

**Математична модель передачі навантаження від попередньо  
напруженого циліндричного штампа до пружного шару з початковими  
напруженнями**

Математичне моделювання та дослідження проблем контактної взаємодії попередньо напружених тіл, є досить актуальною у наш час. Підтвердженням цього є виступ академіка НАН України Леоніда Лобанова із доповіддю «Про виконання цільової програми наукових досліджень НАН України «Надійність і довговічність матеріалів, конструкцій, обладнання та споруд»», що відбувся 09 грудня 2020р. [1]. Враховуючи це, важливими є вирішення проблем контактної взаємодії деформованих тіл, пов'язаних із передачею навантаження у конструкціях, спорудах та деталях машин, які пов'язані із врахуванням наявності початкових напружень у тілах на закон розподілу контактних напружень і переміщень.

Тому в даній роботі запропоновано математичну модель та розв'язок контактної задачі про тиск попередньо напруженого циліндричного штампа на пружний шар з початковими напруженнями. Дослідження представленої задачі виконано в рамках лінеаризованої теорії пружності [2, 3] без врахування сил тертя.

Дослідження проблеми контактної взаємодії попередньо напружених тіл висвітлена у багатьох працях сучасних науковців по всьому світу. Це пояснюється безперервною необхідністю у вдосконаленні методів та підходів дослідження та прогнозування технічного стану і терміну експлуатації технічних об'єктів та споруд. Так у механіці суцільних середовищ достатньо велика увага приділяється дослідженню контактної взаємодії твердих деформованих тіл, що пов'язане із проблемою визначення їх напружено-деформованих станів. Аналіз результатів цих досліджень дозволяє сформулювати умови на межі поверхонь контактуючих деформованих тіл, що відповідають дійсності. Незважаючи на існуючі досягнення у теорії контактної взаємодії

пружних тіл, все ще залишається недостатньо розроблений ряд моментів, серед яких – врахування залишкових напружень у тілах на закон розподілу тиску в місцях їх дотику, що дозволить більш ефективно враховувати експлуатаційну надійність та довговічність різноманітних конструкцій, споруд та обладнання. Звідси, і впливає велика кількість опублікованих робіт, серед яких оглядові статті [5 - 7].

Контактна взаємодія жорстких та пружних штампів з попередньо напруженими тілами представлена в працях [2,3,5,8–15]. Причому розглядаються або пружні потенціали конкретної структури [16], або завдання ставиться в загальному вигляді для стислих (нестисливих) тіл з потенціалом довільної структури на основі лінеаризованої теорії пружності [2,5,7,9,10]. В роботах [13, 15] розглянуто розв’язок контактних задач про тиск жорсткого та пружного кільцевого штампа на пружний шар з початковими напруженнями. А задача для двох попередньо напружених співвісних циліндрів та шару з початковими напруженнями представлена у статті [14].

Фундаментальні результати лінеаризованої теорії пружності, на якій ґрунтується дане дослідження, були одержані українським вченим, академіком НАН України проф. Гузем Олександром Миколайовичем [2,3,5,7,10]. Ним вперше було розв’язано ряд контактних задач для стисливих і нестисливих тіл одним із найбільш ефективних підходів для матеріалів з довільною формою пружного потенціалу та однорідними початковими напруженнями, що оснований на теорії функції комплексної змінної для плоских задач і теорії потенціалу для просторових задач. Подальшого розвитку теорія контактної взаємодії тіл з початковими напруженнями отримала у працях його учнів: С. Ю. Бабича, В. Б. Рудницького, П. П. Григоренка, Ю.П. Глухова, В. М. Назаренка, А.О. Рамського, М. М. Діхтярука, О. М. Панасюка, у тому числі й автора даної праці, та інших вітчизняних і зарубіжних вчених [8,9,11–15]. Існує також ряд інших узагальнюючих публікацій [4,11], які повністю або частково пов’язані з тематикою цієї праці.

У даній роботі з використанням співвідношень лінеаризованої теорії пружності [2,5,7,9,10] дослідження виконано в загальному вигляді для стисливих і нестисливих тіл для теорії великих початкових деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу.

При дослідженні контактної взаємодії тіл з початковими напруженнями розрізнятимемо наступні стани тіла: 1) недеформівний (природний) – відсутні деформації та напруження; 2) деформівний (початковий, основний) – присутні початкові (залишкові) деформації та напруження; 3) стан збурення. Усі величини, що будуть відноситися до деформівного стану як і в [1], відзначатимемо верхнім індексом «0», а величини збуреного стану як і у [1, 112] – штрихом. Другий та третій стани – це стани рівноваги тіла або його руху. Їх можна описати за допомогою нелінійної теорії пружності скінченних та першого і другого варіанту малих початкових деформацій. Причому: для першого варіанту нелінійної теорії малих початкових деформацій припускається, що відносними видовженнями та зсувами можна знехтувати, оскільки вони є меншими за одиницю; для другого варіанту нелінійної теорії малих початкових деформацій, крім припущень першого варіанту, додається припущення того, що деформівний стан тіла можна визначити за допомогою геометричної лінійної теорії, а в порівнянні з одиницею можна знехтувати компонентами вектора переміщень точок тіла у початковому стані, тобто  $\delta_{ij} + \partial U_j^0 / \partial x_i \approx \delta_{ij}$ , де  $\delta_{ij}$  – складові метричного тензора у недеформівному стані.

Крім того, величини третього стану будемо описувати як суму величин деформівного стану та їх відповідних збурень, які вважатимемо меншими за величини другого стану.

Співвідношення для третього стану назвемо співвідношеннями лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими (залишковими) напруженнями, якщо після їх лінеаризації відняти величини, які відповідають деформівному стану тіла. Тобто, якщо  $z=f(x)$  – деяке співвідношення нелінійної

теорії пружності, то співвідношення лінеаризованої теорії буде мати вигляд  $z \approx x(df/dx)|_{x=x_0}$  [2].

Для дослідження застосуємо координати початкового деформованого стану  $(y_1, y_2, y_3)$ , які пов'язані з лагранжевими координатами  $(x_1, x_2, x_3)$  співвідношеннями:  $y_i = \lambda_i x_i$ . Тут  $\lambda_i$  ( $i=1,2,3$ ) – коефіцієнти видовження, які визначають переміщення початкового стану. Вісь  $y_3$  спрямована по нормалі до області контакту.

Припустимо, що початкові стани контактуючих тіл – однорідні та рівні, а пружні потенціали – двічі неперервно-диференційовані функції алгебраїчних інваріантів тензора деформацій Гріна [2]. Матеріали тіл, вважаємо ізотропним стисливими або нестисливими з довільною структурою пружного потенціалу.

Всі величини, які відносяться до пружного циліндра позначаються верхнім індексом «(1)», шару – «(2)», а основи – «(3)».

У дослідженні будемо розглядати пружні ізотропні тіла (стисливі або нестисливі) з довільною формою пружного потенціалу [2]. У випадку ортотропних тіл, вважатимемо, що пружно-еквівалентні напрямки співпадають із напрямком осей координат у деформівному стані  $y_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ). Нехай початковий деформівний стан є однорідним та зона контакту пружних тіл буде міститися у площині  $y_3 = const$ . Будемо вважати, що початкові напруження діють вздовж зони контакту.

Оскільки в лінійній механіці матеріалів не беруться до уваги початкові напруження, то для їх врахування можна застосувати загальну нелінійну теорію пружності [4]. Але в цьому випадку досить складно буде отримати розв'язок у доступному вигляді. Тому при досить значній величині початкових напружень краще скористатись її лінеаризованим варіантом [2].

Таким чином, припустимо, що завжди будуть виконуватися наступні положення [2], які є основними для лінеаризованої теорії пружності:

1. Контактна взаємодія пружного скінченного циліндричного штампу з початковими напруженнями із попередньо напруженим пружним шаром, відбувається після виникнення у них початкового напруженого стану.

2. Додаткове зовнішнє навантаження (по відношенню до початкового стану) діє на пружний циліндричний штамп, викликаючи у шарі з початковими (залишковими) напруженнями значно менше збурення напружено - деформівного стану порівняно із відповідними величинами початкового напруженого стану.

3. Початковий напружено-деформівний стан тіл контактної взаємодії, має таку структуру, що в ділянці їх контакту його можна наближено вважати однорідним.

4. Розв'язок лінеаризованої задачі теорії пружності про контактну взаємодію попередньо напруженого циліндричного штампа з пружним шаром із початковими напруженнями – єдиний, тобто виконується умова [2, (2.23)].

