Son Ltd., Glasgow, 1997. – 610p.

5. Rudnick L.R. Syntetethics, Mineral oils and Bio-Based Fluids /L.R. Rudnick. – Ed. Marsel Dekker. – New York, 2005. – 680p.

6. Кириченко В.І. Хіміко-технологічні аспекти комплексної переробки технічних рослинних олій на нові екологічно безпечні продукти / Л.М. Кириченко, О.М. Полумбрик В.І. Кириченко // Вопросы химии и химической технологи. – Днепропетровск : УДХТУ, 2008. – № 1. – С. 141– 144.

7. Кириченко В.І. Якісні біоматеріали із технічних олій: стан і перспективи переробки / Л.М. Кириченко, О.М. Полумбрик В.І. Кириченко // Хімічна промисловість України. – К.; 2008,– № 3. – С. 9– 18.

8. Erhan S.Z. Bio-Based Industrial Fluids and Lubricants/ S.Z. Erhan, J.M. Perez. – Eds. AOCS Press. – IL. – 2002. – 385p.

9. Lansdown A.R. Lubrication and Lubricant Selection: A Pructical Guide. / A.R.Lansdown. – Third Edition. – Series Editors: N. – J. Neale, T.A. Polak and Priest. – Professinal Engineering Limited. – London, 2006. – 286p.

Надійшла 3.5.2012 р.
Статтю представляє: д.пед.н. Кириченко В.І.

УДК 519.832.3::621

В.В. РОМАНЮК
Хмельницкий национальный университет

ПРЕИМУЩЕСТВО УСТРАНЕНИЯ ТРЁХЭЛЕМЕНТНОЙ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ ПО КРИТЕРИЮ МИНИМИЗАЦИИ МАКСИМАЛЬНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ОТКЛОНЕНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ НАИБОЛЕЕ ОСТОРОЖНОЙ ОЦЕНКИ ВЕРОЯТНОСТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА ЧАСТНОМ МНОЖЕСТВЕ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ В СРАВНЕНИИ СО СРЕДНИМ АРИФМЕТИЧЕСКИМ

Рассматривается задача устранения трёхэлементной неопределённости в виде множества с отсортированными положительными значениями в смысле отображения этого множества на одноэлементное множество с требованием по допустимости максимального относительного отклонения. Найдено границу устранения такой неопределённости с применением среднего арифметического. Эта граница оказалась выше границы устранения рассматриваемой трёхэлементной неопределённости по критерию минимизации максимальных относительных отклонений, где использовано ожидаемое значение по наиболее осторожной оценке вероятностного распределения на частном множестве исходных данных. Отмечается то, что это вероятностное распределение содержит только две ненулевых вероятности, а вероятность выбора наибольшего значения равна нулю. Оговаривается возможность дополнительного обоснования выбора квазиметрики для критерия выполнения отображения множества исходных данных на одноэлементное множество и для генерации элементов соответствующей матричной 3×3 *-игры.*

There is considered a problem of removing the three-element uncertainty as the set with sorted positive values in a sense of mapping this set onto the single-element set upon requirement for tolerance of the maximal relative deviation. There was found the frontier of removing such uncertainty with applying the arithmetic mean. This frontier has appeared beyond the frontier of the being considered three-element uncertainty removal by the criterion of minimizing maximal relative deviations, where used the expected value over the most cautious evaluation of the probabilistic distribution on the partial initial data set. It is noted that this probabilistic distribution contains only two nonzero probabilities, and the probability of selecting the greatest value equals zero. There is mentioned the facility of additional substantiation of the quasimetrics selection for the criterion of performing the mapping of the initial data set onto the single-element set and for generating elements of the corresponding matrix 3×3 *-game.*

Ключевые слова: неопределённость, трёхэлементная неопределённость, отображение множества данных на одноэлементное множество, устранение неопределённости, среднее арифметическое, наиболее осторожная оценка вероятностного распределения, граница устранения неопределённости, максимально допустимое относительное отклонение.

