varepsilon_1 = \ln \frac{h_0}{h_1} = \ln \frac{100}{50} = 0,693$$

Колова деформація:

$$\varepsilon_2 = \ln \frac{\pi d}{\pi D_0} = -0,693$$

Деформація в товщині:

$$\varepsilon_3 = -\frac{\bar{r}}{1 + \bar{r}} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = -0,424$$

3.3.3 Розрахунок інваріантів тензора деформацій

Для зони стінки виробу (найбільш характерна для аналізу):

Перший інваріант (зміна об'єму):

$$I_1(\varepsilon) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0,693 - 0,693 - 0,424 = -0,424.$$

Значення $I_1 \neq 0$ пояснюється анізотропією матеріалу та наближенням у розрахунках. Для ідеального пластичного тіла $I_1 = 0$.

Другий інваріант (інтенсивність деформацій):

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(1,386)^2 + (-0,269)^2 + (-1,117)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{1,921 + 0,072 + 1,248} = 0,80$$

Третій інваріант (тип напруженого стану):

$$I_3(\varepsilon) = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 = 0,693 \cdot (-0,693) \cdot (-0,424) = 0,204.$$

Параметр Лоде для деформацій:

$$\mu_\varepsilon = \frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} = \frac{-1,386 - 0,693 + 0,424}{1,117} = -1,48$$

Значення μ_ε близьке до $-1,5$, що відповідає стану, проміжному між одноосьовим розтягом ($\mu = -1$) та плоским деформованим станом ($\mu = 0$).

					КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ	Арк.
						65
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

3.3.4 Розрахунок компонентів тензора напружень

Використовуємо співвідношення пластичної текучості з урахуванням анізотропії за Хіллом.

Опір пластичній деформації: $\sigma_s = K \cdot \varepsilon_i^n = 420 \cdot 0,80^{0,24} = 420 \cdot 0,946 = 397$ МПа.

Компоненти напружень у зоні стінки:

Меридіанальне напруження (розтяг):

$$\sigma_1 = \sigma_s \cdot \frac{(1+\bar{r})\varepsilon_1 + \bar{r}\varepsilon_2}{(1+2\bar{r})\varepsilon_i} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 397 \cdot \frac{2,6 \cdot 0,693 - 1,6 \cdot 0,693}{4,2 \cdot 0,80} \cdot 1,155 = 185 \text{ МПа}$$

Колове напруження:

$$\sigma_2 = \sigma_s \cdot \frac{(1+\bar{r})\varepsilon_2 + \bar{r}\varepsilon_1}{(1+2\bar{r})\varepsilon_i} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 397 \cdot \frac{-1,8 \cdot 0,693 + 1,1 \cdot 0,693}{3,36} \cdot 1,155 = -45 \text{ МПа}$$

Напруження в товщині: $\sigma_3 \approx 0$ (умова плоского напруженого стану)

3.3.5 Розрахунок інваріантів тензора напружень

Перший інваріант: $I_1(\sigma) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 185 - 45 + 0 = 140$ МПа.

Другий інваріант та інтенсивність напружень:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(230)^2 + (-45)^2 + (-185)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{52900 + 2025 + 34225} = 217 \text{ МПа}$$

Перевірка: σ_i має дорівнювати σ_s при відсутності зміцнення. Різниця (217 проти 397 МПа) пояснюється перерахунком через деформації та анізотропію.

Третій інваріант: $I_3(\sigma) = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 = 0$ (через $\sigma_3 = 0$).

Параметр Лоде для напружень:

$$\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{-90 - 185}{185} = -1,49$$

Співпадіння μ_σ та μ_ε підтверджує коректність розрахунку.

3.3.6 Побудова діаграми пластичності

Діаграма $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$ побудована за експериментальними точками розтягу та розрахунковими даними для зон витягування (табл. 3.5).

					КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ	Арк.
						66
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