Вище описані положення дають можливість застосовувати лінеаризовану теорію пружності до розв'язання цієї проблеми. Відзначимо, що зокрема друге положення може порушуватись в околі точок зміни граничних умов [2], в яких контактні напруження зростають до безмежності. Детальне обговорення цього явища у теорії контактних задач лінійної та лінеаризованої теорії пружності виконано у працях [6,7], висновок з чого полягає в наступному: у розв'язках контактних задач для пружних та жорстких тіл виникають особливості степеневого порядку  $O(\rho^{1-\gamma})$ , де  $\rho$  – відстань від точки до межі контакту;  $\gamma$  – параметр, який виражається із деякого трансцендентного рівняння [2] і залежить від пружних сталих тіл, які контактують, та від структури пружного потенціалу. У таких точках напруження від контактної взаємодії тіл фізичного змісту не несуть, але і на обрахування інтегральних характеристик контактних задач не мають впливу.

Отже, сформулюємо постановку задачі: Розглянемо пружний циліндричний штамп (рис.1.) радіуса  $R$  і висотою  $H$  з початковими напруженнями, що втискається у пружний шар під дією сили  $P$  після виникнення там початкового деформівного стану.

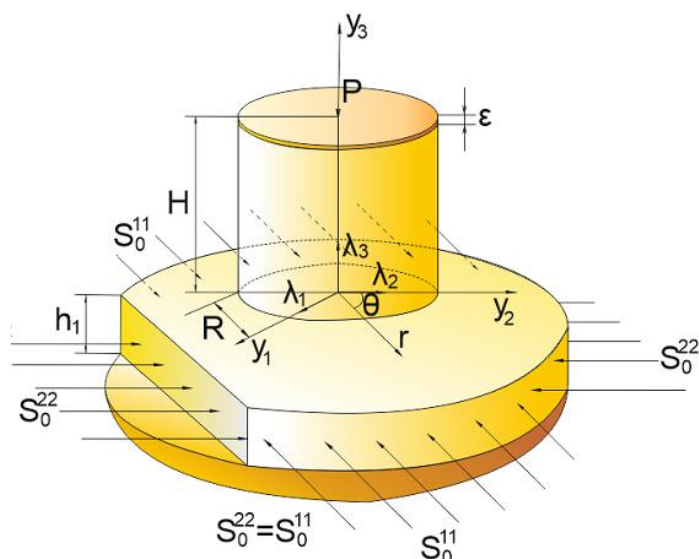


Рисунок 1. Циліндричний штамп, шар та основа з початковими напруженнями

Товщина шару в початковому деформованому стані пов'язана з товщиною у недеформованому стані відношенням  $h_1 = \lambda_3 h_2$ . Будемо рахувати, що зовнішнє навантаження прикладене тільки до вільного торця пружного штампа, під дією якого всі точки штампа переміщуються у напрямку осі симетрії  $y_3$  на одну і ту ж саму величину  $\varepsilon$ . Вважатимемо, що поверхні поза ділянкою контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил, а в зоні контакту відсутнє тертя, а переміщення та напруження – неперервні.

Припустимо, що початковий стан тіл – однорідний, і виконуються співвідношення [2]:

$$y_m = x_m + U_m^0, U_m^0 = \delta_{mi} (\lambda_m - 1) \lambda_i^{-1} y_i, (i, m = 1, 2, 3)$$

Тоді основне рівняння в переміщеннях для стисливих тіл має вигляд формул

$$L'_{m\alpha} U_\alpha = 0, L'_{m\alpha} = \omega'_{ij\alpha\beta} \partial^2 / \partial y_i \partial y_\beta, (i, m, \alpha, \beta = \overline{1, 3}) \quad (1)$$

а для нестисливих тіл разом із умовою нестисливості:

$$L'_{m\alpha} U_\alpha + q'_{\alpha m} \partial p' / \partial y_\alpha = 0, L'_{m\alpha} = \kappa'_{im\alpha\beta} \partial^2 / \partial y_i \partial y_\beta, \quad (2)$$

$$q'_{ij} \partial U_j / \partial y_i = 0, q'_{ij} = \lambda_i q_{ij}, (i, j, m, \alpha, \beta = \overline{1, 3}).$$

Вирази для визначення складових тензора напружень для стисливих і нестисливих тіл запишемо у вигляді:

$$Q'_{ij} = \omega'_{ij\alpha\beta} \frac{\partial U_\alpha}{\partial y_\beta}, \quad Q'_{ij} = \kappa_{ij\alpha\beta} \frac{\partial U_\alpha}{\partial y_\beta} + q'_{ij} p, \quad \omega'_{ij\alpha\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \omega_{ij\alpha\beta}, \quad \kappa'_{ij\alpha\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \kappa_{ij\alpha\beta},$$

При однорідних початкових напруженнях  $S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0$ ;  $S_0^{33} = 0$ ;  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$  розв'язки рівнянь (1), (2) представимо через циліндричні координати  $(r, \theta, z_i)$  у вигляді розв'язків рівняння:

$$(\Delta_1 + \xi_2'^2 \partial^2 / \partial y_3^2)(\Delta_1 + \xi_3'^2 \partial^2 / \partial y_3^2) \tilde{\chi} = 0, \quad (3)$$

$$\text{де } \Delta_1 = \partial^2 / \partial r^2 + r^{-1} \partial / \partial r.$$

Враховуючи умову існування єдиного розв'язку лінеаризованої теорії пружності для стисливих і нестисливих тіл [2], можливі два варіанти представлення загального розв'язку (3): випадок рівних коренів ( $\xi_2'^2 = \xi_3'^2$ ) та випадок нерівних коренів ( $\xi_2'^2 \neq \xi_3'^2$ ).

У випадку рівних коренів рівняння (3), тобто:

$$\tilde{\chi} = \tilde{\chi}_1 + y_3 \tilde{\chi}_2, \quad (\Delta_1 + \xi_2'^2 \partial^2 / \partial y_3^2) \tilde{\chi}_1 = 0, \quad (\Delta_1 + \xi_2'^2 \partial^2 / \partial y_3^2) \tilde{\chi}_2 = 0 \quad (4)$$

У випадку нерівних коренів рівняння (3):

$$\tilde{\chi} = \tilde{\chi}_1 + \tilde{\chi}_2, \quad (\Delta_1 + \xi_2'^2 \partial^2 / \partial y_3^2) \tilde{\chi}_1 = 0, \quad (\Delta_1 + \xi_3'^2 \partial^2 / \partial y_3^2) \tilde{\chi}_2 = 0 \quad (5)$$

У системі кругових циліндричних координат  $(r, \theta, z_i)$ , де  $z_i = v_i^{-1} y_3$ ,  $v_i = \sqrt{n_i}$ , ( $i = \overline{1, 2}$ ),  $n_1 = \xi_2'^2$ ,  $n_2 = \xi_3'^2$ , такій постановці відповідають граничні умови:

1) На торці циліндра  $z_i = H v_i^{-1}$ , де  $v_i = \sqrt{n_i}$ , ( $i = \overline{1, 2}$ ):

$$u_3^{(1)} = -\varepsilon, \quad Q_{3r}^{(1)} = 0, \quad (0 \leq r \leq R) \quad (6)$$

2) На межі пружного шару в ділянці контакту  $z_i = 0$ , ( $i = \overline{1, 2}$ ):

$$u_3^{(1)} = u_3^{(2)}, \quad Q_{33}^{(1)} = Q_{33}^{(2)}, \quad Q_{3r}^{(1)} = Q_{3r}^{(2)} = 0, \quad (0 \leq r \leq R) \quad (7)$$

3) На межі пружного шару поза ділянкою контакту  $z_i = 0$ , ( $i = \overline{1, 2}$ ):

$$Q_{33}^{(2)} = 0, \quad Q_{3r}^{(2)} = 0, \quad (R \leq r < \infty) \quad (8)$$

4) На боковій поверхні пружного штампу  $r = R$ :

$$Q_{rr}^{(1)} = 0, \quad Q_{3r}^{(1)} = 0, \quad (0 \leq z_i \leq H v_i^{-1}) \quad (9)$$

5) На нижній поверхні шару,  $z_i = -\lambda_3 h_2 v_i^{-1} = -H v_i^{-1}$ , ( $i = \overline{1, 2}$ ):

$$u_3^{(2)} = 0, \quad u_r^{(2)} = 0, \quad (0 \leq r < \infty); \quad (10)$$

Умова рівноваги

$$P = -2\pi R^2 \int_0^1 \rho Q_{33}^{(2)}(0, \rho) d\rho, \quad (11)$$

що встановлює зв'язок між осіданням торця і рівнодіючою навантаження  $P$ .

