

**Кузьменко А.Г.,\*****Криворотько В.М.\*\***\*Хмельницкий национальный университет,  
г. Хмельницкий, Украина\*\*Национальный авиационный университет,  
г. Киев, Украина**КОНТАКТНАЯ МЕХАНИКА ПЛОСКОЙ  
КОМБИНИРОВАННОЙ ОПОРЫ ПРИ ОД-  
НОВРЕМЕННОМ КАЧЕНИИ ШАРИКОВ  
И СКОЛЬЖЕНИЕ ПЛОСКОСТИ**

## Содержание

## Введение

1. Контактное взаимодействие элементов опоры, случай, когда шарики равны толщине пластины
  - 1.1. Принцип работы опоры
2. Контактное взаимодействие в опоре случае ( $d = h$ )
  - 2.1. Вывод основных соотношений
  - 2.2. Анализ состояния опоры, проверочный расчет
    - 2.2.1. Порядок расчета
    - 2.2.2. Пример 1 расчета опоры
  - 2.3. Оптимизация параметров опоры, проверочный расчет
    - 2.3.1. Определяющие соотношения
    - 2.3.2. Пример расчета
    - 2.3.3. Задача I - определение одного параметра конструкции
3. Контактное взаимодействие элементов опоры при  $d \neq h$ 
  - 3.1. Шарики больше толщины пластины  $d > h$
  - 3.2. Шарики меньше толщины пластины  $d < h$
4. Износ пластины
  - 4.1. Вывод уравнения задачи

## Выводы

## Литература

**Введение**

В опорах скольжения при вращении вала происходит скольжение вала по подшипнику. В гидродинамическом подшипнике их поверхности разделены слоем смазки.

В опорах качения при вращении вала происходит перекачивание тел качения с пренебрежимо малым путем скольжения.

В литературе известен [1] термин комбинированные опоры, под которым понимают соединение в один узел опор, поверхность, которых работает при трении скольжении, а часть при трении качения.

Детально работа таких опор исследована при гидродинамическом режиме смазки опор скольжения [1].

В данной работе изучаются комбинированные в основном возвратно-качающиеся подшипники скольжения, работающие при граничном режиме смазки или совсем без смазки.

При этом учитывается контактная податливость опор и условия их совместных деформаций.

**1. Принцип работы опоры**

Плоская комбинированная опора (рис. 1) состоит из верхней плиты 1, нижней плиты 4 и средней пластины 2, в которой со значительным зазором расположены шарики 3. Работа комбинированной опоры имеет следующие особенности: 1) Средняя пластина неподвижно скреплена с нижней (или с верхней) плитой; 2) В средней пластине выполнены круговые (или другой формы) отверстия радиуса  $d > h$ , в которые вставлены шарики радиуса  $R_1$  с зазором  $\Delta = R_1 - R$ ; 3) В зазор между шариками и круговыми отверстиями вводятся коксистениная смазка; 4) Между толщиной средней пластины с одной стороны и диаметром шариков с другой стороны устанавливается определенное соотношение, так что бы передача вертикальной нагрузки осуществлялась одновременно через шарики и через среднюю пластину; 5) При действии на верхнюю плиту сдвигающей нагрузки происходит: а) скольжение поверхности верхней плиты по поверхности средней плиты; в) качение шариков по поверхностям верхней и нижней плиты в случае, если шарик не контактирует с поверхностью кругового отверстия в средней плите; с) скольжение шарика по поверхности кругового отверстия в средней плите, если шарик контактирует с этой поверхно-

стью; д) скольжения шарика по верхней и нижней плите и неподвижный контакт по поверхности неподвижный контакт по поверхности кругового отверстия в средней плите.

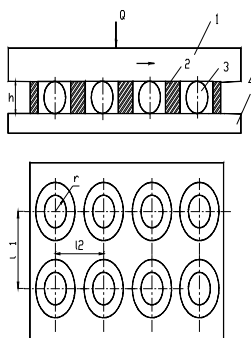


Рис. 1 – Схема плоской комбинированной опоры с шариками (КОКОС - ШП)  
1 – верхняя плита; 2 – средняя пластина;  
3 – шарики; 4 – нижняя плита

Во всех случаях вследствие выдавливания смазки из зазора и контактирования смазочного шарика с поверхностью верхней плиты, происходит смазывание контактирующих поверхностей верхней плиты и средней пластины.