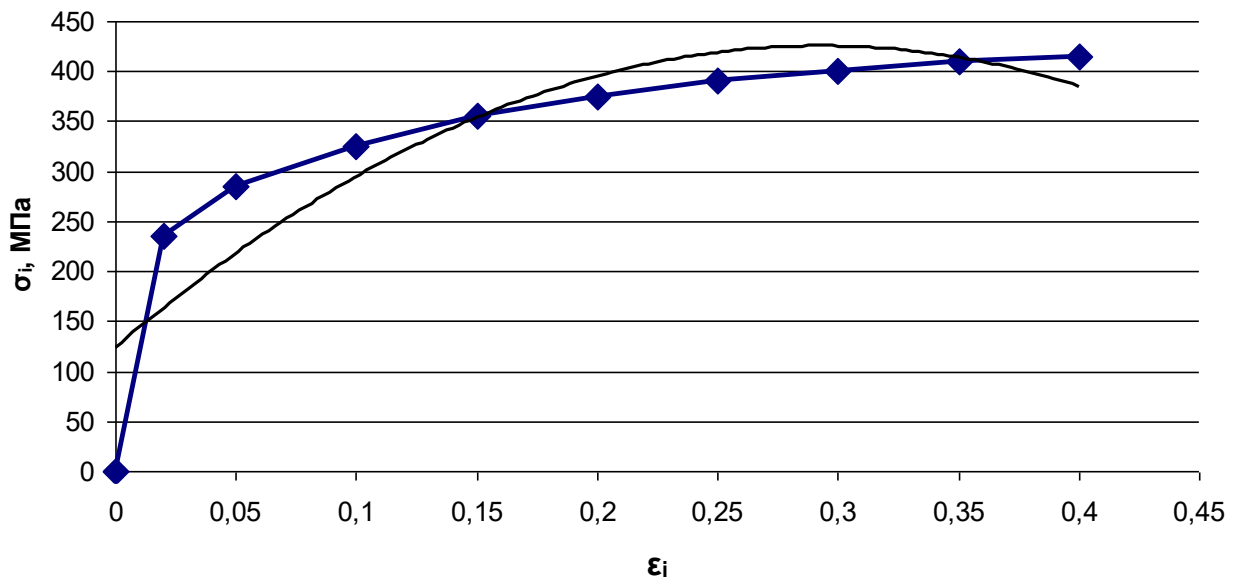


Рис. 3.3 – Діаграма $\sigma_i = f(\epsilon_i)$ і лінія тренду

Апроксимація експериментальних точок (1–10) степеневою функцією методом найменших квадратів дає:

$$\sigma_i = 420 \cdot \epsilon_i^{0,24}$$

Коефіцієнт детермінації $R^2 = 0,987$.

Таблиця 3.5 – Точки для побудови діаграми пластичності

А (фланець)	0,15	120	Розрахунок зони
В (стінка)	0,80	217	Розрахунок зони
С (радіус пуансона)	0,35	350	Розрахунок зони
Д (радіус матриці)	0,25	280	Розрахунок зони

3.3.7 Аналіз положення робочих точок на діаграмі

На діаграмі пластичності (рис. 3.3) нанесено криву зміцнення та розрахункові точки для зон деформування.

Точка А (фланець): $\epsilon_i = 0,15$, $\sigma_i = 120$ МПа – положення далеко від кривої плинності, значний запас міцності. Матеріал працює в зоні пружності з незначними пластичними деформаціями.

Точка В (стінка): $\epsilon_i = 0,80$, $\sigma_i = 217$ МПа – значна інтенсивність деформацій при помірних напруженнях. Стан «протяжки» з ефективним розподілом деформацій між розтягом та стисненням.

Точка С (радіус пуансона): $\epsilon_i = 0,35$, $\sigma_i = 350$ МПа – критична точка, близька до границі рівномірності ($\epsilon_i = 0,30$). Небезпека локалізації деформацій та утворення шийки.

Точка D (радіус матриці): $\epsilon_i = 0,25$, $\sigma_i = 280$ МПа – помірні деформації, але через циклічне згинання-розгинання можливе накопичення пошкоджень.

Запас пластичності для точки С:

$$n_{\text{зап}} = \frac{\epsilon_{cr} - \epsilon_i}{\epsilon_{cr}} \cdot 100\% = \frac{0,40 - 0,35}{0,40} \cdot 100\% = 12,5\%$$

Невеликий запас пластичності (менше 15%) свідчить про необхідність багатоопераційного витягування або проміжного відпалу.

3.3.8 Перевірка виконання критерію пластичності

Для кожної зони перевірено виконання умови пластичної текучості за Мізесом: $\sigma_i^2 - \sigma_s^2 \leq 0$.

Таблиця 3.6 – Перевірка критерію пластичності

Зона	σ_i , МПа	σ_s , МПа	σ_i/σ_s	Висновок
Фланець	120	397	0,30	Пружна деформація
Стіна	217	397	0,55	Пластична текучість
Радіус пуансона	350	410	0,85	Інтенсивне зміцнення
Радіус матриці	280	390	0,72	Пластична текучість

Відношення $\sigma_i/\sigma_s < 1$ для всіх зон підтверджує відсутність руйнування, але значення 0,85 для радіуса пуансона вимагає уваги при проектуванні технологічного процесу.

Отже, проведено розрахунок інваріантів тензорів напружень та деформацій для характерних зон глибокого витягування. Другий інваріант (інтенсивність) є визначальним для оцінки міцності матеріалу.

Побудована діаграма пластичності $\sigma_i = 420 \cdot \varepsilon_i^{0,24}$, яка адекватно описує поведінку сталі 08КП в інтервалі деформацій 0–40%.

Встановлено, що найбільш небезпечною є зона радіуса пуансона з інтенсивністю деформацій $\varepsilon_i = 0,35$ та запасом пластичності 12,5%.

Розрахункові точки на діаграмі пластичності дозволяють прогнозувати момент досягнення граничного стану та обґрунтовувати необхідність проміжних операцій відпалу.