Для визначення напружено-деформівного стану у пружному циліндрі у випадку нерівних коренів  $n_1 \neq n_2$  загальний розв'язок (5) визначального рівняння (3) приймемо у вигляді:

$$\begin{aligned} \tilde{\chi} = & 0,5\varepsilon \left\{ \theta_8^{-1} (r^2 - z_1^2 - z_2^2) - \chi_0 \left[ r^2 (\theta_8^{-1} + (2H\theta_6)^{-1} (z_1 + z_2)) - \theta_8^{-1} (z_1^2 + z_2^2) - (2H\theta_6)^{-1} (z_1^3 + z_2^3) \right] \right\} - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ b_3^{(k)} \left[ s_0 \frac{I_1(\gamma_k v_2 R)}{I_1(\gamma_k v_1 R)} I_0(\gamma_k v_1 r) \sin(\gamma_k z_1 v_1) + I_0(\gamma_k v_2 r) \sin(\gamma_k z_2 v_2) \right] - J_0(\alpha_k r) \left[ \tilde{S}_2(\alpha_k z_1) + \tilde{S}_3(\alpha_k z_2) \right] \right\} \chi_k \end{aligned} \quad (12)$$

А для випадку рівних коренів  $n_1 = n_2$  загальний розв'язок (4) визначального рівняння (3) матимемо:

$$\begin{aligned} \hat{\chi} = & \varepsilon \left\langle v_1 z_1 (1 + z_1) \left[ (m_2 - 1)^{-1} + \chi_0 \left( (1 - m_2)^{-1} - 2E(3H\theta_2)^{-1} (3r^2 - 2z_1^2) \right) \right] \right\rangle + \\ & + R \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \left[ R(2\gamma_k)^{-1} b_1^{(k)} \left( H \left( 1 + \frac{s_0(1 - I_0(v_1 \gamma_k R))}{v_1 \gamma_k R I_1(v_1 \gamma_k R)} \right) + z_1 \right) I_0(\gamma_k v_1 r) \sin(\gamma_k z_1 v_1) + J_0(\alpha_k r) \mu_k^{-1} \left( \tilde{S}_2(\alpha_k z_1) + z_1 \tilde{S}_3(\alpha_k z_1) \right) \right] \end{aligned} \quad (13)$$

де  $J_\nu(x)$ ,  $I_\nu(x)$  – функції Бесселя дійсного та уявного аргументу,

$$s_0 = \frac{1 + m_2}{1 + m_1}, \quad \theta_8 = m_1 n_1^{-1} + m_2 n_2^{-1}, \quad \theta_6 = m_1 v_1^{-3} + m_2 v_2^{-3},$$

$$b_3^{(k)} = 4\varepsilon R^2 J_0(\mu_k) \left[ \frac{\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0}{\mu_k^2 + (\gamma_k v_1 R)^2} - \frac{v_2}{v_1 s_0} \frac{\tilde{c}_2 - \tilde{c}_0}{\mu_k^2 + (\gamma_k v_2 R)^2} \right] (v_1 H \gamma_k^3 I_1(\gamma_k v_2 R) [v_2 W_k(2) - v_1 s_0 W_k(1)])^{-1},$$

$$W(j) = \frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_j) I_0(\gamma_k v_j R)}{I_1(\gamma_k v_j R)} + \frac{1 - \tilde{c}_0}{\gamma_k v_j R}, \quad \theta_2 = E \left( 8m_1 (1 + H) n_1^{-1} - 4H v_1^{-1} + (1 - m_2) R^2 H^{-1} \right),$$

$$\tilde{c}_0 = \begin{cases} \omega'_{1111} \omega'_{1122}; \\ \lambda_1 q_1 (\lambda_3 q_3)^{-1} (\kappa'_{1133} + \kappa'_{1313}) \kappa'_{1122}; \end{cases} \quad \tilde{c}_i = \begin{cases} \lambda_3 \omega'_{1133} m_i \omega'_{1122} n_i^{-1}; \\ (\kappa'_{1133} m_i - \kappa'_{3113}) \kappa'_{1122} n_i^{-1}; \end{cases} \quad (i = \overline{1, 2})$$

$$\begin{aligned} b_1^{(k)} = & J_0(\mu_k) \gamma_k t_{00} \left\langle t_{14} sh^2(\alpha_k H v_1^{-1}) ch(\alpha_k H v_1^{-1}) + t_{11} \left[ (1 + m_1) sh^2(\alpha_k H v_1^{-1}) \left[ t_{12} sh(\alpha_k H v_1^{-1}) + t_{13} \right] + \right. \right. \\ & \left. \left. + t_{11} \left[ (1 + m_1) sh^2(\alpha_k H v_1^{-1}) \left[ t_{12} sh(\alpha_k H v_1^{-1}) + t_{13} \right] + ch(\alpha_k H v_1^{-1}) \times \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + ch(\alpha_k H v_1^{-1}) \left\{ t_{10} ch(\alpha_k H v_1^{-1}) \left[ c_0 sh(\alpha_k H v_1^{-1}) + c_1 (1 - ch(\alpha_k H v_1^{-1})) \right] + c_1 (1 + m_2) sh(\alpha_k H v_1^{-1}) (1 - \right. \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -ch(\alpha_k H v_1^{-1})) \Big] \Big/ \left\langle (I_0(\gamma_k v_1 R) - 1) \left\{ t_{11} t_{21} t_{00} sh^2(\alpha_k H v_1^{-1}) + t_{22} \left[ c_1 t_{10} ch(\alpha_k H v_1^{-1}) (1 + ch(\alpha_k H v_1^{-1})) + \right. \right. \right. \\
& + (1 + m_1) sh(\alpha_k H v_1^{-1}) (t_{12} ch(\alpha_k H v_1^{-1}) + c_1 s_0 + t_{23} sh(\alpha_k H v_1^{-1})) \Big] \Big\} + c_1 (ch(\alpha_k H v_1^{-1}) - 1) \left[ t_{10} ch(\alpha_k H v_1^{-1}) + \right. \\
& \left. \left. + (1 + m_2) sh(\alpha_k H v_1^{-1}) \right] + sh(\alpha_k H v_1^{-1}) \left[ c_0 t_{10} ch(\alpha_k H v_1^{-1}) - t_{24} sh(\alpha_k H v_1^{-1}) \right] \right\rangle,
\end{aligned}$$

$$\tilde{S}_2(\alpha_k z_1) = R s_0 \mu_k^{-1} ch(\mu_k z_1 R^{-1}) + E^{(k)} sh(\mu_k z_1 R^{-1}), \quad \tilde{S}_3(\alpha_k z_2) = -sh(\mu_k z_1 R^{-1}) - M^{(k)} ch(\mu_k z_1 R^{-1}),$$

$$M^{(k)} = M_k N_k^{-1}, \quad E^{(k)} = -E_k N_k^{-1}.$$

Тоді вирази для компонент вектора переміщення і тензора напруження для циліндричного штампa будемо шукати у вигляді:

для  $n_1 \neq n_2$ :

$$\begin{aligned}
U_r^{(1)} &= \varepsilon \theta_+ r (2H\theta_6)^{-1} \chi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \gamma_k^2 b_3^{(k)} \left[ s_0 I_1(\gamma_k v_2 R) (I_1(\gamma_k v_1 R))^{-1} v_1 I_1(v_1 \gamma_k r) \cos(\gamma_k z_1 v_1) - v_2 I_1(v_2 \gamma_k r) \cos(\gamma_k z_2 v_2) \right] + \right. \\
& \left. + \alpha_k^2 J_1(\alpha_k r) \left( \tilde{S}_4(\alpha_k z_1) v_1^{-1} + \tilde{S}_5(\alpha_k z_2) v_2^{-1} \right) \right\} \chi_k \\
U_3^{(1)} &= -\varepsilon \left\{ 1 + \chi_0 \left[ \frac{1}{H\theta_6} \left( \frac{m_1 z_1}{n_1} + \frac{m_2 z_2}{n_2} \right) - 1 \right] \right\} - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \gamma_k^2 b_3^{(k)} \left[ s_0 \frac{I_1(\gamma_k v_2 R)}{I_1(\gamma_k v_1 R)} m_1 I_0(\gamma_k v_1 r) \sin(\gamma_k z_1 v_1) - m_2 I_0(\gamma_k v_2 r) \sin(\gamma_k z_2 v_2) \right] + \right. \\
& \left. + \alpha_k^2 J_0(\alpha_k r) \left( \frac{m_1 \tilde{S}_2(\alpha_k z_1)}{n_1} + \frac{m_2 \tilde{S}_3(\alpha_k z_2)}{n_2} \right) \right\} \chi_k \\
Q_{33}^{(1)} &= C_{44} (1 + m_1) l_1 \left\langle -\frac{\varepsilon}{H\theta_6} \chi_0 \left[ \frac{1}{v_1} + \frac{s}{v_2} \right] - \right.
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
& \left. - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \gamma_k^3 b_3^{(k)} \left[ s_0 \frac{I_1(\gamma_k v_2 R)}{I_1(\gamma_k v_1 R)} n_1 I_0(\gamma_k v_1 r) \cos(\gamma_k z_1 v_1) - s n_2 I_0(\gamma_k v_2 r) \cos(\gamma_k z_2 v_2) \right] + \alpha_k^3 J_0(\alpha_k r) \left( \frac{\tilde{S}_4(\alpha_k z_1)}{v_1} + \frac{s \tilde{S}_5(\alpha_k z_2)}{v_2} \right) \right\} \chi_k \right\rangle \\
Q_{3r}^{(1)} &= C_{44} (1 + m_1) \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ s_0 \gamma_k^3 b_3^{(k)} \left[ v_2 I_1(\gamma_k v_2 r) \sin(\gamma_k z_2 v_2) - v_1 I_1(\gamma_k v_2 R) (I_1(\gamma_k v_1 R))^{-1} I_1(\gamma_k v_1 r) \sin(\gamma_k z_1 v_1) \right] + \right. \\
& \left. + \alpha_k^3 J_1(\alpha_k r) \left[ n_1^{-1} \tilde{S}_2(\alpha_k z_1) + s_0 n_2^{-1} \tilde{S}_3(\alpha_k z_2) \right] \right\} \chi_k
\end{aligned}$$