Таким образом, конструкция комбинированной опоры обладает несколькими положительными свойствами: 1) из-за работы (качения) шариков снижается коэффициент трения в опорах; 2) при качении шариков смазывается рабочие поверхности скольжения верхней плиты и средней пластины; 3) при одновременном контактировании шариков и средней плиты происходит благоприятная разгрузка как шариков, тик и поверхностей средней плиты; 4) по мере износа точек поверхности средней плиты растет нагрузка на шарики, по мере роста нагрузки на шарики уменьшается нагрузка на точки поверхности средней плиты, это приводит к уменьшению износа средней плиты; 5) в случае, если пластина не скреплена с нижней плитой при движении верхней плиты возможно смещение пластины.

Таким образом, комбинированная опора обладает свойствами саморегулирования нагрузки и износа между телами качения и скольжения.

Далее задача состоит в описании контактной механики взаимодействия элементов комбинированной опоры и разработки методики расчета комбинированных опор на прочность и износ.

## 2. Контактное взаимодействие в опоре случае $d = h$

### 2.1. Вывод основных соотношений

Постановка контактной задачи включает: условие сплошности, условие равновесия и жесткостные характеристики элементов.

1<sup>0</sup>. Условие сплошности или непрерывности в контакте имеет вид:

$$u_h = u_R = u_0, \quad (2.1.1)$$

где  $u_h$  – контактное перемещение по нормали точек пластины;

$u_R$  – максимальные перемещения контактных точек поверхности шариков;

$u_0$  – перемещения контактных точек верхней плиты.

2<sup>0</sup>. Условие равновесия верхней плиты на пластине и на шариках:

$$Q = \sum Q_h + \sum Q_R, \quad (2.1.2)$$

где  $Q$  – общая нагрузка;

$\sum Q_h$  – нагрузка, приходящаяся на все участки пластины;

$\sum Q_R$  – нагрузка, приходящаяся на все шарики.

Для удобства дальнейших рассуждений будем полагать, что  $n$  шариков распределены по пластине равномерно.

Разобьем всю поверхность пластины на  $n$  участков с размерами  $l_1$  и  $l_2$  и обозначим площадь участка через:

$$F_{12} = l_1 l_2, \quad (2.1.3)$$

тогда рабочая часть поверхности одного участка пластины:

$$F_h = l_1 l_2 - \pi R_1^2. \quad (2.1.4)$$

Общая рабочая часть пластины будет:

$$F = n F_h. \quad (2.1.5)$$

С учетом введенных соотношений условие равновесия (2.1.2) может быть записано в виде:

$$\frac{Q}{n} = Q_h + Q_R, \quad (2.1.6)$$

или

$$Q_1 = Q_h + Q_R, \quad (2.1.7)$$

$$\text{где } Q_1 = \frac{Q}{n}.$$

3<sup>0</sup>. Податливость пластины для определенности и прочности примем в форме линейной винклевской модели:

$$\boxed{u_h = k_h \sigma_h}, \quad \boxed{k_h = \frac{h}{E_h}}, \quad (2.1.8)$$

где  $k_h$  - коэффициент податливости;

$\sigma_h$  - среднее давление на пластину;

$h$  - толщина пластины;

$E_h$  - модуль упругости материала пластины.

Податливость шарика определяется герцевским соотношением [2]:

$$\boxed{u_R = k_R Q_R^{\frac{2}{3}}}, \quad (2.1.9)$$

где

$$k_R = 1,651 \left[ \frac{1}{R} \left( \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{3}}, \quad (2.1.10)$$

где  $R$  - радиус шарика;

$E_1, E_2, \mu_1, \mu_2$  - модули упругости и коэффициенты Пуассона материалов плиты (индекс 1) и шариков (индекс 2). Заметим, что коэффициентом 1,651 учитывается наличие двух плит и двух точек контакта.

4<sup>0</sup>. *Вывод разрешающего уравнения.* Подставляя соотношения податливости (2.1.8) и (2.1.9) в условие сплошности (2.1.1), получаем:

$$k_R Q_R^{\frac{2}{3}} = k_h \sigma_h. \quad (2.1.11)$$

Учитывая, что:

$$\sigma_h = \frac{Q_h}{F_h}, \quad (2.1.12)$$

далее имеем:

$$k_R Q_R^{\frac{2}{3}} = \frac{k_h}{F_h} Q_h. \quad (2.1.13)$$

Определяя отсюда величину  $Q_h$ :

$$Q_h = \frac{k_R F_h}{k_h} Q_R^{\frac{2}{3}}, \quad (2.1.14)$$

и подставляя в условие равновесия (2.1.8) имеем:

$$Q_R + \frac{k_R F_h}{k_h} Q_R^{\frac{2}{3}} = \frac{Q}{n}, \quad (2.1.15)$$

или

$$Q_R + \xi Q_R^{\frac{2}{3}} = Q_1, \quad (2.1.16)$$

$$\xi = \frac{k_R F_h}{k_h}.$$

Это и есть основное разрешающее уравнение задачи, связывающие нагрузку на шарик с геометрическими и силовыми параметрами в контакте для случая, когда начальный зазор между шариком и верхней плитой равен нулю.