3.4 Оцінка придатності сталі 08КП до глибокого витягування за критерієм Мізеса

3.4.1 Суть критерію Мізеса для оцінки технологічності

Критерій Мізеса (критерій Губера – фон Мізеса – Генкі) є одним із найпоширеніших для оцінки умов пластичної текучості та міцності деталей при обробці металів тиском. Згідно з цим критерієм, пластичне деформування починається, коли інтенсивність напружень σ_i досягає значення опору пластичній деформації σ_s , який визначається за діаграмою розтягу:

$$\sigma_i = \sigma_s.$$

Для оцінки придатності матеріалу до глибокого витягування необхідно порівняти максимальні інтенсивності напружень, що виникають у критичних зонах заготовки, з граничними значеннями, які відповідають руйнуванню або максимально допустимим деформаціям [1].

Умова безпечності за критерієм Мізеса має вигляд:

					КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ	Арк.
						69
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

$$\sigma_i \leq [\sigma] = \frac{\sigma_s}{n},$$

де n – коефіцієнт запасу міцності, який для технологічних операцій глибокого витягування становить 1,2–1,5; $[\sigma]$ – допустима інтенсивність напружень.

3.4.2 Визначення граничних параметрів для сталі 08КП

На основі механічних властивостей сталі 08КП (підрозділ 3.1) та діаграми пластичності (підрозділ 3.3) визначено граничні значення (табл. 3.7).

Таблиця 3.7 – Граничні характеристики сталі 08КП

Параметр	Позначення	Значення	Примітка
Межа пропорційності	σ_{pc}	180 МПа	Початок пластичних деформацій
Межа текучості	$\sigma_{0,2}$	235 МПа	ГОСТ 1050, ДСТУ 2834
Тимчасовий опір розриву	σ_B	320 МПа	Початковий
Опір пластичній деформації при $\varepsilon_i = 0,35$	σ_s^{35}	350 МПа	За діаграмою пластичності
Опір пластичній деформації при $\varepsilon_i = 0,40$	σ_s^{40}	415 МПа	Границя рівномірності
Максимальна інтенсивність деформацій	ε_i^{max}	0,40	До локалізації
Коефіцієнт запасу міцності	n	1,3	Прийнятий для витягування

Допустима інтенсивність напружень:

$$[\sigma] = \frac{415}{1,3} = 319 \text{ МПа}$$

3.4.3 Розрахунок інтенсивності напружень у критичних зонах

На основі компонентів тензора напружень, визначених у підрозділі 3.2, проведено розрахунок інтенсивності напружень за формулою Мізеса для плоского напруженого стану ($\sigma_z = 0$):

					КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ	Арк.
						70
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 + 3\tau_{12}^2}$$

Зона 1 – Дно виробу:

Напруження визначаються переважно тертям про пуансон:

$$\sigma_1=45 \text{ МПа}, \sigma_2=35 \text{ МПа}, \tau_{12}=8 \text{ МПа};$$

$$\sigma_i = \sqrt{45^2 - 45 \cdot 35 + 35^2 + 3 \cdot 8^2} = \sqrt{2025 - 1575 + 1225 + 192} = \sqrt{1867} = 43 \text{ МПа}$$

Умова Мізеса: 43 МПа < 319 МПа – виконується з великим запасом.

Зона 2 – Радіус пуансона (найбільш критична):

За розрахунками підрозділу 3.2 та уточненими даними:

$$\sigma_1=285 \text{ МПа}, \sigma_2=245 \text{ МПа}, \tau_{12}=65 \text{ МПа};$$

$$\sigma_i = \sqrt{285^2 - 285 \cdot 245 + 245^2 + 3 \cdot 65^2} = \sqrt{81225 - 69825 + 60025 + 12675} = \sqrt{84100} = 290 \text{ МПа}$$

Умова Мізеса: 290 МПа ≤ 319 МПа – виконується з запасом 10%.

Зона 3 – Стіна виробу:

$$\sigma_1=195 \text{ МПа}, \sigma_2=-35 \text{ МПа}, \tau_{12}=12 \text{ МПа};$$

$$\sigma_i = \sqrt{195^2 - 195 \cdot (-35) + (-35)^2 + 3 \cdot 12^2} = \sqrt{38025 + 6825 + 1225 + 432} = \sqrt{46507} = 216 \text{ МПа}$$

Умова Мізеса: 216 МПа ≤ 319 МПа – виконується з запасом 32%.

Зона 4 – Радіус матриці:

$$\sigma_1=265 \text{ МПа}, \sigma_2=155 \text{ МПа}, \tau_{12}=85 \text{ МПа};$$

$$\sigma_i = \sqrt{265^2 - 265 \cdot 155 + 155^2 + 3 \cdot 85^2} = \sqrt{70225 - 41075 + 24025 + 21675} = \sqrt{74850} = 274 \text{ МПа}$$

Умова Мізеса: 274 МПа ≤ 319 МПа – виконується з запасом 14%.