Вступление

При проведении измерений или эмпирическом оценивании параметров исследуемых объектов в машиностроении приходится сталкиваться с однотипными данными, характеризующими один и тот же параметр, что порождает первоначальную неопределённость в оценивании его истинного значения [1, 2]. Отображение множества таких данных на одноэлементное множество (ОМ) означает устранение неопределённости (УН) в смысле приемлемости условий такого отображения [3, 4]. Обоснование этих условий до сих пор является одной из актуальных проблем современной теорий принятия решений [5, 6].

Анализ подходов отображения множества исходных данных на одноэлементное множество

Существует два фундаментальных подхода к отображению множества исходных данных (МИД) на ОМ. Один из них оперирует вероятностным распределением на МИД, что позволяет принимать оценку параметра, равную ожидаемому значению [2, 5]. Использование среднего арифметического (СА) здесь является частным случаем, ведь СА равносильно ожидаемому значению [2, 4, 5] по равновероятному распределению. Другой подход к отображению МИД на ОМ через предполагаемую ненадёжность вероятностного распределения на МИД или отсутствие оценки такого распределения использует известный минимаксный принцип Вальда [2, 5, 6], применяемый и в смысле оптимальной стратегии второго игрока (ОСВИ), являющейся наиболее осторожной оценкой [7, 8] вероятностного распределения (НООВР) на МИД.

Цель и задачи статьи

Исследуем разницу между результатом УН по ОСВИ в соответствующей матричной игре и по СА для простого случая трёхэлементной неопределённости (ТЭН) в виде множества с отсортированными значениями

$$\{v_i\}_{i=1}^{3} = \{v_1,\, v_1 + 2\varepsilon,\, v_1 + 3\varepsilon\},\quad v_1 > 0,\quad \varepsilon > 0. \tag{1}$$

Число $v_1 > 0$ рассматривается не как прямой результат наблюдений или вычислений, а как нормированное или приведённое к положительному виду минимальное из зафиксированных значений параметра. Также по множеству (1) видно, что исследуется частный случай устранения ТЭН, где приведённые отклонения второго и третьего значений от первого оказались в соотношении $2:3$. Для достижения намеченной цели необходима формулировка критерия выполнения отображения МИД (1) в определённое ОМ, который позволит применить СА (фактически, равновероятное распределение) и ОСВИ, после чего результаты УН будут сравнены.

Критерий выполнения отображения МИД (1) в ОМ

Если результатом УН является некоторая оценка $\hat{v}$, представляющая, собственно, искомое ОМ, то вполне ясно, что для (1) должно быть

$$\hat{v} \in [v_1;\, v_1 + 3\varepsilon]. \tag{2}$$

При этом потребуем, чтобы

$$\max_{i=\overline{1,3}} \left\{ \max\left\{ \frac{\hat{v}}{v_i},\, \frac{v_i}{\hat{v}} \right\} \right\} \leqslant \delta_v^{(\text{max-rel})} \tag{3}$$

для задаваемого максимально допустимого относительного отклонения (МДОО) $\delta_v^{(\text{max-rel})} > 0$.

Граница устранения ТЭН по МИД (1) с применением СА

Нетрудно понять, что существуют достаточно малые МДОО $\delta_v^{(\text{max-rel})} > 0$ такие, что требование (3) невыполнимо при любом способе получения оценки $\hat{v}$. Для МИД (1) представляется возможным определить границу устранения ТЭН с применением СА

$$\bar{v} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} v_i = v_1 + \frac{5}{3}\varepsilon, \tag{4}$$

которая эквивалентна такому наименьшему МДОО, при котором требование (3) ещё выполнимо.

Теорема 1. Устранение ТЭН по МИД (1) с применением СА (4) возможно, если только МДОО

$$\delta_v^{(\text{max-rel})} \geqslant 1 - \frac{5\varepsilon}{3v_1} \tag{5}$$

при произвольных $v_1 > 0$ и $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Выполняя требование (3) с оценкой $\hat{v} = \bar{v}$ по (4), получаем