Уравнение (1.3.15) сводится к кубическому уравнению и может быть решено по формуле Кардано или численно итерационным методом по процедуре:

$$(Q_R)_{k+1} = Q_1 - \xi (Q_R)^{\frac{2}{3}}, \quad (2.1.17)$$

где

$$\xi = \frac{k_R F_h}{k_h}. \quad (2.1.18)$$

5<sup>0</sup>. Контактные давления при одинаковых материалах на шарике определяются по зависимости

$$\sigma_R = 0,388 \left( Q \frac{E^2}{R^2} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (2.1.19)$$

среднее давление на пластине определяется по (1.3.11).

## 2.2. Анализ состояния опоры, проверочный расчет

### 2.2.1. Порядок расчета

#### 1<sup>0</sup>. Исходные данные

- 1) размеры опоры и шариков по рис. 1:  $L_1$ ;  $L_2$ ;  $l_1$ ;  $l_2$ ;  $R$ ;  $d$ ;  $R_1$ ;  $h$ ;
- 2) параметры упругости материалов пластины и шариков:  $E_R$ ;  $\mu_R$ ;  $E_h$ ;  $\mu_h$ ;
- 3) число шариков;
- 4) общая нагрузка на опору  $Q$ ;
- 5) допускаемые давления на пластину  $\sigma_h^*$  и на шарик  $\sigma_R^*$ .

#### 2<sup>0</sup>. Искомые величины

- 1) нагрузка  $Q_R$  и  $Q_h$  – действующие на один шарик и на один участок пластины;
- 2) давления  $\sigma_R$  и  $\sigma_h$  – максимальные давления, действующие на шарик и давления на рабочую поверхность пластины; сравнить действующие давления с допускаемыми;
- 3) величина осадки верхней плиты  $u_R = u_h$ .

#### 3<sup>0</sup>. Порядок расчета

1. Вспомогательные расчеты площадей:
  - 1) общая площадь  $F_0$  пластины по (2.1.3);
  - 2) площадь  $F_1$  одного участка пластины с одним шариком по (2.1.3а);
  - 3) площадь  $F_h$  – рабочей части одного участка пластины по (2.1.4).

2. Расчеты коэффициентов податливости:
  - 1)  $k_h$  – коэффициент податливости пластины по (2.1.7);
  - 2)  $k_R$  – коэффициент податливости шарика по (1.2.9); или по (2.1.9а).
3. Определение величины безразмерного комплекса  $\xi$  по (2.1.17).
4. Решение разрешающего уравнения (2.1.15), определение нагрузки  $Q_R$  на один шарик; предварительное определение нагрузки  $Q_1$  на один участок опоры по (2.1.6).  
Решение уравнения проще всего выполнить методом перебора.
5. Определение силы  $Q_h$ , действующей на участок пластины по (2.1.6).
6. Определение контактных давлений, действующих на шарик  $\sigma_R$  по (2.1.18) и на участок пластины по (2.1.19).  
Сравнить полученные давления с допускаемыми  $u_R^0$ .
7. Определение осадки плиты для контактных точек шарика по (2.1.8), для точек пластины по (2.1.7).

4<sup>0</sup>. Анализ результатов расчета

1. Сравнение полученных величин давлений с допускаемыми для шарика и для пластины.
2. Сравнение осадки плиты с допусками на разброс толщины плиты и шарика.

2.2.2. Пример 1 расчета опоры

1<sup>0</sup>. Задача. Выполнить проверочный расчет плоской комбинированной опоры с шариками типа COM.F/ SP при данных, приведенных в табл. 2.1.

Таблица 2.1

**Исходные данные и результаты расчетов в примере 1**

№	Наименование величины. Исходные данные	Обозначение	Размерность	Величина
1	Общие размеры пластины $L$	$L_1 \times L_2$	мм	40×40
2	Размеры участка пластины	$l_1 \times l_2$	мм	20×20
3	Размеры шарика радиус	$R$	мм	5
4	Размеры шарика диаметр	$d$	мм	10
5	Радиус отверстия под шарик	$R_1$	мм	8
6	Толщина пластины	$h$	мм	5
7	Число шариков	$n$	-	4
8	Модуль упругости материала шарика и плит	$E_R$	кг/мм <sup>2</sup>	$2,1 \cdot 10^4$
9	Коэффициент Пуассона материала шарика	$\mu$	-	0,3
10	Модуль упругости материала пластины	$E_h$	кг/мм <sup>2</sup>	$3 \cdot 10^2$
11	Общая нагрузка на опору	$Q_n$	кг	40
12	Нагрузка на один участок	$Q_1$	кг	10
13	Допустимое давление на материал шарика	$\sigma_R^*$	кг/мм <sup>2</sup>	5,0
14	Допустимое давление на материал пластины	$\sigma_h^*$	кг/мм <sup>2</sup>	0,5
<b>Результаты расчетов</b>				
1	Нагрузка на один шарик	$Q_R$	кг	0,75
2	Нагрузка на один рабочий участок пластины	$Q_n$	кг	9,25
3	Максимальное давление на шарик	$\sigma_R$	кг/мм <sup>2</sup>	328
4	Среднее давление на рабочий участок пластины	$\sigma_h$	кг/мм <sup>2</sup>	0,047
5	Осадка верхней плиты	$u_R$	мм	$0,15 \cdot 10^{-2}$