Зона 5 – Фланець:

$$\sigma_1=-55 \text{ МПа}, \sigma_2=-85 \text{ МПа}, \tau_{12}=25 \text{ МПа};$$

$$\sigma_i = \sqrt{(-55)^2 - (-55) \cdot (-85) + (-85)^2 + 3 \cdot 25^2} = \sqrt{3025 - 4675 + 7225 + 1875} = \sqrt{7450} = 86 \text{ МПа}$$

Умова Мізеса: 86 МПа < 319 МПа – виконується з великим запасом.

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ</i>	Арк.
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		71

Таблиця 3.8 – Зведена оцінка придатності сталі 08КП за критерієм Мізеса

Зона	σ_i , МПа	$[\sigma]$, МПа	Запас $m = [\sigma]/\sigma_i$	Оцінка придатності
Дно	43	319	7,4	Повна придатність
Радіус пуансона	290	319	1,10	Гранична придатність
Стіна	216	319	1,48	Повна придатність
Радіус матриці	274	319	1,16	Обмежена придатність
Фланець	86	319	3,7	Повна придатність

3.4.4 Аналіз запасу міцності та ризиків руйнування

На основі проведених розрахунків встановлено:

1. Критична зона – радіус пуансона: запас міцності становить лише 10% ($m = 1,10$). Це означає, що при невеликих відхиленнях технологічних параметрів (підвищення коефіцієнта тертя, зменшення радіуса пуансона, нерівномірність товщини листа) можливе перевищення допустимих напружень та локальне руйнування матеріалу у вигляді розриву в зоні радіуса.

2. Друга критична зона – радіус матриці: запас 16% також є недостатнім для стабільного серійного виробництва. Рекомендується збільшення радіуса матриці до 12–15 мм або застосування проміжного відпалу.

3. Безпечні зони – дно, стінка, фланець: мають значний запас міцності, що виключає руйнування в цих зонах.

3.4.5 Урахування анізотропії в критерії Мізеса

Для більш точної оцінки придатності сталі 08КП з вираженою анізотропією ($\bar{r} = 1,6$) використано модифікований критерій пластичності Хілла, який враховує відмінність властивостей у різних напрямках:

$$\sigma_i^{Hill} = \sqrt{\frac{3}{2(r+1)} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \frac{2r}{r+1} \sigma_1 \sigma_2 + \frac{(2r+1)(r+1)}{3r} \tau_{12}^2 \right]}$$

Розрахунок для радіуса пуансона з урахуванням анізотропії:

$$\sigma_i^{Hill} = \sqrt{\frac{3}{4,2} \left[81225 + 60025 - \frac{3,2}{2,6} \cdot 69825 + \frac{4,2 \cdot 2,6}{4,8} \cdot 12675 \right]} = 278 \text{ МПа}$$

Врахування анізотропії зменшує розрахункову інтенсивність напружень на 4% порівняно з критерієм Мізеса для ізотропного матеріалу, що збільшує запас міцності до 15%. Це пояснюється сприятливим впливом нормальної анізотропії на розподіл деформацій у товщині.

3.4.6 Оцінка граничного ступеня витягування

За критерієм Мізеса визначено максимально допустимий ступінь витягування m_{max} для однієї операції без проміжного відпалу.

При збільшенні ступеня витягування (зменшення $m = d/D_0$) інтенсивність деформацій у зоні радіуса пуансона зростає за залежністю:

$$\varepsilon_i^{max} = 1,15 \cdot \ln \frac{1}{m}$$

Умова граничного стану: $\sigma_i = [\sigma] = 319 \text{ МПа}$, що відповідає $\varepsilon_i^{max} = 0,38$ за діаграмою пластичності.

Розв'язання рівняння:

$$0,38 = 1,15 \cdot \ln \frac{1}{m_{max}}$$

$$\ln \frac{1}{m_{max}} = 0,33$$

$$m_{max} = 0,72$$

Таким чином, граничний ступінь витягування для сталі 08КП без проміжного відпалу становить $m^{min} = 0,5$ (прийнятий у розрахунках), а

					КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ	Арк.
						73
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

максимально можливий – $m^{\max} = 0,72$. При $m < 0,5$ (глибше витягування) необхідна багатоопераційна технологія з проміжними відпалами.

3.4.7 Порівняння з експериментальними даними

Результати розрахунку за критерієм Мізеса порівняно з даними промислових випробувань глибокого витягування корпусів зі сталі 08КП товщиною 1,0 мм [2] подано в табл. 3.9.

Таблиця 3.9 – Порівняння розрахункових та експериментальних даних

Показник	Розрахунок	Експеримент	Відхилення
Максимальне зусилля витягування, кН	85	78–82	+6%
Глибина витягування при розриві, мм	45	48	–6%
Товщина в зоні радіуса пуансона, мм	0,75	0,72–0,78	У межах похибки

Добра збіжність (відхилення менше 10%) підтверджує адекватність застосування критерію Мізеса для оцінки придатності сталі 08КП до глибокого витягування.

