

Математична модель кварцового резонатора багаточастотної п'єзорезонансної автоколивальної системи

Стецюк В. І.¹, Хоптинський Р. П.²

¹Кафедра радіотехніки та зв'язку, Хмельницький національний університет, Хмельницький, Україна, E-mail: vicste@rambler.ru

²Національна академія Державної прикордонної служби України, Хмельницький, Україна

В роботі представлена математична модель кварцового резонатора, як складової багаточастотної п'єзорезонансної автоколивальної системи. Розглянуті основні підходи до аналізу амплітуд механічних товщинно-зсувних та товщинно-крутильних коливань кварцових резонаторів обернутих Y-зрізів. Встановлено аналітичний зв'язок між зовнішніми механічними впливами на п'єзорезонансну систему та його фізичними параметрами і зсувами частоти кварцового резонатора.

Ключові слова – кварцовий резонатор, п'єзоелемент, коливання, зріз.

I. Вступ

Невід'ємною особливістю сучасного розвитку радіоелектронних пристроїв та систем телекомунікацій є широке використання п'єзорезонансних пристроїв (ПРП), які суттєво впливають на їх кінцеві технічні характеристики та працездатність в цілому. Разом із тим, п'єзорезонансні пристрої, мають ряд недоліків та обмежень, серед яких найбільш типовими є чутливість до зовнішніх дестабілізуючих факторів – температури та механічних впливів. Зрозуміло, що досягти фізичних максимумів щодо стабільності частоти п'єзорезонансних коливальних систем можна тільки шляхом усунення або мінімізації їх залежностей від зовнішніх факторів. Важливою задачею дослідження та вивчення поведінки п'єзорезонансних систем є їх моделювання. Існуючі моделі багаточастотних кварцових резонаторів (КР) [1] мають суттєві обмеження і, як правило, розглядають п'єзорезонансний пристрій (ПРП) як прецизійний лінійний елемент із сталими параметрами. Однак комплексні дослідження характеристик кварцових резонаторів слід проводити із врахуванням ансамблю дестабілізуючих факторів [2].

II. Математична модель

Як будь-яке пружне тіло, КР має набір власних частот механічних коливань. Спектр власних частот визначається розмірами і конструктивним виконанням п'єзопластини та кварцоутримувача, способом кріплення, пружними властивостями п'єзоматеріалу та типом деформацій в процесі коливання. Для опису механічних напруг в кристалі кварцу використовують тензор механічних напруг \bar{T} [3]:

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

де компоненти t_{ij} тензора напруг дорівнюють i -й компоненті сили, яка діє на одиничну площадку, розташовану у відповідній точці кристалу перпендикулярно вісі X_j .

Під дією механічних напруг у кристалі виникають деформації, які внаслідок анізотропії пов'язані тензорним виразом:

$$r_{ij} = s_{ijpq} t_{pq}, \quad (2)$$

де s_{ijpq} – константи гнучкості або піддатливості кристалу.

Для найбільш розповсюджених обернутих резонаторів Y-зрізів (рис. 1) з коливаннями зсуву по товщині частота коливань може бути визначена із співвідношення:

$$f_r = \frac{n}{2h} \sqrt{\frac{c'_{66}}{\rho}}, \quad (3)$$

де $c'_{66} = c_{66} \cos^2 \phi + c_{44} \sin^2 \phi + 2c_{14} \sin \phi \cos \phi$ – діюча константа пружності; ϕ – кут обертання п'єзопластини; ρ – щільність; h – товщина п'єзоелементу (ПЕ); n – номер механічної гармоніки.

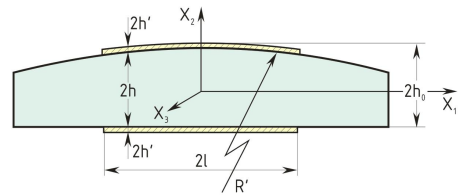


Рис. 1. Геометрична модель кварцового резонатора.