6	Коэффициент податливости пластины	$k_n$	мм <sup>3</sup> /кг	$3,33 \cdot 10^{-2}$
7	Коэффициент податливости шарика	$k_R$	мм/кг	$0,189 \cdot 10^{-2}$

2<sup>0</sup>. Расчеты

1. Вспомогательные расчеты площадей:

1) общая площадь пластины:

$$F_{\text{общ}} = L_1 \times L_2 = 40 \times 40 = 1600 \text{ мм}^2;$$

2) площадь одного участка пластины:

$$F_1 = \frac{F_{\text{общ}}}{n} = \frac{1600}{4} = 400 \text{ мм}^2;$$

3) площадь рабочей части одного участка пластины:

$$F_h = F_1 - \pi R_1^2 = 400 - \pi \cdot 8^2 = 198 \text{ мм}^2.$$

2. Определение коэффициентов податливости:

1) коэффициент податливости пластины:

$$k_h = \frac{h}{E_h} = \frac{10}{3 \cdot 10^2} = 3,33 \cdot 10^{-2} \text{ мм}^3/\text{кг};$$

2) коэффициент податливости шарика:

$$k_R = \frac{2,4612}{R^{\frac{1}{3}} E_R^{\frac{2}{3}}} = \frac{2,4612}{5^{\frac{1}{3}} (2,1 \cdot 10^4)^{\frac{2}{3}}} = 0,189 \cdot 10^{-2} \text{ мм}^3/\text{кг}.$$

3. Определение величины безразмерного коэффициента  $\xi$  в уравнении задачи:

$$\xi = \frac{k_R}{k_h} F_h = \frac{0,189 \cdot 10^{-2}}{3,33 \cdot 10^{-2}} 198 = 11,24.$$

4. Решение нелинейного уравнения задачи:

$$Q_R + 11,24 Q_R^{\frac{2}{3}} - 10 = 0$$

выполним методом перебора, определяя точки функции невязки:

$$\varepsilon = (Q_R)_i + 11,24 (Q_R)_i^{\frac{2}{3}} - 10.$$

Перебор значений  $(Q_R)_i$  выполняется в диапазоне:

$$Q_R = (0 \dots 10) \text{ кг}.$$

$(Q_R)_i$	0	1,0	0,8	0,7	0,75
$\varepsilon$	- 10	+ 2,24	0,68	- 0,43	0,028

В результате имеем для силы на шарик:

$$Q_R = 0,75 \text{ кг}.$$

5. Сила, действующая на рабочий участок пластины:

$$Q_h = Q_1 - Q_R = 10 - 0,75 = 9,25 \text{ кг}.$$

6. Контактные давления:

1) Максимальное контактное давление на шарик:

$$\sigma_R = 1,388 \left( Q_R \frac{E_R^2}{R^2} \right)^{\frac{1}{3}} = 1,388 \left( 0,75 \frac{(2,1 \cdot 10^4)^2}{5^2} \right)^{\frac{1}{3}};$$

$$\sigma_R = 328 \text{ кг/мм}^2;$$

2) среднее давление на рабочей части пластины:

$$\sigma_h = \frac{Q_h}{F_n} = \frac{9,25}{198} = 0,047 \text{ кг/мм}^2.$$

7. Осадка плиты:

1) контактные перемещения плиты:

$$u_h = k_h \frac{Q_h}{F_h} = 3,33 \cdot 10^{-2} \frac{0,75}{198} = 0,154 \cdot 10^{-2} \text{ мм};$$

2) контактные перемещения шарика:

$$u_R = k_R Q_R^{\frac{2}{3}} = 0,189 \cdot 10^{-2} \cdot 0,75^{\frac{2}{3}} = 0,156 \cdot 10^{-2} \text{ мм}.$$