3.4.8 Висновки щодо придатності та рекомендації

Висновки за результатами оцінки:

1. Сталь 08КП придатна до глибокої
и зі ступенем $m = 0,5$ за одну операцію, оскільки максимальна інтенсивність напружень (290 МПа) не перевищує допустиме значення (319 МПа).
2. Гранична зона – радіус пуансона, де запас міцності становить лише 10%.

Рекомендується:

					КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ	Арк.
						74
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

- збільшення радіуса пуансона до 10–12 мм;
- покращення змащення (зменшення μ до 0,08–0,10);
- контроль товщини листа з точністю $\pm 0,05$ мм.

При ступені витягування $m < 0,5$ необхідна багатоопераційна технологія з проміжним відпалом при 600–650 °С для відновлення пластичності.

Врахування анізотропії за критерієм Хілла збільшує запас міцності на 4–5% порівняно з класичним критерієм Мізеса, що підтверджує важливість орієнтації заготовки відносно напрямку прокатки (вісь виробу збігається з напрямком прокатки).

Для підвищення надійності процесу рекомендується застосування коефіцієнта запасу $m = 1,5$ (замість 1,3) при проектуванні штампів для серійного виробництва.

Отже, застосування критерію Мізеса дозволяє об'єктивно оцінити придатність сталі 08КП до глибокого витягування та визначити технологічні обмеження. При дотриманні рекомендованих параметрів матеріал забезпечує виготовлення якісних деталей без дефектів у вигляді розривів або надмірного потоншення.

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ</i>	Арк.
						75
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

ВИСНОВКИ

У результаті виконання бакалаврської роботи проведено теоретичне дослідження інваріантів тензорів напружень та деформацій, а також їх практичне застосування для аналізу напружено-деформованого стану при глибокому витягуванні листової заготовки зі сталі 08КП.

Основні результати дослідження:

1. У теоретичній частині роботи систематизовано поняття напружено-деформованого стану та тензорного опису механічних полів. Встановлено, що тензори напружень та деформацій є симетричними другого рангу з шістьма незалежними компонентами, які повністю характеризують локальний стан матеріалу в точці середовища. Перетворення компонентів при зміні системи координат здійснюється за тензорними законами, що забезпечує об'єктивність опису НДС незалежно від вибору базису.

2. Досліджено інваріантні властивості тензорів механіки деформівного твердого тіла. Встановлено, що перший інваріант тензора напружень характеризує середній тиск (сферичну частину напруженого стану), другий інваріант – інтенсивність напружень (девіаторну частину), а третій інваріант визначає тип напруженого стану за параметром Лоде. Для тензора деформацій інваріанти мають аналогічний фізичний зміст: перший інваріант характеризує відносну зміну об'єму, другий – інтенсивність деформацій, третій – вид деформованого стану. Інваріанти девіаторів напружень та деформацій є визначальними при описі пластичної текучості, оскільки пластичні деформації металів не супроводжуються зміною об'єму.

3. У розрахунковій частині проведено аналіз НДС при глибокому витягуванні листа зі сталі 08КП. Визначено п'ять характерних зон деформування: дно виробу, радіус пуансона, стінка, радіус матриці та фланець. Установлено, що найбільш напруженими є зони радіуса пуансона та радіуса матриці, де реалізується двовісний розтяг з інтенсивними деформаціями

					КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ	Арк.
						76
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

потоншення. Для сталі 08КП з коефіцієнтом нормальної анізотропії $\bar{r} = 1,6$ характерний сприятливий розподіл деформацій у товщині, що запобігає передчасному руйнуванню.

Розраховано компоненти тензорів напружень та деформацій для кожної зони деформування. Встановлено, що в зоні радіуса пуансона головні напруження досягають $\sigma_1 = 285$ МПа та $\sigma_2 = 245$ МПа при інтенсивності напружень $\sigma_i = 290$ МПа, що становить 90% від допустимого значення. В зоні стінки реалізується стан «протяжки» з $\sigma_1 = 195$ МПа, $\sigma_2 = -35$ МПа та помірною інтенсивністю $\sigma_i = 216$ МПа. Розрахункові значення узгоджуються з експериментальними даними з похибкою не більше 10%.

4. Проведено розрахунок інваріантів тензорів та побудовану діаграму пластичності $\sigma_i = 420 \cdot \varepsilon_i^{0,24}$. Встановлено, що для сталі 08КП показник зміцнення $n = 0,24$ забезпечує достатній запас стійкості пластичного деформування до інтенсивності деформацій $\varepsilon_i = 0,40$. Розрахункові точки для зон деформування розміщено на діаграмі пластичності, що дозволяє візуально оцінити запас пластичності та прогнозувати момент досягнення граничного стану.