Під дією зовнішніх механічних навантажень на ПЕ виникають деформації, які призводять до зміни його геометричних розмірів та щільності і, як наслідок, до зміни власної резонансної частоти (3). Однак чутливість п'єзоелемента КР до зовнішніх механічних впливів характеризується в основному чутливістю модулів пружності, а зміни геометричних розмірів та щільності внаслідок деформацій можна не враховувати. Дана чутливість кварцу може бути представлена як:

$$\Delta c_{\lambda\mu} = c_{\lambda\mu\nu} r_\nu \quad \text{або} \quad \Delta c_{\lambda\mu} = c_{\lambda\mu\nu} s_{\nu i} t_u, \quad (4)$$

де $c_{\lambda\mu\nu}$ – тензор констант пружності третього порядку; $s_{\nu i}$ – тензор констант гнучкості; r_ν , t_u – тензори механічних деформацій та напруг.

Тоді зсув частоти під дією механічного навантаження з урахуванням (3) і (4) може бути визначений як:

$$\Delta f^G = \frac{n}{2h_0} \sqrt{\frac{\Delta c'_{66}(t_u)}{\rho_0}}, \quad (5)$$

де $\Delta c'_{66}$ – зміна діючої константа пружності, яка визначає пружні властивості кристалу кварцу у напрямку прикладання механічного навантаження; ρ_0 – номінальна щільність; h_0 – номінальна товщина п'єзоелемента; n – номер механічної гармоніки.

Відповідно амплітуди механічних товщинно-зсувних та товщинно-крутильних коливань можуть бути представлені як:

$$u_{1nmp} = \sin \frac{n\pi \cdot x_2}{2h} u_{nmp} \cdot e^{j\omega_{nmp} t}, \quad (6)$$

де $u_{nmp} = A^{nmp} \cdot e^{-\alpha_n x_1^2 / 2} H_{m-1}(\sqrt{\alpha_n} x_1) \times e^{-\beta_n x_3^2 / 2} H_{p-1}(\sqrt{\beta_n} x_3)$;
 $\alpha_n^2 = \frac{n^2 \pi^2 c_1}{8R' h_0^3 M_{1n}}$; $\beta_n^2 = \frac{n^2 \pi^2 c_1}{8R' h_0^3 P_n}$; $H_{m-1}(\bullet)$, $H_{p-1}(\bullet)$ – полі-

номи Ерміта; c_1 , M_{1n} і P_{1n} – константи, які залежать від геометрії ПЕ, модулів пружності тощо; $n=1, 3, 5...$ та $m, p=1, 2, 3...$ – числа, які визначають кількість напівхвиль, які вкладаються вздовж напрямків X_2 , X_1 та X_3 відповідно.

Для однообертнутих резонаторів АТ-зрізу константи c_1 , M_{1n} і P_{1n} визначаються у відповідності до наступних співвідношень:

$$M_{1n} = c_{11} + (c_{12} + c_{66})r' + 4 \frac{(r'\bar{c}_{66} - c_{66})(c_{22}r' + c_{12})\text{ctg } \frac{n\pi\chi}{2}}{c_{22}n\pi\chi}; \quad (7)$$

$$P_{1n} = c_{55},$$

$$\text{де } c_1 = \bar{c}_{66} \left(1 - \frac{8k_{26}^2}{n^2\pi^2} - 2R' \right); \quad \bar{c}_{66} = c_{66} + \frac{e_{66}^2}{\epsilon_{22}}; \quad k_{26}^2 = \frac{e_{26}^2}{\bar{c}_{66}\epsilon_{22}};$$

$$R = \frac{2\rho'h'}{\rho h}; \quad \chi = \sqrt{\frac{c_{66}}{c_{22}}}; \quad r' = \frac{c_{12} + c_{66}}{\bar{c}_{66} - c_{22}}; \quad \rho', \rho \text{ і } h', h -$$

щільності, товщини електродів і п'єзопластини відповідно; c_{11} , c_{12} , c_{22} , c_{55} , c_{66} та e_{26} , e_{66} , ϵ_{22} – модулі пружності та п'єзоелектричні постійні кварцу.

При цьому, резонансні частоти коливань (6) визначаються як:

$$\omega_{nmp}^2 = \frac{n^2\pi^2 c_1}{4h_0^2\rho} \left(1 + \frac{1}{n\pi} \sqrt{\frac{2h_0}{R'c_1}} (\sqrt{M_{1n}(2m+1)} + \sqrt{P_{1n}(2p+1)}) \right); \quad (8)$$

де h_0 – максимальна товщина ПЕ.