### 2.3. Оптимизация параметров опоры, проверочный расчет

#### 2.3.1. Определяющие соотношения

1<sup>0</sup>. Сводка соотношений, запишем основное уравнение (1.2.14) контактной механики плоской комбинированной опоры с шариками, равными толщине пластины в развернутом виде с учетом (1.2.7), (1.2.8), (1.3.11):

$$Q_R + \frac{k_R F_h}{k_h} Q_R^{\frac{2}{3}} = Q_1, \quad (2.3.1)$$

$$Q_1 = \frac{Q}{h}, \quad u_h = k_h Q_h, \quad k_h = \frac{h}{E_h}, \quad (2.3.2)$$

$$u_R = k_R Q_R^{\frac{2}{3}}, \quad k_R = \frac{c_R}{R^{\frac{1}{3}} E_R^{\frac{2}{3}}}, \quad c_R = 2,4612, \quad (2.3.3)$$

$$F_h = l_1 l_2 - \pi R_1. \quad (2.3.4)$$

Подставляя (3.1.2) и (3.1.3) в (3.1.1), имеем основное разрешающее уравнение в развернутом виде:

$$Q_R + \frac{c_R F_h E_h}{R^{\frac{1}{3}} E_R^{\frac{2}{3}} h} Q_R^{\frac{2}{3}} = Q_1. \quad (2.3.5)$$

Средние контактные давления на рабочей части пластины,  $\sigma_h$  и максимальные давления на шарике  $\sigma_R$  определяются по зависимостям:

$$\sigma_h = \frac{Q_h}{F_h}, \quad \sigma_R = c_\sigma Q_R^{\frac{1}{3}} \left( \frac{E_R}{R} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad c_\sigma = 0,388. \quad (2.3.6)$$

Общее условие равновесия:

$$Q_1 = Q_R + Q_h. \quad (2.3.7)$$

2<sup>0</sup>. Преобразование соотношений к задаче оптимизации. Определяя из выражений (3.1.6) величины  $Q_h$  и  $Q_R$  и подставляя в уравнения (3.1.5) и (3.1.10) имеем систему двух уравнений:

$$u_R = k_R Q_R^{\frac{2}{3}} = 0,189 \cdot 10^{-2} \cdot 0,75^{\frac{2}{3}} = 0,156 \cdot 10^{-2} \text{ мм}.$$

#### 3<sup>0</sup>. Анализ расчетов

1. Максимальные контактные давления на шарике:

$$\left( \sigma_R = 328 \frac{\text{кз}}{\text{мм}^2} \right) > \left( \sigma_R^* = 50 \frac{\text{кз}}{\text{мм}^2} \right)$$

превышающие допустимые контактные давления.

2. Контактные давления на пластине:

$$\left( \sigma_h = 0,047 \frac{\text{кз}}{\text{мм}^2} \right) < \left( \sigma_h^* = 0,5 \frac{\text{кз}}{\text{мм}^2} \right)$$

меньше допустимых.

3. Опускание плиты или контактные перемещения шарика (или плиты):

$$u_R = 1,5 \text{ мкм}$$

находятся в пределах допуска микронеровностей.

$$\begin{cases} \frac{\sigma_R^3 R^2}{c_R^3 E_R^2} + \frac{C_R F_h E_h}{R^{\frac{2}{3}} E_R^{\frac{2}{3}} h} \left( \frac{\sigma_R^3 R^2}{c_R E_R^2} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{Q}{n}, \\ \sigma_h F_h + \frac{\sigma_R^3 R^2}{c_R^3 E_R^2} = \frac{Q}{n}. \end{cases} \quad (3.1.8), (3.1.9)$$

Эти уравнения содержат восемь основных параметров:

$$\sigma_R, \sigma_h, Q, n, E_h, E_R, F_h, (l_1, l_2, R_1), R_1.$$

При проектировании и создании конструкции часть параметров может быть задана из конструктивных соображений и других требований, остальные параметры могут определяться из уравнений. Покажем этот процесс на двух задачах.

Пусть величина радиуса  $R_1$  определена или задана из условия величины возвратно-поступательного движения, а размеры  $l_1 = l_2 = l$  одинаковы, тогда из (3.1.11) имеем формулу для определения величины  $l$ .

$$l = (F_h + \pi R_1^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.1.12)$$

Общие квадратные размеры определяются по количеству шариков:

$$L = L_1 = L_2 = nl. \quad (3.1.13)$$

### 2.3.2. Пример расчета

Исходные данные примем из примера п. 2.2.1:

$$\begin{array}{l} \sigma_R^* = 50 \frac{\text{кз}}{\text{мм}^2} \\ \sigma_h^* = 0,5 \frac{\text{кз}}{\text{мм}^2} \\ Q = 40 \text{кз} \end{array} \left| \begin{array}{l} h = 10 \text{мм} \\ R = 5 \text{мм} \\ E_R = 2,1 \cdot 10^4 \frac{\text{кз}}{\text{мм}^2} \end{array} \right. \begin{array}{l} R_1 = 8 \text{мм} \\ n = 4 \text{мм} \\ c_R = 2,4612 \end{array}$$

### 2.3.3. Задача I – определение одного параметра конструкции

1<sup>0</sup>. Задача I формулируется следующим образом: спроектировать опору при следующих заданных величинах:

$$Q, \sigma_R^*, \sigma_h^*, h, R, E_h, E_R, R_1, n.$$

Определить величину площади  $F_h$  – рабочей части поверхности пластины.