для  $n_1 = n_2$ :

$$\begin{aligned}
U_r^{(1)} &= \varepsilon \left\langle \frac{4E v_1}{H\theta_2} \chi_0 r \left( \frac{1}{v_1} + 2z_1 \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \left\{ \frac{R^2}{2} b_1^{(k)} \gamma_k v_1 I_1(v_1 \gamma_k r) \left[ \left( H \left( 1 + \frac{s_0 (1 - I_0(v_1 \gamma_k R))}{v_1 \gamma_k R I_1(v_1 \gamma_k R)} \right) + v_1 z_1 \right) \cos(\gamma_k v_1 z_1) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\sin(\gamma_k v_1 z_1)}{\gamma_k} - J_1(\alpha_k r) \left[ \frac{\alpha_k}{v_1} \left( \tilde{S}_4(\alpha_k z_1) + v_1 z_1 \tilde{S}_5(\alpha_k z_1) \right) - \tilde{S}_3(\alpha_k z_1) \right] \right] \right\} \right\rangle
\end{aligned} \tag{15}$$

$$U_3^{(1)} = \varepsilon \left\langle (m_2 - 1) v_1^{-1} + \left[ 1 - 2E(H\theta_2)^{-1} (r^2 - 2z_1^2 + 4m_1 z_1 (v_1^{-1} + z_1)) \right] \right\rangle \chi_0 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \left\{ 0,5 R^2 b_1^{(k)} \gamma_k I_0(\gamma_k v_1 r) \left[ \left( H \left( 1 + s_0 (1 - I_0(v_1 \gamma_k R)) \right) (v_1 \gamma_k R I_1(v_1 \gamma_k R))^{-1} \right) + v_1 z_1 \right] m_1 \sin(\gamma_k v_1 z_1) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + (1 - m_2) \cos(\gamma_k v_1 z_1) \gamma_k^{-1} ] - J_0(\alpha_k r) n_1^{-1} \left[ m_1 \alpha_k \left( \tilde{S}_2(\alpha_k z_1) + z_1 v_1 \tilde{S}_3(\alpha_k z_1) \right) + (m_2 - 1) v_1 \tilde{S}_5(\alpha_k z_1) \right] \Big\} \\
& \mathcal{Q}_{33}^{(1)} = C_{44} \varepsilon \left\langle -8 E v_1 (H \theta_2 R^2)^{-1} \chi_0 \left[ (1 + m_1) l_1 (v_1^{-1} + z_1) + (1 + m_2) l_2 z_1 \right] + \right. \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \left\{ 0,5 R^2 b_1^{(k)} \gamma_k n_1 I_0(\gamma_k v_1 r) \left[ (1 + m_1) l_1 \gamma_k \left( H \left( 1 + s_0 (1 - I_0(v_1 \gamma_k R)) (v_1 \gamma_k R I_1(v_1 \gamma_k R))^{-1} \right) + v_1 z_1 \right) \cos(\gamma_k v_1 z_1) + \right. \right. \\
& \left. \left. + (1 + m_2) l_2 \sin(\gamma_k v_1 z_1) \right] - \alpha_k J_0(\alpha_k r) \left[ (1 + m_1) l_1 \alpha_k v_1^{-1} \left( \tilde{S}_4(\alpha_k z_1) + v_1 z_1 \tilde{S}_5(\alpha_k z_1) \right) + (1 + m_2) l_2 \tilde{S}_3(\alpha_k z_1) \right] \right\} \Big\} \\
& \mathcal{Q}_{3r}^{(1)} = C_{44} \varepsilon \left\langle \frac{4 E r (1 + m_2)}{H \theta_2} \chi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \left\{ \frac{R^2}{2} \gamma_k v_1 b_1^{(k)} I_1(\gamma_k v_1 r) \left[ (1 + m_1) \gamma_k \left( H \left( 1 + \frac{s_0 (1 - I_0(v_1 \gamma_k R))}{v_1 \gamma_k R I_1(v_1 \gamma_k R)} \right) + v_1 z_1 \right) \sin(\gamma_k v_1 z_1) - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - (1 + m_2) \cos(\gamma_k v_1 z_1) \right] + \frac{\alpha_k}{v_1} J_1(\alpha_k r) \left[ \alpha_k (1 + m_1) \left( \tilde{S}_2(\alpha_k z_1) + v_1 z_1 \tilde{S}_3(\alpha_k z_1) \right) + (1 + m_2) \tilde{S}_5(\alpha_k z_1) \right] \right\} \Big\}
\end{aligned}$$

де  $\theta_+ = v_1^{-1} + v_2^{-1}$ ,

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_2(\alpha_k z_1) &= R^2 \varepsilon \mu_k^{-2} \left[ ch(\alpha_k z_1) - cth(\mu_k l v_1^{-1}) sh(\alpha_k z_1) \right], \quad \tilde{S}_4(\alpha_k z_1) = R^2 \varepsilon \mu_k^{-2} \left[ sh(\alpha_k z_1) - cth(\mu_k l v_1^{-1}) ch(\alpha_k z_1) \right], \\
\tilde{S}_3(\alpha_k z_2) &= \frac{n_2 R^2 \varepsilon}{n_1 \mu_k^2 s_0} \left[ cth(\mu_k l v_2^{-1}) sh(\alpha_k z_2) - ch(\alpha_k z_2) \right], \quad \tilde{S}_5(\alpha_k z_2) = \frac{n_2 R^2 \varepsilon}{n_1 \mu_k^2 s_0} \left[ cth(\mu_k l v_2^{-1}) ch(\alpha_k z_2) - sh(\alpha_k z_2) \right].
\end{aligned}$$

Напружено-деформівний стан у пружному шарі з початковими (залишковими) напруженнями визначимо з [12] через гармонійні функції у вигляді інтегралів Ханкеля. Задовольнивши третю умову (7), другу – (8) і умови (10), після ряду перетворень матимемо

для нерівних коренів  $n_1 \neq n_2$

$$\begin{aligned}
u_r^{(2)} &= -\hat{T}^3(\Omega_+^2; S_1^1; K_0^1; s_3; 1; 1), & u_3^{(2)} &= -m_1 v_1^{-1} \hat{T}^3(\Omega_-^2; S_1^0; K_0^0; s_3; s_2; 1) \quad (16) \\
\mathcal{Q}_{33}^{(2)} &= C_{44} (1 + m_1) l_1 R^{-1} \hat{T}^3(\Omega_+^2; S_2^0; K_1^0; s_3; s; 1), & \mathcal{Q}_{3r}^{(2)} &= C_{44} (1 + m_1) s_3 (v_1 R)^{-1} \hat{T}^3(\Omega_-^2; S_2^1; K_1^1; 1; 1; 1)
\end{aligned}$$

для рівних коренів  $n_1 = n_2$ :

$$u_r^{(2)} = \varepsilon (\pi \theta_3)^{-1} \tilde{T}^1(\Omega_+^3; S_1^1; N_0^1; K_0^1; 1), \quad u_3^{(2)} = m_1 \varepsilon (\pi \theta_3 v_1)^{-1} \tilde{T}^1(\Omega_-^3; S_1^0; N_0^0; K_0^0; s_1), \quad (17)$$

$$\mathcal{Q}_{33}^{(2)} = (1 + m_1) \varepsilon l_1 C_{44} (\pi \theta_3 R)^{-1} \tilde{T}^1(\Omega_+^3; S_2^0; N_1^0; K_1^0; s), \quad \mathcal{Q}_{3r}^{(2)} = -(1 + m_1) \varepsilon C_{44} (\pi \theta_3 R v_1)^{-1} \tilde{T}^1(\Omega_-^3; S_2^1; N_1^1; K_1^1; s_0),$$

$$\text{де } s_1 = \frac{m_1 - 1}{m_1}, \quad s_2 = \frac{m_2}{m_1} \frac{v_1}{v_2}, \quad s_3 = s_0 \frac{v_1}{v_2}, \quad s = s_0 \frac{l_2}{l_1},$$