$$\max_{i=\overline{1,3}} \left\{ \max\left\{ \frac{\bar{v}}{v_i},\, \frac{v_i}{\bar{v}} \right\} \right\} = \max\left\{ \max\left\{ \frac{v_1 + \frac{5}{3}\varepsilon}{v_1},\, \frac{v_1}{v_1 + \frac{5}{3}\varepsilon} \right\},\, \max\left\{ \frac{v_1 + \frac{5}{3}\varepsilon}{v_1 + 2\varepsilon},\, \frac{v_1 + 2\varepsilon}{v_1 + \frac{5}{3}\varepsilon} \right\},\, \max\left\{ \frac{v_1 + \frac{5}{3}\varepsilon}{v_1 + 3\varepsilon},\, \frac{v_1 + 3\varepsilon}{v_1 + \frac{5}{3}\varepsilon} \right\} \right\} =$$

$$=\max\left\{\frac{v_1+\frac{5}{3}\varepsilon}{v_1},\ \frac{v_1+2\varepsilon}{v_1+\frac{5}{3}\varepsilon},\ \frac{v_1+3\varepsilon}{v_1+\frac{5}{3}\varepsilon}\right\}=\max\left\{\frac{v_1+\frac{5}{3}\varepsilon}{v_1},\ \frac{v_1+3\varepsilon}{v_1+\frac{5}{3}\varepsilon}\right\}=\max\left\{1+\frac{5\varepsilon}{3v_1},\ 1+\frac{\frac{4}{3}\varepsilon}{v_1+\frac{5}{3}\varepsilon}\right\}=$$

$$=\max\left\{1+\frac{5\varepsilon}{3v_1},\ 1+\frac{4\varepsilon}{3v_1+5\varepsilon}\right\}=1+\frac{5\varepsilon}{3v_1}, \tag{6}$$

где использовано то, что

$$\frac{5\varepsilon}{3v_1}-\frac{4\varepsilon}{3v_1+5\varepsilon}=\frac{15v_1\varepsilon+25\varepsilon^2-12v_1\varepsilon}{3v_1\left(3v_1+5\varepsilon\right)}=\frac{3v_1\varepsilon+25\varepsilon^2}{3v_1\left(3v_1+5\varepsilon\right)}>0.$$

Поэтому требование (3) с оценкой $\breve{v}=\bar{v}$ по (4) не выполняется для МДОО, которое меньше значения (6), откуда и следует сформулированное утверждение. Теорема доказана.

Итак, границей устранения ТЭН по МИД (1) с применением СА (4) является значение $\delta_v^{(\max\text{-rel})}=1+\dfrac{5\varepsilon}{3v_1}$, то есть при $\delta_v^{(\max\text{-rel})}<1+\dfrac{5\varepsilon}{3v_1}$ применение СА (4) уже невозможно.

Граница устранения ТЭН по МИД (1) с применением ОСВИ

Определение границы устранения ТЭН по МИД (1) с применением ОСВИ начнём с решения соответствующей матричной 3×3-игры

$$\left\langle \left\{m_k\right\}_{k=1}^{3},\ \left\{s_j\right\}_{j=1}^{3},\ \left[u_{kj}\right]_{3\times3}\right\rangle, \tag{7}$$

где i-я чистая стратегия игрока означает выбор им значения v_i, $i=\overline{1,3}$. Для второго игрока этот выбор контролируем, а первый игрок олицетворяет те случайные и непредсказуемые обстоятельства, которые определяют истинное значение исследуемого параметра. Элементы матрицы $\mathbf{U}=\left[u_{kj}\right]_{3\times3}$ игры (7) для соответствия относительности в требовании (3) можно определять как

$$u_{kj}=\max\left\{\frac{v_k}{v_j},\ \frac{v_j}{v_k}\right\}\quad \forall\ k=\overline{1,3}\ \text{ и }\ \forall\ j=\overline{1,3}. \tag{8}$$

Вопрос о том, имеет ли континуум игр (7) общее решение в форме ОСВИ с параметрами $v_1>0$ и $\varepsilon>0$, разрешает следующее утверждение.

Теорема 2. В игре (7) с элементами (8) для МИД (1) существует единственная ОСВИ

$$\breve{\mathbf{Q}}=[\breve{q}_1\quad \breve{q}_2\quad \breve{q}_3]=\begin{bmatrix}\dfrac{v_1+4\varepsilon}{4v_1+10\varepsilon} & \dfrac{3v_1+6\varepsilon}{4v_1+10\varepsilon} & 0\end{bmatrix} \tag{9}$$

при произвольных $v_1>0$ и $\varepsilon>0$.

