УДК 539.3



М. М. Діхтярук

# Періодична контактна задача для пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями

*(Представлено академіком НАН України О. М. Гузем)*

*The contract problem for an initially stressed elastic strip strengthened by periodically placed elastic laps (stringers) is considered. Using the Fourier integral transformation, the influence function for an elastic infinite strip with one edge fixed and a unit concentrated force applied to it is constructed. The solution of the contact problem is considered for the transmission of forces from periodically placed thin elastic laps to the initially stressed strip clutched by one edge. Assuming that the beam bend model together with the model of uniaxially stressed elastic lap are true for an elastic lap which is similtaneously loaded by vertical and horizontal forces, the problem is mathematically formulated as a system of integro-differential equations for the unknown contact stresses. This system is reduced to an infinite system of algebraic equations which is solved by means of reduction. The results of calculations are presented in the form of graphs and diagrams.*

Закон розподілу контактних напружень вздовж відрізків кріплення періодично розміщених пружних накладок з пружною ізотропною і анізотропною півплощиною без початкових напружень досліджувався в роботах [1–3]. У випадку півплощини з початковими (залишковими) напруженнями такі задачі наведені в [4].

У даній роботі в рамках лінеаризованої теорії пружності [5] досліджується вплив початкових (залишкових) напружень на розподіл контактних напружень в пружній смузі з початковими (залишковими) напруженнями, підкріпленій періодично розміщеними пружними накладками з періодом $2l$ $(l > a)$, і завантаженими зовнішніми силами інтенсивністю $p_0(y_1)$ і $q_0(y_1)$ відповідно.

Пропонується метод побудови розв'язку таких задач для смуги товщиною $t$, підкріпленої на скінченних відрізках $[-a + 2kl, a + 2kl]$ $(l > a,\ k = 0, \pm 1, \dots)$ своєї грані $y_1 = 0$ періодично розміщеними скінченними пружними накладками, які мають товщину $h$, а інша грань $y = -t$ жорстко защемлена.

Будемо вважати, що початковий стан в пружній смузі, який виникає там до підкріплення останньої пружними накладками, є однорідним і виконується умова $S_{22}^0 = 0$, тобто пружна смуга завантажена тільки в напрямку осі $Oy_1$. Дослідження проведено в лагранжевих координатах [5], які збігаються з декартовими координатами в початковому (залишковому) напружено-деформованому стані. Всі величини відносяться до розмірів тіла в початковому напруженому стані: дослідження проведені в координатах $y_i$ в загальній формі для стисливих і нестисливих тіл для всіх постановок задач [5] для скінченних і малих початкових деформацій у випадку пружних потенціалів довільної структури. Величини, які відносяться до пружних накладок, записуватимемо у прийнятих в класичній теорії пружності позначеннях, а для смуги з початковими напруженнями — в позначеннях [1, 2].

Враховуючи вищезгадане, зауважимо, що контактні напруження, які виникають на відрізках $L_k$ з боку пружних накладок і пружної смуги з початковими напруженнями, будуть періодичними функціями з періодом $2l$, тобто

$$\begin{aligned} &\tau_{xy}(y_1)\big|_{y_2=0} = \tau^{(1)}(y_1) = \tau^{(1)}(y_1 - 2l) = \tau^{(1)}(y_1 + 2l), \\ &\widetilde{Q}_{21}(y_1)\big|_{y_2=0} = T(y_1) = T(y_1 - 2l) = T(y_1 + 2l). \end{aligned} \tag{1}$$

На відрізках контакту $L_k$ пружних накладок з попередньо напруженою смугою виконуються умови

$$u(y_1) = u_1(y_1); \qquad \frac{du}{dy_1} = \frac{du_1}{dy_1} \qquad \forall (y_1) \in L \quad \text{при } y_2 = 0. \tag{2}$$

$$u_1(y_1, y_2)|_{y_2=-t} = u_2(y_1, y_2)|_{y_2=-t} = 0 \qquad \forall (y_1) \in L_k. \tag{3}$$

Тут $u$ — горизонтальні переміщення накладки і $u_i$ $(i = 1, 2)$ — переміщення в пружній смузі з початковими напруженнями.