$$\begin{aligned}
\hat{T}^3(\Omega_{\pm}^n; S_{m_1}^n; K_{m_2}^n; \bar{\beta}_1; \bar{\beta}_2; l_1) &= \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} C_j^* \left[ l_1 \Omega_{\pm}^n (S_{j+m_1}^n; 1; 0; \bar{\beta}_1; \bar{\beta}_2; 0) + \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{\infty} a_i \Omega_{\pm}^n (S_{j+m_1}^n; h; 0; \bar{\beta}_1; \bar{\beta}_2; k_i) \right] + \\
& \frac{\varepsilon}{\pi \theta_3} (\chi_0 - 1) \left[ l_1 \Omega_{\pm}^n (S_{m_1}^n; 1; 0; \bar{\beta}_1; \bar{\beta}_2; 0) + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \Omega_{\pm}^n (S_{m_1}^n; h; 0; \bar{\beta}_1; \bar{\beta}_2; k_i) \right] - \\
& - \frac{\varepsilon \theta_4}{\pi \theta_3} \sum_{j=1}^{\infty} \chi_j \left[ l_1 \Omega_{\pm}^n (K_{m_2}^n; 1; \mu_j; \bar{\beta}_1; \bar{\beta}_2; 0) + \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{\infty} a_i \Omega_{\pm}^n (K_{m_2}^n; h; \mu_j; \bar{\beta}_1; \bar{\beta}_2; k_i) \right],
\end{aligned}$$

$$\Omega_{\pm}^2(\hat{L}_m^n, t, \mu, k, a, \theta) = k \left[ \hat{L}_m^n \left( \frac{\rho}{t}, \mu, -\frac{z_1}{tR} + \theta \right) \pm \hat{L}_m^n \left( \frac{\rho}{t}, \mu, \frac{z_1}{tR} + \frac{h_1}{tRv_1} + \theta \right) + \hat{L}_m^n \left( \frac{\rho}{t}, \mu, -\frac{z_1}{tR} - \frac{h_1}{tRv_1} + \theta \right) \right] -$$

$$- a \left[ \hat{L}_m^n \left( \frac{\rho}{t}, \mu, \frac{z_2}{tR} + \theta \right) \pm \hat{L}_m^n \left( \frac{\rho}{t}, \mu, \frac{z_2}{tR} + \frac{h_1}{tRv_2} + \theta \right) + \hat{L}_m^n \left( \frac{\rho}{t}, \mu, -\frac{z_2}{tR} - \frac{h_1}{tRv_2} + \theta \right) \right], \quad \hat{L}_m^n(t, 0, u) = \hat{L}_m^n(t, u).$$

$$\tilde{T}^1(\Omega_{\pm}^l; S_{m_1}^n; N_{m_2}^n; K_{m_3}^n; k; a) = (1 + a_0) \langle (1 - \chi_0) \cdot \Omega_{\pm}^l(S_{m_1}^n; 0; k; a; 0) - \frac{\theta_3}{\varepsilon} \sum_{j=0}^{\infty} C_j^{**} \Omega_{\pm}^l(S_{j+m_1}^n; 0; k; a; 0) -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \Omega_{\pm}^l(K_{m_3}^n; \mu_k; k; a; 0) - \frac{2(m_2-1)R^2}{\theta_2} \chi_0 \Omega_{\pm}^l(N_{m_2}^n; 0; k; a; 0) +$$

$$+ \theta_4 \frac{(m_2-1)R^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_1^{(k)} \chi_k \Omega_{\pm}^l(K_{m_3}^n; i\gamma_k v_1 R; k; a; 0) \rangle + \sum_{\tau=1}^{\infty} a_{\tau} \langle (1 - \chi_0) \Omega_{\pm}^l(S_{m_1}^n; 0; k; a; v_1 \tau) -$$

$$- \frac{\theta_3}{\varepsilon} \sum_{j=0}^{\infty} C_j^{**} \Omega_{\pm}^l(S_{j+m_1}^n; 0; k; a; v_1 \tau) - \frac{2(m_2-1)R^2}{\theta_2} \chi_0 \Omega_{\pm}^l(N_{m_2}^n; 0; k; a; v_1 \tau) +$$

$$+ \theta_4 \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \Omega_{\pm}^l(K_{m_3}^n; \mu_k; k; a; v_1 \tau) + \frac{(m_2-1)R^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_1^{(k)} \chi_k \Omega_{\pm}^l(K_{m_3}^n; i\gamma_k v_1 R; k; a; v_1 \tau) \rangle$$

$$\Omega_{\pm}^3(\hat{L}_m^n, \mu, k, \theta) = (A_1^{02} - s_0) \hat{L}_m^n(\rho, \mu, z_1 R^{-1} - \theta) + (A_1^{12} - 2k) \hat{L}_m^n(\rho, \mu, 2h_1(Rv_1)^{-1} + z_1 R^{-1} - \theta) +$$

$$+ (A_1^{22} - 2k) \hat{L}_{m+1}^n(\rho, \mu, 2h_1(Rv_1)^{-1} + z_1 R^{-1} - \theta) \pm (A_1^{02} + s_0 - 2k) \hat{L}_m^n(\rho, \mu, -z_1 R^{-1} - \theta) \pm 2z_1 R^{-1} \hat{L}_{m+1}^n(\rho, \mu, -z_1 R^{-1} - \theta) \pm$$

$$\pm (A_1^{12} - 2k) \hat{L}_m^n(\rho, \mu, 2h_1(Rv_1)^{-1} - z_1 R^{-1} - \theta) \pm (A_1^{22} + 2z_1 R^{-1}) \hat{L}_{m+1}^n(\rho, \mu, 2h_1(Rv_1)^{-1} - z_1 R^{-1} - \theta),$$

$$\hat{L}_m^n(t, 0, u) = \hat{L}_m^n(t, u), \quad A_1^{02} = s_0(s_0 - s_1)(s_0 + s_1)^{-1}, \quad A_1^{12} = 2s_0(s_0 - s_1)(s_0 + 2s_1)(s_0 + s_1)^{-2}, \quad A_1^{22} = h_1(s_0 v_1 R)^{-1} A_1^{12},$$

$$S_n^m(\rho; z) = \int_0^{\infty} \eta^{n-2} \sin \eta e^{-z \cdot \eta} J_m(\eta \rho) d\eta, \quad K_n^m(\rho; \mu_k; z) = \int_0^{\infty} \eta^n \psi_0(\eta, \mu_k) e^{z \cdot \eta} J_m(\eta \rho) d\eta,$$

$$N_n^m(\rho; z) = \int_0^{\infty} \eta^n \psi_1(\eta, 0) e^{z \cdot \eta} J_m(\eta \rho) d\eta, \quad C_j^{**} - \text{коєфіцієнти розкладу у ряд } F(\eta), \quad k_i, a_i -$$

деякі константи ( $i=0, 1, 2, \dots$ ).

В (12)-(17) значення коєфіцієнтів  $n_i$ ,  $m_i$ ,  $c_{44}$ ,  $l_i$  наведені у [2].

Використовуючи розв'язки для циліндра (12) - (15) й задовольняючи третю умову (7) та другу умову (9), знайдемо власні значення задачі (6) – (11)

для випадку нерівних коренів  $n_1 \neq n_2$ :

$$\gamma_k = \frac{\pi(2k+1)}{H}, \quad \alpha_k = \frac{\mu_k}{R}, \quad \text{де } J_1(\mu_k) = 0. \quad (18)$$

для випадку рівних коренів  $n_1 = n_2$ :

$$\alpha_k = \frac{\mu_k}{R}, \quad \gamma_k = 2\pi k H^{-1}, \quad (k=0,1,2,\dots) \quad (19)$$

З допомогою перших умов (7) і (8) можна визначити невідому функцію  $F(\eta)$  з парних інтегральних рівнянь для нерівних коренів

$$\int_0^{\infty} F(\eta) \eta^{-1} J_0(\eta \rho) d\eta = f(\rho), \quad (\rho < 1), \quad \int_0^{\infty} F(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = 0, \quad (\rho > 1), \quad (20)$$

де для випадку нерівних коренів  $n_1 \neq n_2$

$$f(\rho) = \frac{\varepsilon}{\theta_3} (\chi_0 - 1 - \theta_4 \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k J_0(\mu_k \rho) + \frac{\theta_3}{\varepsilon} \int_0^{\infty} \frac{F(\eta)}{\eta} G(\eta h) J_1(\eta \rho) d\eta), \quad \theta_4 = \frac{v_1(m_2 - 1) - m_1 s_0}{n_1}, \quad \theta_3 = \frac{m_1}{v_1} (s_1 - s_0),$$

для випадку рівних коренів  $n_1 = n_2$ :

$$f(\rho) = -\varepsilon \theta_3^{-1} \left( 1 - \chi_0 - 2(m_2 - 1) \frac{R^2}{\theta_2} \chi_0 \rho + \right. \\ \left. + \theta_4 \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k J_0(\mu_k \rho) + 0,5(m_2 - 1) R^2 \sum_{k=1}^{\infty} b_1^{(k)} \chi_k I_0(\gamma_k v_1 R \rho) \right) + \int_0^{\infty} \eta^{-1} F(\eta) G(\eta h) J_1(\eta \rho) d\eta$$

де  $\theta_3 = m_1 (s_1 - s_0) v_1^{-1}$ .