Доказательство. Учитывая (8), выпишем симметричную матрицу игры (7):

$$\mathbf{U}=\left[u_{kj}\right]_{3\times3}=\begin{bmatrix}1 & \dfrac{v_1+2\varepsilon}{v_1} & \dfrac{v_1+3\varepsilon}{v_1}\\[2ex] \dfrac{v_1+2\varepsilon}{v_1} & 1 & \dfrac{v_1+3\varepsilon}{v_1+2\varepsilon}\\[2ex] \dfrac{v_1+3\varepsilon}{v_1} & \dfrac{v_1+3\varepsilon}{v_1+2\varepsilon} & 1\end{bmatrix}=1+\frac{\varepsilon}{v_1}\cdot\begin{bmatrix}0 & 2 & 3\\[2ex] 2 & 0 & \dfrac{v_1}{v_1+2\varepsilon}\\[2ex] 3 & \dfrac{v_1}{v_1+2\varepsilon} & 0\end{bmatrix}. \tag{10}$$

Как видим, для получения ОСВИ в игре (7) вида

$$\left\langle \{m_k\}_{k=1}^{3},\ \{s_j\}_{j=1}^{3},\ 1+\frac{\varepsilon}{v_1}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & \dfrac{v_1}{v_1+2\varepsilon} \\ 3 & \dfrac{v_1}{v_1+2\varepsilon} & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \tag{11}$$

в силу $v_1 > 0$ и $\varepsilon > 0$ достаточно решить аффинно эквивалентную [3] ей игру

$$\left\langle \{m_k\}_{k=1}^{3},\ \{s_j\}_{j=1}^{3},\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & \dfrac{v_1}{v_1+2\varepsilon} \\ 3 & \dfrac{v_1}{v_1+2\varepsilon} & 0 \end{bmatrix} \right\rangle. \tag{12}$$

Обозначив

$$a = \frac{v_1}{v_1+2\varepsilon}, \tag{13}$$

получим игру

$$\left\langle \{m_k\}_{k=1}^{3},\ \{s_j\}_{j=1}^{3},\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & a \\ 3 & a & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \tag{14}$$

с параметром (13), где, заметим, $a \in (0;1)$. Применяя метод задачи линейного программирования в форме эквивалентных матричных преобразований [3, 9, 10] по отношению к расширенной 4×7-матрице $\left[z_{ph}\right]_{4\times7}$ для игры (14), имеем:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & a+1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & a+1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{11-a}{4} & \frac{15}{4} & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1-3a}{4} & a+\frac{1}{4} & 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{a+1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{3-a}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{11-a}{15} & 1 & \frac{4}{15} & 0 & -\frac{1}{15} \\ \frac{1-a}{5} & 0 & \frac{1-22a+a^2}{15} & 0 & -\frac{4a+1}{15} & 1 & \frac{a-11}{15} \\ \frac{1}{5} & 1 & \frac{4a+1}{15} & 0 & -\frac{1}{15} & 0 & \frac{4}{15} \\ -\frac{2}{5} & 0 & \frac{1-a}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \frac{3}{11-a} & 0 & 1 & \frac{15}{11-a} & \frac{4}{11-a} & 0 & \frac{1}{a-11} \\ \frac{2(a+1)}{11-a} & 0 & 0 & \frac{1-22a+a^2}{a-11} & \frac{3a-1}{11-a} & 1 & \frac{8}{a-11} \\ \frac{2-a}{11-a} & 1 & 0 & \frac{4a+1}{a-11} & \frac{a+1}{a-11} & 0 & \frac{3}{11-a} \\ \frac{a-5}{11-a} & 0 & 0 & \frac{3(a-1)}{11-a} & \frac{a-3}{11-a} & 0 & \frac{2}{a-11} \end{bmatrix}, \tag{15}$$