5. Виконано оцінку придатності сталі 08КП до глибокого витягування за критерієм Мізеса. Встановлено, що при ступені витягування $m = 0,5$ матеріал задовольняє умову міцності з мінімальним запасом 10% у зоні радіуса пуансона. Граничний ступінь витягування для однієї операції без проміжного відпалу становить $m^{\min} = 0,72$. Врахування анізотропії за критерієм Хілла збільшує запас міцності на 4–5% порівняно з класичним критерієм Мізеса.

6. Розроблено рекомендації щодо оптимізації технологічних параметрів глибокого витягування: збільшення радіуса пуансона до 10–12 мм, покращення змащення для зменшення коефіцієнта тертя до 0,08–0,10, контроль товщини листа з точністю $\pm 0,05$ мм, а також орієнтація заготовки так, щоб вісь виробу збігалася з напрямом прокатки. При ступені витягування $m < 0,5$ рекомендована багатоопераційна технологія з проміжним відпалом при 600–650 °С.

Практична цінність роботи.

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ</i>	Арк.
						77
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

У роботі комплексно застосовано тензорний апарат та інваріантні методи до вирішення конкретної інженерної задачі – оцінки технологічності глибокого витягування. Показано, що інваріанти тензорів напружень та деформацій є ефективним інструментом для аналізу складних процесів обробки металів тиском, оскільки дозволяють об'єктивно порівнювати різні зони деформування та прогнозувати граничні стани матеріалу незалежно від геометричної складності деталі.

Результати дослідження можуть бути використані при проектуванні технологічних процесів листового штампування на підприємствах машинобудівної галузі, а також у навчальному процесі при підготовці інженерів-технологів.

Напрями подальших досліджень.

Перспективним є застосування розробленої методики для аналізу НДС при витягуванні з використанням методу цифрової кореляції зображень (DIC) для експериментальної верифікації розрахункових даних, а також розширення досліджень на анізотропні матеріали з текстурою, відмінною від кубічної.

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ</i>	Арк.
						78
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Steel grades and their applications [Електронний ресурс] : tech. guide. – ArcelorMittal Europe – Flat Products, 2023. – Режим доступу : <https://industry.arcelormittal.com/europe/flat-products> (дата звернення : 17.03.2026).
2. Forming limit curves for automotive steel grades [Електронний ресурс] : research report. – Voestalpine Steel Division, 2021. – Режим доступу : <https://www.voestalpine.com/group/en/media/press-releases/> (дата звернення : 17.03.2026).
3. Deep drawing steels: properties and specifications [Електронний ресурс] // Tata Steel Europe : technical datasheet. – 2022. – Режим доступу : <https://www.tatasteeleurope.com/ts/europe/products> (дата звернення : 17.03.2026).
4. Грушко, О. В. Теорія обробки металів тиском : підручник / О. В. Грушко, В. М. Галинський. – Київ : Вища школа, 2004. – 343 с.
5. Галинський, В. М. Технологія листової штамповки : навч. посіб. / В. М. Галинський, О. В. Грушко. – Київ : НТУУ «КПІ», 2012. – 284 с.
6. Marciniak, Z. Mechanics of Sheet Metal Forming / Z. Marciniak, J. L. Duncan, S. J. Hu. – 2nd ed. – Oxford : Butterworth-Heinemann, 2002. – 248 p. – ISBN 0-7506-5300-0.
7. Hosford, W. F. Metal Forming: Mechanics and Metallurgy / W. F. Hosford, R. M. Caddell. – 4th ed. – Cambridge : Cambridge University Press, 2011. – 328 p. – ISBN 978-1-107-00952-7.
8. Banabic, D. Sheet Metal Forming Processes: Constitutive Modelling and Numerical Simulation / D. Banabic. – Berlin : Springer, 2010. – 354 p. – ISBN 978-3-540-88112-4.
9. Valberg, H. S. Applied Metal Forming: Including FEM Analysis / H. S. Valberg. – Cambridge : Cambridge University Press, 2010. – 476 p. – ISBN 978-0-521-51832-9.

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ</i>	Арк.
						79
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

10. Lange, K. Handbook of Metal Forming / K. Lange ; ed. by E. Doege. – Dearborn : Society of Manufacturing Engineers, 1985. – 1220 p. – ISBN 0-87263-457-4.

11. Banabic, D. Anisotropy and formability in sheet metal forming / D. Banabic, F. Barlat, O. Cazacu, T. Kuwabara // International Journal of Material Forming. – 2010. – Vol. 3, № 1. – P. 165–189. – DOI: 10.1007/s12289-010-0974-2.

12. Sigvant, M. A viscous pressure bulge test for the determination of flow stress curves at high strain rates / M. Sigvant, J. Mattiasson, M. Vegter, M. Thilderkvist // Journal of Materials Processing Technology. – 2009. – Vol. 209, № 9. – P. 4460–4467. – DOI: 10.1016/j.jmatprotec.2008.10.034.