Застосування формули звернення до (16) призводить до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду відносно функції  $F(\eta)$

для випадку нерівних коренів  $n_1 \neq n_2$ :

$$\frac{F(\eta)}{\eta} = \frac{2\varepsilon}{\pi \theta_3} \left( (\chi_0 - 1) \psi_0(\eta, 0) - \theta_4 \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \psi_0(\eta, \mu_k) + \frac{\theta_3}{\varepsilon} \int_0^{\infty} \frac{F(u)}{u} G(uh) \psi_0(\eta, u) du \right), \quad (21)$$

для випадку рівних коренів  $n_1 = n_2$ :

$$\frac{F(\eta)}{\eta} = -\frac{2\varepsilon}{\pi \theta_3} \left( (1 - \chi_0) \psi_0(\eta, 0) - 2(m_2 - 1) \frac{R^2}{\theta_2} \chi_0 \psi_1(\eta, 0) + \theta_4 \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \psi_0(\eta, \mu_k) + \right. \\ \left. + 0,5(m_2 - 1) R^2 \sum_{k=1}^{\infty} b_1^{(k)} \chi_k \psi_0(\eta, i \gamma_k v_1 R) \right) + 2\pi^{-1} \int_0^{\infty} u^{-1} F(u) G(uh) \psi_0(\eta, u) du \quad (22)$$

де  $\psi_n(x, y) = \int_0^1 t^n \cos xt \cos ytdt$ .

Задовольнивши другу граничну умову (7), розв'язок (21)-(22) будемо шукати методом послідовних наближень, взявши за нульове наближення функцію

$$F^{(0)}(\eta)/\eta = 2\varepsilon(\pi\theta_3)^{-1} p(\eta),$$

де для випадку нерівних коренів  $n_1 \neq n_2$ :

$$p(\eta) = (\chi_0 - 1)\psi_0(\eta, 0) - \theta_4 \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \psi_0(\mu_k \eta).$$

для випадку рівних коренів  $n_1 = n_2$ :

$$p(\eta) = \varepsilon \left( (1 - \chi_0)\psi_0(\eta, 0) - 2(m_2 - 1)R^2 \theta_2^{-1} \chi_0 \psi_1(\eta, 0) + \theta_4 \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \psi_0(\eta, \mu_k) + \right. \\ \left. + 0,5(m_2 - 1)R^2 \sum_{k=1}^{\infty} b_1^{(k)} \chi_k \psi_0(\eta, i\gamma_k v_1 R) \right)$$

Наступні наближення визначимо за формулою

$$\frac{F^{(j)}(\eta)}{\eta} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{F^{(j-1)}(u)}{u} G(uh) J_0(\eta u) du$$

Розв'язок (14) запишемо у вигляді

$$F(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(\eta). \quad (23)$$

Відмітимо, що процес послідовних наближень (23) збіжний при  $h > 1$  та  $\lambda_1 > \lambda_{kp}$ , враховуючи дослідження проведені [2].

Задовольнивши перші дві граничні умови (7) з урахуванням ортогональності бesselевих функцій  $J_0(\mu_k \rho)$ , для визначення сталих  $\chi_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) отримаємо нескінченну квазірегулярну систему алгебраїчних рівнянь

$$\vartheta_k \chi_k + \sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_{kn} \chi_n = \varpi_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (24)$$

Коефіцієнти системи можна представити у вигляді

де для випадку нерівних коренів  $n_1 \neq n_2$ :

$$\vartheta_0 = \varpi_0 = \frac{2}{\pi} \left[ 1 + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} G(hu) \psi_{j-1}(u, 0) du \right]; \quad \vartheta_{0n} = \frac{2}{\pi} \left[ -\theta_4 \psi_0(0, \mu_n) + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} G(hu) \psi_{j-1}(u, \mu_n) du \right]; \\ \vartheta_{k0} = \frac{2}{\pi} \left[ -\theta_4 \psi_0(0, \mu_k) + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\infty} (\psi_{j-1}(u, \mu_k) G(hu) \psi_0(u, 0) du) \right]; \quad \vartheta_{00} = \frac{\theta_5 \theta_3 RE}{\kappa l}; \quad (25) \\ \vartheta_k = \frac{\theta_3 \mu_k J_0^2(\mu_k)}{2\kappa R v_1} \left[ \frac{l_2 v_2}{l_1 v_1} \operatorname{cth} \left( \frac{\mu_k l}{v_2} \right) - \operatorname{cth} \left( \frac{\mu_k l}{v_1} \right) \right]; \quad \varpi_k = \frac{2}{\pi} \left[ \psi_0(0, \mu_k) + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \psi_{j-1}(u, \mu_k) G(hu) \psi_0(u, 0) du \right]; \\ \vartheta_{kn} = \frac{2}{\pi} \left[ -\theta_4 \psi_0(\mu_k, \mu_n) - \frac{2\theta_3 s_0 v_1 R \pi}{\kappa l} \sum_{m=1}^{\infty} \tau_{mm} v_{km} + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\infty} (\psi_0(u, \mu_n) G(hu) \psi_{j-1}(u, \mu_k) du) \right];$$

де для випадку рівних коренів  $n_1 = n_2$ :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{G}_0 &= \frac{1}{\pi} \left[ 1 + \frac{(m_2 - 1)R^2}{\theta_2} + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \left( \psi_0(u, 0) + \frac{2(m_2 - 1)R^2}{\theta_2} \psi_1(u, 0) \right) G(hu) \psi_{j-1}(u, 0) du \right]; \\
\varpi_0 &= \frac{1}{\pi} \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \psi_0(u, 0) G(hu) \psi_{j-1}(u, 0) du \right]; \quad \mathfrak{G}_k = \frac{\mu_k J_0^2(\mu_k)}{2\theta_3 \kappa R} \left[ \frac{\mu_k}{Rv_1} E^{(k)} - sM^{(k)} \right]; \quad (26) \\
\mathfrak{G}_{0n} &= \frac{1}{\pi} \left[ \theta_4 \psi_0(0, \mu_n) + \frac{(m_2 - 1)R^2}{2} b_1^{(n)} \psi_0(0, i\gamma_n v_1 R) + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \left( \theta_4 \psi_0(u, \mu_n) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{(m_2 - 1)R^2}{2} b_1^{(n)} \psi_0(u, i\gamma_n v_1 R) \right) G(hu) \psi_{j-1}(u, \mu_n) du \right]; \\
\mathfrak{G}_{00} &= \frac{2E}{\kappa \theta_2 \theta_3 l R}; \quad \varpi_k = \frac{2}{\pi} \left[ \psi_0(0, \mu_k) + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \psi_0(u, \mu_k) G(hu) \psi_{j-1}(u, 0) du \right]; \\
\mathfrak{G}_{k0} &= \frac{2}{\pi} \left[ \psi_0(0, \mu_k) + \frac{2(m_2 - 1)R^2}{\theta_2} \frac{\sin \mu_k}{\mu_k} + \frac{2}{\pi \varepsilon \theta_3} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \left( \theta_4 \psi_0(u, \mu_k) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{(m_2 - 1)R^2}{2} b_1^{(k)} \psi_0(u, i\gamma_k v_1 R) \right) G(hu) \psi_{j-1}(u, 0) du \right]; \\
\mathfrak{G}_{kn} &= -\frac{2}{\pi} \left[ \theta_4 \psi_0(\mu_k, \mu_n) + \frac{(m_2 - 1)R^2}{2} b_1^{(k)} \psi_0(\mu_n, i\gamma_k v_1 R) + \frac{2}{\pi \varepsilon \theta_3} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \left( \theta_4 \psi_0(u, \mu_k) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{(m_2 - 1)R^2}{2} b_1^{(k)} \psi_0(u, i\gamma_k v_1 R) \right) G(hu) \psi_{j-1}(u, \mu_n) du + \right. \\
&\quad \left. + \frac{l}{2\kappa \theta_3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_m^2 v_1^2 J_0(\mu_k) b_1^{(m)} (\gamma_m v_1 R I_1(\gamma_m v_1 R) + s_0 (1 - I_0(\gamma_m v_1 R)))}{\mu_k^2 + \gamma_m^2 v_1^2 R^2} \right].
\end{aligned}$$

де  $\theta_5 = (v_2 + v_1 s) n_1 n_2 ((m_1 v_2^3 + m_2 v_1^3) E)^{-1}$ ,  $\psi_j(\eta, \mu_n) = \frac{2}{\pi} \eta \int_0^1 \cos \eta t dt \int_0^{\infty} \frac{\psi_{j-1}(u, \mu_n)}{u} G(uh) \cos ut du$ .