2<sup>0</sup>. Решение задачи. При заданных величинах площадь контакта с пластиной  $F_h$  может быть определена из уравнения (3.1.9):

$$F_h = \frac{1}{\sigma_h^*} \left( \frac{Q}{n} - \frac{(\sigma_R^*)^3 R^2}{c_R^3 E_R^2} \right). \quad (3.1.10)$$

Размеры конструкции связаны с площадью  $F_h$  соотношением типа (1.2.4):

$$F_h = l_1 l_2 - \pi R_1^2. \quad (3.1.11)$$

1. Площадь одного рабочего участка поверхности пластины определяем по (3.1.10):

$$F_h = \frac{1}{0,5} \left( 10 - \frac{50^3 \cdot 5^2}{2,4612^3 \cdot (2,1 \cdot 10^4)^2} \right) = 20 \text{ мм}^2.$$

Отсюда по (3.1.12) находим:

$$l = (F_h + \pi R_1^2)^{\frac{1}{2}} = (20 + \pi \cdot 8^2)^{\frac{1}{2}} = 14,87 \text{ мм.}$$

Отсюда следует, что квадратная область пластины вокруг пластины быть не может. Находим размер кольцевой области:

$$F_h = \pi (R_2^2 - R_1^2),$$

$$R_2 = \left( \frac{F_h + \pi R_1^2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Подставляя исходные данные имеем:

$$R_2 = \left( \frac{20 + \pi \cdot 8^2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} = 8,388 \text{ мм.}$$

То есть ширина кольцевой области должна быть всего 0,3 мм.

### 3. Контактное взаимодействие элементов опоры при $d = h$

#### 3.1. Шарика больше толщины пластины $d > h$

1<sup>0</sup>. *Постановка задачи.* Диаметр шара  $d$  и толщины пластины  $h$  в начальный момент процесса нагружения могут не совпадать. Это несовпадение может быть как случайным или технологическим, так и специально сформированным.

В случае, если диаметр шариков больше толщины пластины в начальный момент нагрузка передается только через шарики. При этом если вся нагрузка  $Q$  распределяется равномерно, то имеем:

$$Q_R = \frac{Q}{n}. \quad (3.1.1)$$

Далее, как только максимальные контактные перемещение шариков  $u_R^0$  станут равными разности размеров шара и толщины пластинки:

$$u_R^0 = d - h > 0, \quad (3.1.2)$$

вступает в работу плоская поверхность пластины. При этом сила  $Q_R^0$  на каждом шарике с учетом (1.2.9) будет:

$$Q_R^0 = \left( \frac{u_R^0}{k_R} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (3.1.3)$$

После включения в работу поверхности пластины условие равновесия будет для участка пластины иметь вид:

$$Q_1 = Q_h + Q_R^0 + \Delta Q_R, \quad (3.1.4)$$

$$Q_R = Q_R^0 + \Delta Q_R. \quad (3.1.5)$$

Условие сплошности в контакте после вступления в работу поверхности пластины имеем вид:

$$u_h + u_R^0 = u_R, \quad (3.1.6)$$

или

$$u_h = u_R - u_R^0 = \Delta u_R. \quad (3.1.7)$$

Задача состоит в определении нагрузки, действующей на участок пластины  $Q_h$  и шарик  $Q_R$  в любой момент процесса нагружения при условии, что в соответствии с (1.2.9) и (1.2.8):

$$u_h = k_h \sigma_h; \quad k_h = \frac{h}{E_h}, \quad (3.1.8)$$

$$u_R = k_R Q_R^{\frac{2}{3}}, \quad (3.1.9)$$

где для одинаковых материалов шариков и плит:

$$k_R = 651 \left[ \frac{4}{R} \left( \frac{1 - \mu^2}{E} \right)^2 \right]^{\frac{1}{3}}, \quad (3.1.10)$$