На рис. 2 і 3 представлені типові розподіли механічних коливань для резонаторів зсуву по товщині, які розраховані у відповідності до (6) і (7).

Зміни розподіленних сил, які діють в об'ємі п'єзопластини повздовж радіуса r :

$$\Delta F_r(\psi) = d_{rr}(\psi) \cdot S_e \cdot \Delta T_r(\psi), \quad (9)$$

де $S_e = R \cdot h \cdot \Delta\psi_e$ – площа елементарної площадки торцевої поверхні ПЕ, h – товщина ПЕ.

Тоді загальний термодинамічний зсув частоти буде визначатись як:

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{f_0}{2n} \cdot h \int_0^\pi K_f(\psi) \cdot d_{rr}(\psi) [T_0 - T_R(\psi)] d\psi, \quad (10)$$

де T_0 , $T_R(\psi)$ – температура в центрі та на краю ПЕ; $K_f(\psi)$ – коефіцієнт силочутливості Ратайського.

З урахуванням (10), для $n=m=p=1$ об'ємна щільність джерела тепла, яке виникає після включення КР із-за дисипативних втрат визначається як:

$$q_V(x_1, x_3) = \frac{P_{3\bar{6}}}{V_N} \cdot \exp\left(-\alpha_n \frac{x_1^2}{2}\right) \exp\left(-\beta_n \frac{x_3^2}{2}\right) = \frac{q'_V(x_1, x_3)}{V_N}, \quad (11)$$

де $P_{3\bar{6}} = 0,5I_q^2 R_q$ – потужність збудження ПЕ;

$V_N = \int_V q'_V(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3$ – нормуючий об'єм.

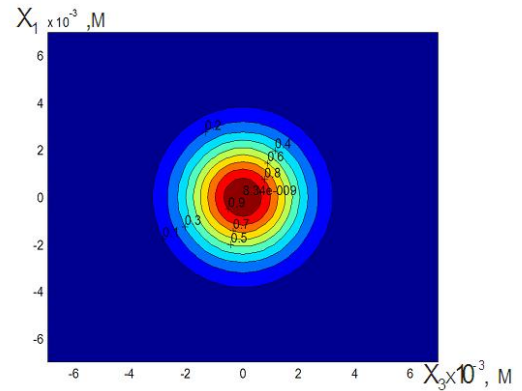
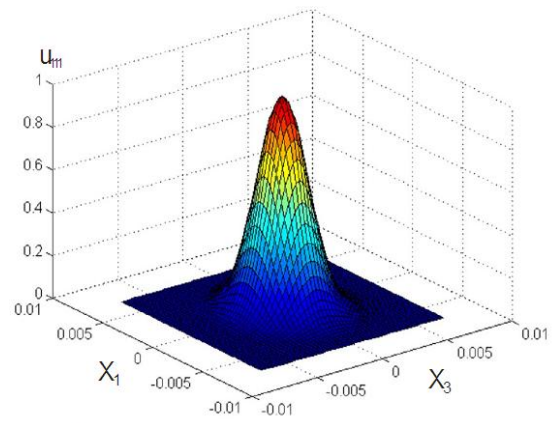


Рис. 2. Типовий розподіл амплітуд механічних коливань u_{111} для резонаторів АТ-зрізу.