При обчисленні функції (23) й коефіцієнтів (25) – (26) більшість інтегралів у кінцевому вигляді не обчислюються, враховуючи складність функцій  $G_i$  ( $i = \overline{1,4}$ ). Тому, починаючи з другого наближення, підінтегральні функції розкладаються у ряди за степенями  $h^{-i}$ , ( $i = \overline{1,7}$ ) що дозволить обчислити коефіцієнти системи (24) наближено.

Визначивши невідомі сталі  $\chi_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) із системи (24), можна обчислити напружено-деформівний стан як у пружному штампі, так і в шарі за формулами (12) – (17).

У результаті цього розв'язок представлений у вигляді рядів через нескінченну систему констант, що визначаються із системи квазірегулярних лінійних алгебраїчних рівнянь. Причому в системі (24) коефіцієнти  $\vartheta_k$  і  $\vartheta_{kn}$  залежать від структури пружного потенціалу, висоти пружного штампa  $H$ , і товщини попередньо напруженого шару, а вільні члени залежать від коренів  $n_1, n_2$ .

Враховуючи асимптотичні представлення для функцій Бесселя, величин  $\mu_k$  та обмеженість інтегралів  $\psi(\mu_k, \mu_n)$ , система (24) квазірегулярна, якщо  $\lambda_1 > \lambda_{кр}$ , а також при виконанні умови

$$C_{44} I_1(1+m_1)(s-s_0)(m_1(s_0-s_1))^{-1} < \begin{cases} 0,36E(1-\nu^2)^{-1}, & \text{для стисливих тіл;} \\ 0,48E, & \text{для нестисливих тіл,} \end{cases}$$

Чисельно, квазірегулярність системи (24) підтверджує табл. 1, що сформована для перших восьми значень коефіцієнтів системи, виписаної у вигляді

$$\chi_k = -\sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_{kn}/\vartheta_k \cdot \chi_n + \varpi_k/\vartheta_k \quad (k=0,1,2,..)$$

у випадку потенціала Трелоара при  $h=4, \lambda_1=0.7$ .

Таблиця 1.

Коефіцієнти квазірегулярної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

n	$-\vartheta_{kn}/\vartheta_k$								$\varpi_k/\vartheta_k$
	1	2	3	4	5	6	7	8	
k									
1	0.67817	0.67816	-0.49398	-0.49397	0.36871	0.36870	-0.27927	-0.27926	$3.62 \cdot 10^{-5}$
2	0.67814	0.67813	-0.49393	-0.49392	0.36865	0.36864	0.27922	0.27921	$-3.39 \cdot 10^{-6}$
3	0.67813	0.67812	-0.49392	-0.49391	0.36864	0.36863	-0.27920	-0.27919	$-1.26 \cdot 10^{-6}$
4	0.67810	0.67809	-0.49389	-0.49388	0.36861	0.36860	-0.27918	-0.27916	$-1.09 \cdot 10^{-6}$
5	0.67808	0.67808	-0.49384	-0.49383	0.36854	0.36853	-0.27911	-0.27910	$6.72 \cdot 10^{-7}$
6	0.67808	0.67807	-0.49383	-0.49382	0.36854	0.36853	-0.27910	-0.27909	$7.58 \cdot 10^{-8}$
7	0.67807	0.67806	-0.49382	-0.49381	0.36852	0.36851	-0.27908	-0.27907	$2.43 \cdot 10^{-8}$
8	0.67789	0.67788	-0.49352	-0.49351	0.36819	0.36818	-0.27875	-0.27874	$-8.97 \cdot 10^{-9}$

В роботі також проведено чисельне розв'язання системи (24) для потенціала Трелоара (неогуківські тіла) та гармонічного потенціала при таких

значеннях параметрів:  $k=n=32$ ;  $\nu = \nu_1 = 0,5$ ;  $l=10$ ;  $\lambda_1 = 0,7; 0,8; 0,9; 1; 1,1; 1,2$ ;  $E=3,92$ . Алгоритм базується на методі редукції та реалізований у вигляді програми в пакеті Maple.

Вплив початкових напружень на закон розподілу контактних напружень і переміщень для задачі про тиск пружного циліндричного штамп на шар з початковими (залишковими) напруженнями у випадку гармонічного потенціала, зображується на рис. 3, 5, а у випадку потенціала Трелоара на рис. 2, 4 та 6. Причому на рис. 5 представлені тангенціальні напруження, що найбільш зосереджені поблизу зони контакту.

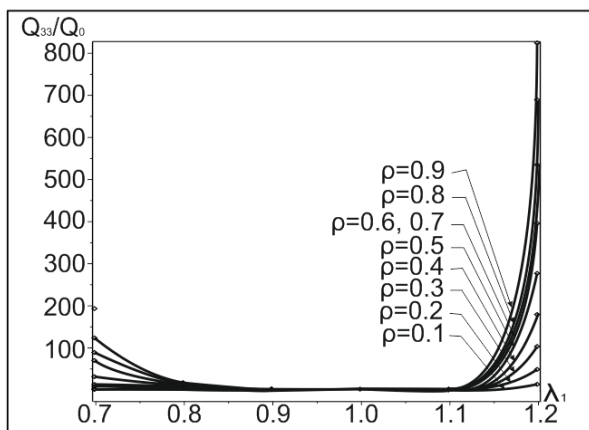


Рисунок 2. Вплив початкових напружень на нормальний закон розподілу (потенціала Трелоара)

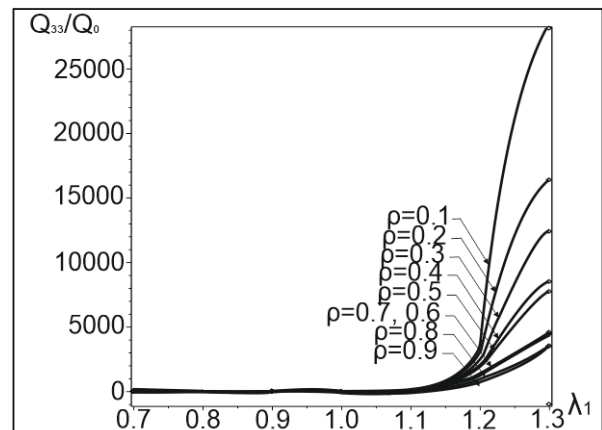


Рисунок 3. Вплив початкових напружень на нормальний закон розподілу(гармонічний потенціал)

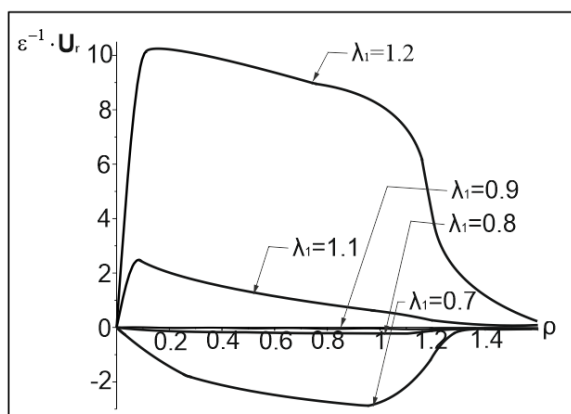


Рисунок 4. Переміщення  $U_r$  у пружному шарі (потенціала Трелоара)

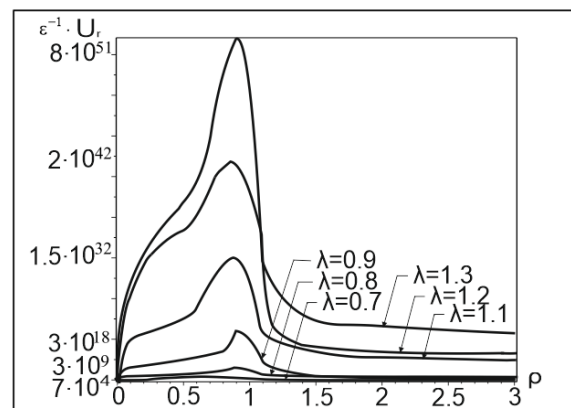


Рисунок 5. Переміщення  $U_r$  у пружному шарі (гармонічний потенціал)

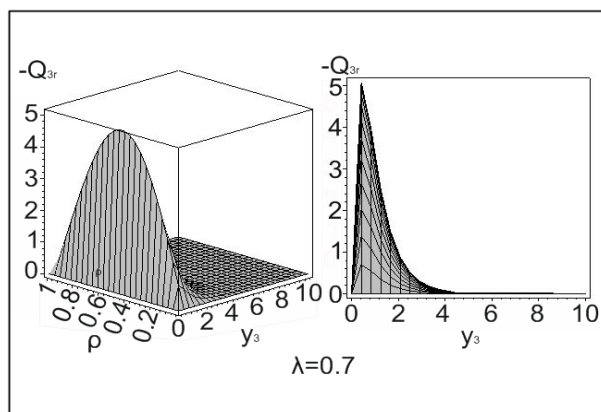


Рисунок 6. Тангенціальні напруження (потенціала Трелоара)

Було проведено дослідження збіжності числових рядів, які зустрічалися при розв'язуванні задачі (6) – (11). Так для більшості рядів знайдені мажоранти. Збіжність деяких рядів було досить складно довести аналітично, але з чисельних результатів виявилось, що вона забезпечується монотонним спаданням сталих  $\chi_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) та  $|J_0(\mu_k \rho)|$ . Але деякі ряди, що входять у вирази для напружень циліндричного штамп (14) – (15) в точках зміни граничних умов виявилися розбіжними, (оскільки  $\mu_k \cdot \chi_k \cdot J_0(\mu_k \rho) \rightarrow \infty$ , при  $k \rightarrow \infty$ ) але це узгоджується з дослідженнями [2].