при  $\mu = 0,3$ :

$$k_R = \frac{2,4612}{R^{\frac{1}{3}} E^{\frac{2}{3}}}. \quad (3.1.11)$$

2<sup>0</sup>. Вывод разрешающего уравнения запишем условие сплошности (3.1.7) с учетом (3.1.9) и (3.1.10):

$$k_h \frac{Q_h}{F_h} + u_R^0 = k_R (Q_R^0 + \Delta Q_R)^{\frac{2}{3}}. \quad (3.1.12)$$

Неизвестные величины  $\Delta Q_R$  и  $Q_h$  определяются из системы нелинейных уравнений (3.1.12) и (1.3.4). Выражая из (1.3.4) величину  $Q_h$ :

$$Q_h = Q_1 - Q_R^0 - \Delta Q_R, \quad (3.1.13)$$

и подставляя в (1.3.12) имеем одно нелинейное уравнение относительно величине  $\Delta Q_R$ :

$$\frac{k_h}{F_h} (Q_1 - Q_R^0 - \Delta Q_R) + u_R^0 = k_R (Q_R^0 + \Delta Q_R)^{\frac{2}{3}}, \quad (3.1.14)$$

или

$$\frac{k_h}{k_R F_h} \Delta Q_R - (Q_R^0 + \Delta Q_R)^{\frac{2}{3}} + \frac{k_h (Q_1 - Q_R^0)}{k_R F_h} + Q_R^0 = 0 \quad (3.1.15)$$

или

$$\boxed{c_1 \Delta Q_R + (Q_R^0 + \Delta Q_R)^{\frac{2}{3}} - c_2 = 0}, \quad (3.1.16)$$

$$c_1 = \frac{k_h}{k_R F_h}; \quad c_2 = c_1 (Q_1 - Q_R^0) + Q_R^0. \quad (3.1.17)$$

При  $u_R^0$ ,  $Q_R^0 = 0$ ,  $\Delta Q_R = Q_R$  уравнения (1.3.16) приводится к уравнению (1.2.16), полученному для случая  $d = h$ .

Нелинейная алгебраическое уравнение (1.3.16) можно решать: 1) численно итерационным по процедуре:

$$\Delta Q_R^{(k+1)} = \frac{c_2}{c_1} - (Q_R^0 + \Delta Q_R^{(k)})^{\frac{2}{3}}; \quad (3.1.18)$$

2) прямым перебором искомой величины  $\Delta Q_R$  в диапазоне от нуля до  $Q_1$ ; 3) графически построением невязки функции (1.3.16) до пересечения с нулем.

### 3.2. Шарiki меньше толщины пластины $d < h$

1<sup>0</sup>. Постановка задачи. Рассматривается контактное взаимодействие шариков, пластины и плит в плоской комбинированной опоре для случая, когда диаметр шариков меньше толщины пластины:

$$u_R^0 = h - d > o. \quad (3.2.1)$$

В начале нагружения в контакт вступают рабочие участки пластины контактные перемещения при этом до вступления в работу шариков определяются соотношением типа (1.2.8):

$$u_h^0 = k_h \sigma_h^0 = k_h \frac{Q_h^0}{F_h}, \quad (3.2.2)$$

при этом нагрузка в момент подключения шариков определяется соотношением:

$$Q_h^0 = \frac{\sum Q_h}{n}, \quad (3.2.3)$$

где  $\sum Q_h$  – суммарная рабочая площадь контакта рабочей поверхности пластины;  
 $n$  – число рабочих участков.

После включения в работу шариков условие равновесия для одного участка будет иметь вид:

$$Q_h^0 + \Delta Q_h + Q_R = Q_1, \quad (3.2.4)$$

$$Q_h = Q_h^0 + \Delta Q_h. \quad (3.2.5)$$

Условие сплошности в контакте после вступления в контакт шариков имеет вид:

$$u_R + u_h^0 = u_h, \quad (3.2.6)$$

или

$$u_R = u_h - u_h^0. \quad (3.2.7)$$

Задача состоит в определении полной нагрузки на пластину  $Q_h = Q_h^0 + \Delta Q_h$  и на шарик нагрузки  $Q_R$ , с учетом соотношений типа (1.3.8) – (1.3.11).

2°. *Вывод разрешающего уравнения* задачи. Запишем условие сплошности задачи (1.4.6) с учетом (1.3.9) и (1.3.8):

$$k_R Q_R^{\frac{2}{3}} + \frac{k_h Q_h^0}{F_h} = \frac{k_h Q_h}{F_h}. \quad (3.2.8)$$

Записывая (1.4.4) в виде:

$$Q_R = Q_1 - Q_h, \quad (3.2.9)$$

и подставляя в (1.4.8), получаем:

$$k_R (Q_1 - Q_h)^{\frac{2}{3}} + \frac{k_h}{F_h} Q_h^0 = \frac{k_h}{F_h} Q_h, \quad (3.2.10)$$

или

$$\boxed{(Q_1 - Q_h)^{\frac{2}{3}} - c_1 Q_h + c_1 Q_h^0 = 0}. \quad (3.2.11)$$

Это разрешающее нелинейное алгебраическое уравнение задачи относительно искомой величины + как и в предыдущем случае целесообразно решать численно.