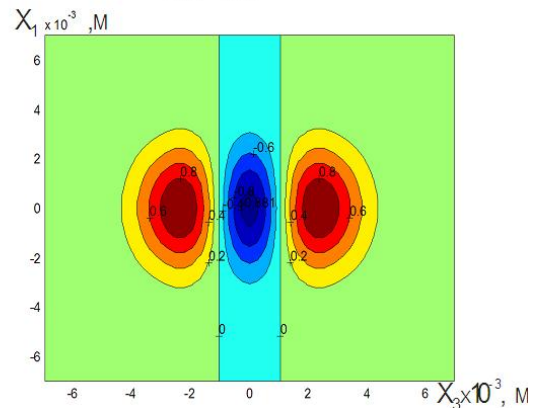
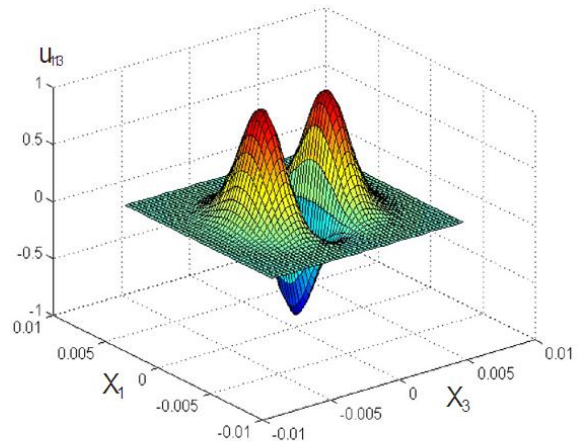


Рис. 3. Типовий розподіл амплітуд механічних коливань u_{113} для резонаторів АТ-зрізу.

III. Висновки

Побудовано математичну модель кварцового резонатора багаточастотної п'єзореzonансної автоколивальної системи. Встановлено, що нестабільність частоти коливань багаточастотної коливальної системи суттєво залежить від зсувів частоти як наслідок виникнення термодинамічних напруг в об'ємі ПЕ на етапі самопрогріву КР та зсувів частоти як наслідок вібродинамічних напруг в об'ємі ПЕ в результаті зовнішніх механічних впливів. На прикладі резонаторів АТ-зрізів проведена оцінка об'ємної щільності внутрішнього джерела тепла, як дисипативної складової енергії збудження резонатора. Побудовані розподіли механічних коливань для основної моди, гармонічних та ангармонічних складових спектру кварцового резонатора, які є основою визначення термодинамічної складової нестабільності ПРП на етапі встановлення теплового балансу КР після включення.

IV. Список літератури

- [1] Колпаков Ф. Ф. Теорія і реалізаційні основи інваріантних п'єзореzonансних коливальних систем / Ф. Ф. Колпаков, С. К. Підченко. – Харків: Нац. аерокосм. ун-т. “Харк. авіац. ін-т.”, 2011. – 327 с.
- [2] Стецюк В. І. Проблеми вібраційної стабільності кварцових резонаторів // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – № 1, 2008. – с. 166-167.
- [3] Підченко С. К. Математичне моделювання силочастотних характеристик кварцових резонаторів / С. К. Підченко, А. А. Таранчук, В. І. Стецюк // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – Харків, НАУ ХАІ, 2011. – № 2(50). – 140 с.

MATHEMATICAL MODEL QUARTZ CRYSTAL MULTI-FREQUENCY PIEZORESONANCE OSCILLATING SYSTEM

Stetsyuk V. I.¹, Hoptinsky R. P.²

¹Department of Radio Engineering and Communication, Khmelnytsky National University, Khmelnytsky, Ukraine.

²The National Academy of the State Border Guard Service of Ukraine, Khmelnytsky, Ukraine.

The paper presents a mathematical model of the quartz resonator, as part of a multi-frequency piezoresonance oscillating system. The main approaches to the analysis of the amplitudes of the mechanical thickness of the sliding-and thick-torsional vibrations of quartz resonators wrapped Y-cut. Established analytical relationship between external mechanical influences on piezoresonance system and its physical parameters and frequency shifts of the quartz resonator.

A mathematical model of the quartz resonator multifrequency piezoresonance oscillating system. It is found that the instability of the oscillation frequency of a multi-frequency oscillatory system essentially depends on the frequency shifts as a consequence of the emergence of thermodynamic stresses in the bulk of the piezoelectric element on stage samoprogreva quartz oscillator and frequency shifts as a consequence vibrodinamic stresses in the volume of the piezoelectric element as a result of external mechanical influences. On the example of AT-cut resonators, the evaluation of bulk density of the internal heat source, as the dissipative component of the excitation energy of the resonator. Built distribution of mechanical vibrations for the fundamental mode, harmonic and anharmonic components of the spectrum of the quartz resonator, which are the basis for determining the thermodynamic instability piezoresonance component devices when establishing the thermal balance of the quartz resonator is turned on.