В силу періодичності (1) вплив початкових напружень на $L_k$ при $y_2 = 0$ під пружними накладками буде однаковим [1], а тому можна обмежитися лише однією накладкою $L_0$ $(k = 0)$, для якої

$$\frac{du_1(y_1)}{dy_1} = \frac{1}{E_1 h} \int_{-a}^{y_1} [q(t) - q_0(t)]\, dt,$$

$$D \frac{d^4 u_1(y_1)}{dy_1^4} = \frac{1}{E_1 h} \int_{-a}^{y_1} [q(t) - q_0(t)]\, dt.$$

Враховуючи [2, 6], переміщення $u_i$ $(i = 1, 2)$ горизонтальних точок смуги з початковими напруженнями запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} u_1(y_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_{11}(|y_1 - \tau|)\, p(\tau)\, d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} u_{12}(y_1 - \tau)\, q(\tau)\, d\tau, \\ u_2(y_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_{21}(y_1 - \tau)\, p(t)\, d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} u_{22}(|y_1 - \tau|)\, q(t)\, d\tau, \end{aligned} \tag{4}$$

де $u_{ij}(y_1)$ $(i, j = 1, 2)$ — функції впливу. Аналітичні вирази цих функцій є в роботі [6].

Задовольнивши умови (1), для визначення контактних напружень в пружній смузі з початковими напруженнями з урахуванням (2), (3) одержимо сингулярні інтегро-диференціальні рівняння у випадку рівних і нерівних коренів визначального рівняння

$$
\begin{aligned}
&D\frac{d^4}{dy_1^4}\Bigg\{\frac{p_1}{\pi}\int\limits_{-a}^{a} p(\tau)\ln\left|2\sin\frac{\pi}{l}(y_1-\tau)\right| d\tau - \frac{p_2}{2}\int\limits_{-a}^{a} q(\tau)\,\mathrm{sign}(y_1-\tau)\,d\tau + \\
&\quad + \int\limits_{-a}^{a} T_{11}(|y_1-\tau|)\,p(\tau)\,d\tau + \int\limits_{-a}^{a} T_{12}(y_1-\tau)\,q(\tau)\,d\tau + \\
&\quad + \frac{1}{2l}[\beta_2(Q_0(y_1)-M_0)-Ap_0]\Bigg\} = p(y_1)-p_0(y_1), \qquad |y_1|<a; \\
&\frac{d}{dy_1}\Bigg\{\frac{\beta_1}{\pi}\int\limits_{-a}^{a} p(\tau)\ln\left[2\sin\frac{\pi}{l}(y_1-\tau)/2\right] d\tau - \frac{\beta_2}{2}\int\limits_{-a}^{a} p(\tau)\,\mathrm{sign}(y_1-\tau)\,d\tau + \\
&\quad + \int\limits_{-a}^{a} T_{22}(|y_1-\tau|)\,q(\tau)\,d\tau + \int\limits_{-a}^{a} T_{12}(y_1-\tau)\,p(\tau)\,d\tau + \\
&\quad + \frac{1}{2l}[\beta_2(p_0y_1-M_0)+A_1Q_0]\Bigg\} = \frac{1}{E_1h}\int\limits_{-a}^{a}[q(\tau)-q_0(\tau)]\,d\tau, \qquad |y_1|<a,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

при таких граничних умовах на кінцях пружної накладки $y_1 = a$:

$$
\int\limits_{-a}^{a} xp(x)\,dx = M_0; \qquad \int\limits_{-a}^{a} q(x)\,dx = Q_0; \qquad \int\limits_{-a}^{a} p(x)\,dx = P_0. \tag{6}
$$

Тут $p(x)$ і $q(x)$ — інтенсивності відповідно нормальних і тангенціальних контактних напружень; $P_0$ і $Q_0$ — рівнодіючі вертикальних і горизонтальних сил; $M_0$ — рівнодіюча моментів зовнішніх навантажень; $P_1$, $P_2$, $\beta_1$, $\beta_2$ — величини, що характеризують початковий напружений стан; $D$ — жорсткість смуги з початковими (залишковими) напруженнями на згин; $T_{ij}|y_i-\tau|$ $(i,j=1,2)$ — функції, які характеризують напружено-деформований стан в смузі з початковими напруженнями, аналітичні вирази яких наведені в роботі [6].