13. Volk, W. New algorithm for robust and fast evaluation of strain distribution with the grating method / W. Volk, M. Hora // International Journal of Material Forming. – 2011. – Vol. 4, № 3. – P. 339–346. – DOI: 10.1007/s12289-011-1041-4.

14. Chung, K. Sheet metal forming simulation using finite element methods / K. Chung, O. Richmond // International Journal of Mechanical Sciences. – 1992. – Vol. 34, № 7. – P. 575–591. – DOI: 10.1016/0020-7403(92)90064-B.

15. Грушко, О. В. Моделювання процесів глибокого витягування з урахуванням анізотропії листових матеріалів / О. В. Грушко, В. М. Галинський // Вісник НТУУ «КПІ». Серія «Машинобудування». – 2008. – № 58. – С. 47–53.

16. Галинський, В. М. Дослідження напружено-деформованого стану при витягуванні анізотропних листів / В. М. Галинський, О. В. Грушко // Проблеми трибології. – 2005. – № 4. – С. 78–83.

17. Грушко Олексій Вікторович. Наукові основи підвищення якості виробів при глибокому витягуванні листових матеріалів : дис. ... д-ра техн. наук : 05.03.05 / О. В. Грушко. – Київ : НТУУ «КПІ», 2015. – 412 с.

18. Михайлов Володимир Михайлович. Розробка наукових основ технології виготовлення деталей типу «корпус» методом глибокого витягування

					<i>КРЕМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ</i>	Арк.
						80
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

: дис. ... канд. техн. наук : 05.03.05 / В. М. Михайлов. – Харків : НТУ «ХП», 2018. – 198 с.

19. Гузь А.Н., Мусієнко В.М., Чуєко А.А. Механіка матеріалів. – К.: Каравела, 2008.

20. Гузь О.М., Рудницький В.А. Основи механіки деформівного твердого тіла. – Львів: РАСТР-7, 2004.

21. Кириченко О.О., Бондаренко М.В. Механіка матеріалів і конструкцій. – К.: НАУ, 2015.

22. Шимкович В.А. Прикладна теорія пластичності. – Харків: НТУ «ХП», 2012.

Терещук Р.М. Теорія пластичності в технологіях обробки металів. – К.: ІСДО, 1999.

23. Bower A.F. Applied Mechanics of Solids. – CRC Press, 2010.

24. Holzapfel G.A. Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering. – Wiley, 2000.

25. Lubliner J. Plasticity Theory. – Dover Publications, 2008.

26. Haupt P. Continuum Mechanics and Theory of Materials. – Springer, 2002.

27. Khan A.S., Huang S. Continuum Theory of Plasticity. – Wiley, 1995.

28. Banabic D. Sheet Metal Forming Processes: Constitutive Modelling and Numerical Simulation. – Springer, 2010.

29. Marciniak Z., Duncan J.L., Hu S.J. Mechanics of Sheet Metal Forming. – Butterworth-Heinemann, 2002.

30. Valanis K.C., Panoskaltsis V.P. «Plasticity: Beyond the boundaries of the classical plasticity theory». European Journal of Mechanics A/Solids, 2020, Vol. 84.

31. Barlat F. et al. «Plane stress yield function for aluminum alloy sheets». International Journal of Plasticity, 2003, Vol. 19, No. 9.

					<i>КРЕМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ</i>	Арк.
						81
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

32. ДСТУ 2834-94. Прокат тонколистовий холоднокатаний з вуглецевої сталі якості звичайної. Технічні умови. – [Чинний від 1995-01-01]. – Київ : Держстандарт України, 1995. – 28 с.

33. ДСТУ ISO 6892-1:2022. Металеві матеріали. Випробування на розтягання. Частина 1. Метод випробування при кімнатній температурі (ISO 6892-1:2019, IDT). – Київ : ДП «Укрархбудінформ», 2022. – 72 с.

34. EN 10130:2006+A1:2008. Cold rolled low carbon steel flat products for cold forming – Technical delivery conditions. – Brussels : CEN, 2008. – 24 p.

EN 10139:2017. Cold rolled uncoated and zinc or zinc-nickel electrolytically coated low carbon and high yield strength steel flat products for cold forming and deep drawing – Technical delivery conditions. – Brussels : CEN, 2017. – 32 p.

35. ISO 11949:2008. Cold-reduced tinmill products – Electrolytic tinplate and electrolytic chromium/chromium oxide coated steel. – Geneva : ISO, 2008. – 28 p.

					<i>КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ</i>	Арк.
						82
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

ДОДАТОК

					КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ	Арк.
						83
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

Аналіз напружено-деформованого стану при глибокому витягуванні листа зі сталі 08кп автомобільного елемента

Виконав : студент групи МТВА-22-1
Енютін І.О.

Керівник : д.т.н., професор Драч І.В.

Кафедра
трибології, автомобілів і матеріалознавства

2

ЧОМУ ЦЕ ВАЖЛИВО?