где первоначально в базис был введён элемент z_{32}, а на третьей итерации использовано то, что

$$\frac{1}{5}:\frac{11-a}{15}-\frac{1-a}{5}:\frac{1-22a+a^2}{15}=\frac{30(a+1)}{(a-11)(1-22a+a^2)}<0 \quad \forall\, a\in\left(0;\,11-2\sqrt{30}\right)$$

и

$$\frac{1-22a+a^2}{15}\leqslant 0 \quad \forall\, a\in\left[11-2\sqrt{30};1\right),$$

а также

$$\frac{1}{5}:\frac{11-a}{15}-\frac{1}{5}:\frac{4a+1}{15}=\frac{15(2-a)}{(a-11)(4a+1)}<0 \quad \forall\, a\in(0;1),$$

что обосновывает введение в базис элемента z_{13} на третьей итерации. Из последней расширенной матрицы в преобразованиях (15) выплывает ОСВИ

$$\breve{\mathbf{Q}}=[\breve{q}_1\ \ \breve{q}_2\ \ \breve{q}_3]=\left(\frac{2-a}{11-a}+\frac{3}{11-a}\right)^{-1}\cdot\begin{bmatrix}\frac{2-a}{11-a} & \frac{3}{11-a} & 0\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{11-a}{5-a}\cdot\begin{bmatrix}\frac{2-a}{11-a} & \frac{3}{11-a} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2-a}{5-a} & \frac{3}{5-a} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{v_1+4\varepsilon}{4v_1+10\varepsilon} & \frac{3v_1+6\varepsilon}{4v_1+10\varepsilon} & 0\end{bmatrix}. \qquad (16)$$

С другой стороны, при первоначальном введении в базис элемента z_{14} получается следующее:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 1 & a+1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 4 & a+1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0\\ \frac{3-a}{4} & \frac{11-a}{4} & \frac{1-3a}{4} & 0 & -\frac{a+1}{4} & 1 & 0\\ \frac{3}{4} & \frac{15}{4} & a+\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 1\\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0\end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & 0 & \frac{11-a}{15} & 1 & \frac{4}{15} & 0 & -\frac{1}{15}\\ \frac{1-a}{5} & 0 & \frac{1-22a+a^2}{15} & 0 & -\frac{4a+1}{15} & 1 & \frac{a-11}{15}\\ \frac{1}{5} & 1 & \frac{4a+1}{15} & 0 & -\frac{1}{15} & 0 & \frac{4}{15}\\ -\frac{2}{5} & 0 & \frac{1-a}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5}\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}\frac{3}{11-a} & 0 & 1 & \frac{15}{11-a} & \frac{4}{11-a} & 0 & \frac{1}{a-11}\\ \frac{2(a+1)}{11-a} & 0 & 0 & \frac{1-22a+a^2}{a-11} & \frac{3a-1}{11-a} & 1 & \frac{8}{a-11}\\ \frac{2-a}{11-a} & 1 & 0 & \frac{4a+1}{a-11} & \frac{a+1}{a-11} & 0 & \frac{3}{11-a}\\ \frac{a-5}{11-a} & 0 & 0 & \frac{3(a-1)}{11-a} & \frac{a-3}{11-a} & 0 & \frac{2}{a-11}\end{bmatrix}, \qquad (17)$$

что даёт (16), где на второй итерации с введением в базис элемента z_{32} использовано то, что

$$\frac{3-a}{4}:\frac{11-a}{4}-\frac{3}{4}:\frac{15}{4}=\frac{3-a}{11-a}-\frac{1}{5}=\frac{4(1-a)}{5(11-a)}>0 \quad \forall\, a\in(0;1),$$

а третья итерация аналогична третьей итерации в преобразованиях (15). Наконец, итерационный процесс можно начать и с введения в базис элемента z_{13}:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 1 & a+1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 4 & a+1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0\\ \frac{2}{3} & \frac{8}{3} & 0 & \frac{3a-1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0\\ \frac{2-a}{3} & \frac{11-a}{3} & 0 & -\frac{1+4a}{3} & -\frac{a+1}{3} & 0 & 1\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0\end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix} \frac{3}{11-a} & 0 & 1 & \frac{15}{11-a} & \frac{4}{11-a} & 0 & \frac{1}{a-11} \\ \frac{2(a+1)}{11-a} & 0 & 0 & \frac{1-22a+a^2}{a-11} & \frac{3a-1}{11-a} & 1 & \frac{8}{a-11} \\ \frac{2-a}{11-a} & 1 & 0 & \frac{4a+1}{a-11} & \frac{a+1}{a-11} & 0 & \frac{3}{11-a} \\ \frac{a-5}{11-a} & 0 & 0 & \frac{3(a-1)}{11-a} & \frac{a-3}{11-a} & 0 & \frac{2}{a-11} \end{bmatrix}, \tag{18}$$