Порівнюючи компоненти напружено-деформівного стану тіл з початковими напруженнями із відповідними виразами для ізотропного тіла без початкових напружень, при  $z_i = 0$  отримаємо рівняння:

$$U_3(r, 0) = k \cdot U_3^0(r, 0), \quad Q_{33}(r, 0) = k_s \cdot Q_{33}^0(r, 0), \quad (27)$$

де  $U_3(r, 0)$ ,  $Q_{33}(r, 0)$  – переміщення і напруження під штампом, що втискається у шар з початковими напруженнями;  $U_3^0(r, 0)$ ,  $Q_{33}^0(r, 0)$  – переміщення і напруження під штампом, що втискається у шар без початкових напружень;  $k$ ,  $k_s$  – коефіцієнти, які відображають вплив початкових напружень на контактні напруження і переміщення пружних циліндра та шару.

Залежність зміни коефіцієнтів  $k$ ,  $k_s$  з рівнянь (27) представлено у табл. 2. З чого видно, що при наближенні коефіцієнта видовження до значень поверхневої нестійкості матеріалу переміщення необмежено зростають, а напруження прямують до нуля.

Таблиця 2

Залежність зміни коефіцієнтів  $k$ ,  $k_s$ 

$\lambda_1$	Потенціал Бартенєва–Хазановича		Потенціал Трелоара		Гармонічний потенціал	
	$k$	$k_s$	$k$	$k_s$	$k$	$k_s$
0,5951	–	–	–	–	$\infty$	0
0,6661	–	–	$\infty$	0	1,7391	0,2332
0,6934	$\infty$	0	4,1602	0,2090	1,5396	0,3128
0,7	19,7913	44,3841	3,4487	2,9543	1,5061	4,7907
0,8	1,7088	2,6107	1,3285	1,2423	1,2446	2,3223
0,9	1,1653	1,3597	1,0774	1,0376	1,1166	1,4539
1,1	0,9328	0,8847	0,9583	1,0218	0,8533	0,7142
1,2	0,9048	0,8778	0,9176	1,0699	0,6306	0,5132
1,3	0,8961	0,9327	0,8687	1,1269	0,2329	0,3609

Перевірка одержаних результатів на еталонних задачах представлена чисельно у табл. 3, порівнянням числових значень сили  $P$ , що діє на верхній торець штампа, при заданих величинах початкових напружень та товщини шару  $h$  із випадком без початкових напружень (виділеного жирним шрифтом).

Таблиця 3

Числові значення сили  $P/\epsilon R$ 

Потенціал Трелоара	$\lambda_1$	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2
	$h$						
	1,6	1,4082	1,2487	1,2974	<b>1,2315</b>	1,2978	1,2043
	4	1,4025	1,2456	1,2945	<b>1,2296</b>	1,2653	1,2022

Мінімальні значення товщини шару  $h$  представлені в табл. 4, у випадку гармонічного потенціалу. Для порівняння, приведені значення товщини шару  $t$ , коли у циліндрі відсутні початкові напруження. З табл. 4 видно, що початкові напруження впливають на метод послідовних наближень.

Таблиця 4

Мінімальні значення товщини шару  $h$ 

$\lambda_1$	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3
$h$	1,54	1,25	1,02	0,83	0,67	0,54	0,42
$t$	1,49	1,27	1,08	0,83	0,65	0,51	0,41

Отже, враховуючи результати математичного моделювання та проведеного дослідження для потенціалів, що відповідають рівним та нерівним кореням визначального рівняння (3), вплив початкових напружень на напружено-деформований стан пружного циліндра, що втискається у пружний шар та основу, полягає у тому, що:

1. Початкові напруження при стиску призводять до зменшення сили напружень у циліндричному штампі та шарі, а при розтягненні – до їх збільшення, у випадку переміщень все відбувається навпаки. Тобто, наявність попередньо напруженого стану під час контактної взаємодії пружних тіл дає змогу регулювати контактні напруження та переміщення при розрахунках на міцність деталей машин та конструкцій. Причому для контактних напружень небезпечними є початкові напруження у випадку розтягнення, а для переміщення – у випадку стиску.

2. Найбільший вплив початкових напружень відзначений на бічній поверхні штампу.

3. Товщина шару не впливає на характер дії початкових напружень, а впливає лише на їх значення.

4. Більш суттєво, у кількісному плані, початкові напруження діють у високоеластичних матеріалах у порівнянні із більш жорсткими, але якісно їх вплив зберігається.

5. Небезпечною є ситуація, коли початкові напруження наближаються до значень поверхневої нестійкості, оскільки контактні напруження і переміщення різко змінюють свої значення.

Виявлений при дослідженні вплив початкових (залишкових) напружень є суттєвим для стисливих та нестисливих тіл і повинен враховуватися при

розрахунках на надійність та міцність матеріалів, конструкцій, споруд і обладнання. Це підтверджено одержаними аналітичними, графічними та числовими результатами, що дає змогу використовувати їх в інженерних розрахунках.

#### Література

1. <http://www.nas.gov.ua/UA/Messages/Pages/View.aspx?MessageID=7263>
2. *Гузь А.Н., Рудницький В.Б.* Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями [Текст]. – Хмельницький, вид. ПП Мельник. – 2006. – 710 с.
3. *Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П.* Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. – Германия, Saarbrücken LAPLAMBERT Academic Publishing. – 2015. – 468 с.
4. *Guz A. N.* Nonclassical Problems of Fracture/Failure Mechanics: On the Occasion of the 50th Anniversary of Research (Review). III. // *International Applied Mechanics*. – 2019. – **55**, №4. – Pp. 343–415.
5. *Guz A.N., Babich S.Y., Rudnitskii V.B.* Contact problems for elastic bodies with initial stresses: Focus on Ukrainian research. // *Int. Appl. Mech. Rew.* – 1998. – **51**, №5. – P. 343–371. <https://doi.org/10.1115/1.3099009>
6. Развитие теории контактных задач в СССР / под ред. Л. А. Галина. – М.– : Наука, 1976. – 494 с.
7. *Гузь А. Н., Бабич С.Ю., Рудницький В.Б.* Контактное взаимодействие упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями // Развитие идей Л. А. Галина в механике. – М. – Ижевск. Институт компьютерных исследований, 2013. – 480 с.
8. *Грилицкий Д.В., Кизыма Я.М.* Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости – Львов: Вища шк., 1981. – 136 с.
9. *Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П.* Статика и динамика упругих оснований с начальными (остаточными) напряжениями: Монография. – Кременчук «Press - Line». – 2007. – 795 с.

10. *Гузь О.М., Бабич С.Ю., Рудницький В.Б.* Контактна взаємодія тіл з початковими напруженнями: Навчальний посібник. – Київ.: Вища школа. – 1995. – 304 с.
11. *Babich. S. Yu., Dikhtyaruk N. N.* Load transfer from an infinite inhomogeneous stringer to an elastic strip clamped by one face with initial stresses. // *International Applied Mechanics*. – 2020. – **56**, №6. – Pp. 346 – 356.
12. *Yaretskaya N. A.* Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses. // *International Applied Mechanics*. – 2014. – **50**, №4. – Pp. 378–388.
13. *Yaretskaya N. A.* Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. // *International Applied Mechanics*. – 2018. – **54**, №5. – Pp. 539-543.
14. Ярецька Н.О. Контактна задача для двох попередньо напружених співвісних циліндрів та шару з початковими напруженнями. // *Information, its impact on social and technical processes. Abstracts of VIII International Scientific and Practical Conference. SH SCW "NEW ROUTE" Haifa, Israel. 2020.* Pp. 106-111.
15. Бабич С.Ю., Ярецька Н.О. Контактна взаємодія попередньо напружених кільцевого штампу і півпростору. // *Доповіді НАН України*. – 2020. – № 11. – с. 24 – 30 <https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.11.024>
16. *Александров В.М., Арутюнян Н.Х.* Контактные задачи для преднапряженных деформируемых тел // *Прикл. механика*. – 1984. – **20**, № 3. – С. 9 – 16.
17. *Guz A. N.* Nonclassical Problems of Fracture/Failure Mechanics: On the Occasion of the 50th Anniversary of Research (Review). III. // *International Applied Mechanics*. – 2019. – **55**, №4. – Pp. 343–415.