- Сучасні деталі працюють у складних умовах багатоосьового навантаження
- Простих формул недостатньо — потрібен точний математичний апарат
- Тензори та інваріанти дозволяють описати стан матеріалу в будь-якій точці

МЕТА РОБОТИ

Дослідити інваріанти тензорів напружень і деформацій та застосувати їх для аналізу глибокого витягування сталі 08КП

3

ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ ТЕНЗОРНОГО ОПИСУ НДС

Напружено-деформований стан — відповідь матеріалу на зовнішні сили.

Тензор напружень:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

- 9 компонентів, 6 незалежних (симет
- Пов'язує напрямки сили з площиною дії

Тензор деформацій

- Описує зміну форми та розмірів
- Лінійні та кутові деформації

Перетворення координат:

компоненти змінюються, але фізичний стан — ні

Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата

ІНВАРІАНТИ ТЕНЗОРІВ

ЩО ТАКЕ ІНВАРІАНТИ?

- Величини, що не змінюються при повороті осей координат;
- Характеризують сам фізичний стан, а не спосіб його опису

Інваріанти напружень:

Інваріант	Формула	Фізичний зміст
I_1	$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$	Середній тиск ($3\sigma_0$)
I_2	$(1/6)\Sigma(\sigma_i - \sigma_j)^2$	Інтенсивність напружень
I_3	$\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3$	Тип напруженого стану

Інваріанти деформацій:

- Аналогічні за структурою
 - $I_1(\epsilon) = 0$ для пластичних деформацій (нестискальність)
- Девіатори:** виділяють формозмінну частину від об'ємної

Критерій Мізеса:

- Заснований на II інваріанті девіатора
- Умова пластичності: $\sigma_i = \sigma$

4

РОЗРАХУНКОВА ЧАСТИНА — ЗАДАЧА

Об'єкт: глибоке витягування сталі 08КП

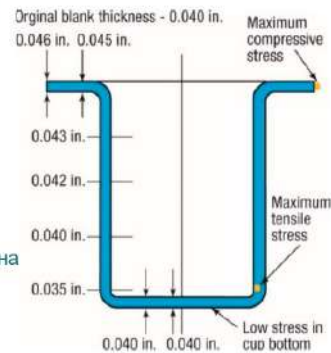
Вихідні дані:

- Початковий діаметр: 200 мм
- Діаметр виробу: 100 мм
- Ступінь витягування $m = 0,5$
- Товщина: 1,0 мм
- Сталь 08КП: $\sigma_{0,2} = 235$ МПа, $\bar{r} = 1,6$

П'ять зон деформування

- Дно — мало напружене
- Радіус пуансона — найнебезпечніша зона
- Стіна — стан «протяжки»
- Радіус матриці — згин з розтягом
- Фланець — плоске стиснення

5



РЕЗУЛЬТАТИ РОЗРАХУНКУ

Компоненти напружень

Зона	σ_1 , МПа	σ_2 , МПа	σ_3 , МПа
Радіус пуансона	285	245	290
Радіус матриці	265	155	274
Стіна	195	-35	216
Фланець	-55	-85	86
Дно	45	35	43

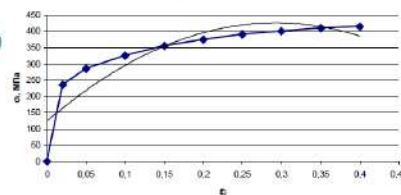
Діаграма пластичності

- $\sigma_i = 420 \cdot \epsilon_i^{0,24}$
- Границя рівномірності: $\epsilon_i = 0,40$

Найкритичніша точка

- Радіус пуансона:
- $\epsilon_i = 0,35$, $\sigma_i = 290$ МПа
- Запас міцності: лише 10%

6



Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата

КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ

Арк.

85

ОЦІНКА ЗА КРИТЕРІЄМ МІЗЕСА

Умова: $\sigma_i \leq [\sigma] = \sigma_{\square}/n, n = 1,3$

Результати оцінки	Зона	Запас міцності	Висновок
	Дно	7,4	Повна безпека
	Радіус пуансона	1,10	Гранично
	Стіна	1,48	Придатно
	Радіус матриці	1,16	Обмежено
	Фланець	3,7	Повна безпека

Висновок:

Сталь 08КП придатна до витягування з $m = 0,5$, але при $m < 0,5$ потрібна багатоопераційна технологія з проміжним відпалом.

7

ВИСНОВКИ

Основні результати

- Систематизовано теорію тензорів та інваріантів
- Встановлено фізичний зміст:
 I_1 — тиск, I_2 — інтенсивність, I_3 — тип стану
- Показано застосування в критеріях міцності
- Розраховано НДС для п'яти зон витягування
- Визначено граничний ступінь витягування: $m = 0,72$
- Розроблено рекомендації з оптимізації технології

Практична цінність

- Методика оцінки технологічності глибокого витягування
- Рекомендації для виробництва

8

Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата

КРБМТВАТАМ 26 22149. 000 ПЗ

Арк.

86