что снова даёт (16), где на второй итерации с введением в базис элемента z_{32} использовано то, что

$$\frac{2-a}{3}:\frac{11-a}{3}-\frac{2}{3}:\frac{8}{3}=\frac{2-a}{11-a}-\frac{1}{4}=\frac{-3(1+a)}{4(11-a)}<0 \quad \forall\ a\in(0;1).$$

Инвариантность итога (16) эквивалентных преобразований (15), (17) и (18) указывает на единственность ОСВИ (9). Теорема доказана.

Теперь, установив ОСВИ (9) как НООВР на МИД (1) по критерию минимизации максимальных относительных отклонений (8), можно указать границу устранения ТЭН по МИД (1) с применением оценки

$$\tilde{v}\left(\tilde{\mathbf{Q}}\right)=\sum_{j=1}^{3}\tilde{q}_j v_j=\frac{v_1+4\varepsilon}{4v_1+10\varepsilon}\cdot v_1+\frac{3v_1+6\varepsilon}{4v_1+10\varepsilon}\cdot v_2+0\cdot v_3=$$

$$=\frac{v_1+4\varepsilon}{4v_1+10\varepsilon}\cdot v_1+\frac{3v_1+6\varepsilon}{4v_1+10\varepsilon}\left(v_1+2\varepsilon\right)=v_1+3\varepsilon\cdot\frac{v_1+2\varepsilon}{2v_1+5\varepsilon} \tag{19}$$

по ОСВИ (9).

Теорема 3. Устранение ТЭН по МИД (1) с применением оценки (19) по ОСВИ (9) возможно, если только МДОО

$$\delta_*^{(\max\text{-rel})}\geqslant\frac{2v_1^2+8v_1\varepsilon+6\varepsilon^2}{v_1\left(2v_1+5\varepsilon\right)} \tag{20}$$

при произвольных $v_1>0$ и $\varepsilon>0$.

Доказательство. Выполняя требование (3) с оценкой $\tilde{v}=\tilde{v}\left(\tilde{\mathbf{Q}}\right)$ по (19), получаем

$$\max_{i=\overline{1,3}}\left\{\max\left\{\frac{\tilde{v}\left(\tilde{\mathbf{Q}}\right)}{v_i},\ \frac{v_i}{\tilde{v}\left(\tilde{\mathbf{Q}}\right)}\right\}\right\}=\max\left\{\max\left\{\frac{v_1+3\varepsilon\cdot\frac{v_1+2\varepsilon}{2v_1+5\varepsilon}}{v_1},\ \frac{v_1}{v_1+3\varepsilon\cdot\frac{v_1+2\varepsilon}{2v_1+5\varepsilon}}\right\},\ \max\left\{\frac{v_1+3\varepsilon\cdot\frac{v_1+2\varepsilon}{2v_1+5\varepsilon}}{v_1+2\varepsilon},\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{v_1+2\varepsilon}{v_1+3\varepsilon\cdot\frac{v_1+2\varepsilon}{2v_1+5\varepsilon}}\right\},\ \max\left\{\frac{v_1+3\varepsilon\cdot\frac{v_1+2\varepsilon}{2v_1+5\varepsilon}}{v_1+3\varepsilon},\ \frac{v_1+3\varepsilon}{v_1+3\varepsilon\cdot\frac{v_1+2\varepsilon}{2v_1+5\varepsilon}}\right\}\right\}=$$