#### 4. Износ пластины

##### 4.1. Вывод уравнения задачи

1°. Рассматривается плоская комбинированная опора при наличии установившегося износа пластины по модели:

$$\frac{du_w}{ds} = k_w \sigma^m, \quad (4.1.1)$$

при начальном условии  $d = h$ .

Заметим в уравнении (1.2.15)  $Q_R$  на  $Q_h$  по (1.2.13):

$$Q_R = \left( Q_h \frac{k_n}{k_R F_h} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad (4.1.2)$$

тогда

$$\left( Q_h \frac{k_n}{k_R F_h} \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{k_R F_h}{k_h} Q_h \frac{k_n}{k_R F_h} = Q_1,$$

или

$$Q_h + \left(\frac{1}{\xi}\right)^{\frac{3}{2}} Q_h^{\frac{3}{2}} = Q_1. \quad (4.1.3)$$

Из (1.2.7) и (1.2.1) следует:

$$Q_h = F_h \sigma_h = F_n \frac{u_h}{k_h}. \quad (4.1.4)$$

Подставляя (1.5.4) в (1.5.3), получаем:

$$F_h \frac{u_h}{k_h} + \left(\frac{1}{\xi}\right)^{\frac{3}{2}} \left(F_h \frac{u_h}{k_h}\right)^{\frac{3}{2}} = Q_1. \quad (4.1.5)$$

При наличии износа контактное перемещение  $u_h$  складывается из двух составляющих:

- 1) начального значения  $u_{h0}$ ;
- 2) текущего значения перемещений  $u_w(s)$ , зависящего от износа:

$$u_h(s) = u_{h0} + u_w(s). \quad (4.1.6)$$

Величину износа получим, интегрируя (1.5.1):

$$u_w(s) = k_w \int \sigma_h(s)^m ds, \quad (4.1.7)$$

тогда

$$u_w(s) = k_w \int \sigma_h(s)^m ds. \quad (4.1.8)$$

Подставляя (1.5.8) в (1.5.5) получаем нелинейное интегральное уравнение задачи относительно давлений, как функции от пути трения:

$$\xi_1 \left( u_{h0} + k_w \int_0^s \sigma_h(s)^m ds \right) + \xi_2 \left( u_{h0} + k_w \int_0^s \sigma_h(s)^m ds \right)^{\frac{3}{2}} = Q_1, \quad (4.1.9)$$

где

$$\xi_2 = \left( \frac{\xi_1}{\xi} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (4.1.10)$$

Возможно, снова вернуться к силам как неизвестным величинам:

$$u_{h0} = \frac{k_h}{F_n} Q_{h0}; \quad \sigma_0 = \frac{q_h}{F_H}. \quad (4.1.11)$$

и привести интегральное уравнение (1.5.9) к другому виду:

$$\xi_1 \left[ \frac{k_h}{F_n} Q_{h0} + k_w \int_0^s \left( \frac{Q_n}{F_n} \right)^m ds \right] + \xi_2 \left[ \frac{k_h}{F_n} Q_{h0} + k_w \int_0^s \left( \frac{Q_n}{F_n} \right)^m ds \right]^{\frac{3}{2}} = Q_1. \quad (4.1.12)$$

Здесь  $Q_{h0}$  - определяется из уравнения (1.4.3).

Интегральное уравнение (1.4.12) можно решать только численно.

Это нестандартное нелинейное интегральное уравнение с неизвестной функцией  $Q_h(s)$  только под интегралом. Такая структура характеризует интегральные уравнения первого рода, обладающие свойством неустойчивости при решении.

## Выводы

1. Предположена принципиально новая конструкция плоской комбинированной опоры для возвратно поступательного движения, в котором нагрузка одновременно воспринимается телами качения (шариками) и плоскими поверхностями с трением скольжения по сравнению с известными опорами новая опора обладает двумя главными преимуществами:

- меньшим сопротивлением трению по сравнению с опорами скольжения;

- улучшением условий смазки плоской части опор при скольжении, за счет подачи смазки шариками из пространства между шариками и пластиной.

2. Разработана контактная механика взаимодействия элементов качения и скольжения в опоре.

3. Показаны процедуры и примеры проверочного и проектировочных расчетов опоры.

### **Литература**

1. Ханович М.Г. Опоры жидкостного трения и комбинирование. – М.: Машгиз, 1960. – 270 с.

2. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. – К.: Наукова думка, 1988. – 736 с.