Зазначимо, що сингулярні інтегро-диференціальні рівняння (5) за зовнішнім виглядом збігаються з відповідними рівняннями для ізотропної і анізотропної смуги [2, 3] без початкових напружень (класична лінійна теорія пружності). Таким чином, і структура їх розв'язків також повинна збігатися, але закони розподілу напружень і переміщень при цьому не збігаються, оскільки лінійні і лінеаризовані задачі мають різні представлення через комплексні потенціали [5].

Відзначимо, що у випадку рівних коренів [7] можна звести (5) до відомих рівнянь [5] заміною

$$
\frac{E_2}{1-\nu_2} \sim \tau_i\frac{\gamma_{21}^{(1)}\gamma_{22}^{(2)}\mu_1-\gamma_{21}^{(2)}}{\gamma_i^{(2)}-\gamma_2^{(22)}(\gamma_{22}^{(2)}-1)}; \tag{7}
$$

тут $\gamma_{ij}$, $\mu_i$ одержані в [7]; $E_2$ — модуль пружності смуги; $\nu_2$ — коефіцієнт Пуассона лінійної теорії пружності.

У випадку нерівних коренів [7] для пружних потенціалів довільної структури вищевикладену процедуру провести в аналогічній формі не вдається.

Таким чином, періодичну контактну задачу для пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями можна вважати розв'язаною у випадку, коли для відповідної області контакту розв'язана періодична задача класичної теорії пружності, що збігається з висновками, одержаними в роботі [5].


1. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* // Прикл. механика и математика. – 1968. – **32**, № 4. – С. 632–646.
2. *Морарь Г. А., Попов Г. Я.* // Прикл. механика и математика. – 1971. – **35**, вып. 1. – С. 172–178.
3. *Саркисян В. С.* Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. – Ереван: Изд-во Ереван. гос. ун-та, 1983. – 254 с.
4. *Gus' A. N., Babich S. Y., Rudnitsky V. B.* Contact problems for elastic bodies with initial stresses: Focus on Ukrainian research // Appl. Mech. Rew. – 1998. – **51**, No 5. – P. 343–371.
5. *Гузь О. М., Бабич С. Ю., Рудницький В. Б.* Контактна взаємодія тіл з початковими напруженнями. – Київ: Вища шк., 1995. – 304 с.
6. *Рудницкий В. Б., Дилтярук Н. Н.* Упругая полоса с начальными напряжениями, усиленная упругой накладкой // Прикл. механика. – 2002. – **38**, № 11. – С. 81–87.

7

8 7. *Гузь А. Н.* Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. – Киев: Наук. думка, 1983. – 240 с.

9 8. *Штаерман И. Я.* Контактные задачи теории упругости. – Москва, 1949. – 270 с.


*Технологічний університет Поділля, Хмельницький*

*Надійшло до редакції 13.10.2003*

Ковал

УДК 532.575

10.0



**Ю. П. Ладіков-Роєв, В. О. Горбань, І. М. Горбань**

# Генерація збурень магнітного поля рухами води в океані

*(Представлено академіком НАН України В. Т. Грінченком)*

*A mathematical model and a numerical algorithm for a computing of geomagnetic field perturbations that may be induced by different hydrodynamic sources are developed. Estimations of the intensity of perturbations on the ocean surface and in air are presented.*

Результати експериментальних морських гідрофізичних досліджень свідчать про існування помітних відхилень магнітних та електричних полів в океані від відповідних середніх значень магнітного і електричного поля Землі [1]. Джерелами таких збурень можуть бути хімічні і біологічні процеси, а також гідродинамічні поля, зумовлені поверхневими та внутрішніми хвилями, течіями, вихорами [1, 2]. Нижче пропонується теоретична модель, що описує генерацію збурень магнітного та електричного полів рухами води в океані і еволюцію цих збурень в атмосфері над водною поверхнею.

Розглядаються зміни електричного та магнітного полів, викликаних гідродинамічними полями різної фізичної природи. Враховуючи малу провідність морської води, зворотним впливом генерованих електромагнітних полів на рух рідини можна знехтувати.