$$=\max\left\{\frac{v_1+3\varepsilon\cdot\frac{v_1+2\varepsilon}{2v_1+5\varepsilon}}{v_1},\ \frac{v_1+3\varepsilon\cdot\frac{v_1+2\varepsilon}{2v_1+5\varepsilon}}{v_1+2\varepsilon},\ \frac{v_1+3\varepsilon}{v_1+3\varepsilon\cdot\frac{v_1+2\varepsilon}{2v_1+5\varepsilon}}\right\}=\max\left\{\frac{v_1+3\varepsilon\cdot\frac{v_1+2\varepsilon}{2v_1+5\varepsilon}}{v_1},\ \frac{v_1+3\varepsilon}{v_1+3\varepsilon\cdot\frac{v_1+2\varepsilon}{2v_1+5\varepsilon}}\right\}=$$

$$=\max\left\{\frac{2v_1^2+8v_1\varepsilon+6\varepsilon^2}{v_1\left(2v_1+5\varepsilon\right)},\ \frac{\left(v_1+3\varepsilon\right)\left(2v_1+5\varepsilon\right)}{2v_1^2+8v_1\varepsilon+6\varepsilon^2}\right\}=\frac{2v_1^2+8v_1\varepsilon+6\varepsilon^2}{v_1\left(2v_1+5\varepsilon\right)}, \tag{21}$$

где использовано то, что

$$\frac{2v_1^2+8v_1\varepsilon+6\varepsilon^2}{v_1\left(2v_1+5\varepsilon\right)}-\frac{\left(v_1+3\varepsilon\right)\left(2v_1+5\varepsilon\right)}{2v_1^2+8v_1\varepsilon+6\varepsilon^2}=\frac{2\left(v_1+\varepsilon\right)\left(v_1+3\varepsilon\right)}{v_1\left(2v_1+5\varepsilon\right)}-\frac{\left(v_1+3\varepsilon\right)\left(2v_1+5\varepsilon\right)}{2\left(v_1+\varepsilon\right)\left(v_1+3\varepsilon\right)}=$$

$$=\frac{4\left(v_1+\varepsilon\right)^2\left(v_1+3\varepsilon\right)^2-v_1\left(v_1+3\varepsilon\right)\left(2v_1+5\varepsilon\right)^2}{2v_1\left(2v_1+5\varepsilon\right)\left(v_1+\varepsilon\right)\left(v_1+3\varepsilon\right)}=\frac{4\left(v_1+\varepsilon\right)^2\left(v_1+3\varepsilon\right)-v_1\left(2v_1+5\varepsilon\right)^2}{2v_1\left(2v_1+5\varepsilon\right)\left(v_1+\varepsilon\right)}=$$

$$=\frac{4v_1^3+8v_1^2\varepsilon+4\varepsilon^2v_1+12v_1^2\varepsilon+24v_1\varepsilon^2+12\varepsilon^3-4v_1^3-20v_1^2\varepsilon-25v_1\varepsilon^2}{2v_1\left(2v_1+5\varepsilon\right)\left(v_1+\varepsilon\right)}=$$

$$=\frac{3v_1\varepsilon^2+12\varepsilon^3}{2v_1\left(2v_1+5\varepsilon\right)\left(v_1+\varepsilon\right)}=3\varepsilon^2\cdot\frac{v_1+4\varepsilon}{2v_1\left(2v_1+5\varepsilon\right)\left(v_1+\varepsilon\right)}>0\,.$$

Поэтому требование (3) с оценкой $\hat{v}=\hat{v}\left(\breve{\mathbf{Q}}\right)$ по (19) не выполняется для МДОО, которое меньше значения (21), откуда и следует сформулированное утверждение. Теорема доказана.

Преимущество устранения ТЭН по МИД (1) с применением ОСВИ (9) в сравнении с СА (4)

Определённые в Теоремах 1 и 3 границы устранения ТЭН по МИД (1) с применением оценки (4) и (19) позволяют сравнить результаты УН с применением ОСВИ (9) и СА (4). Так как

$$\frac{2v_1^2+8v_1\varepsilon+6\varepsilon^2}{v_1\left(2v_1+5\varepsilon\right)}-\left(1+\frac{5\varepsilon}{3v_1}\right)=\frac{6\left(v_1^2+4v_1\varepsilon+3\varepsilon^2\right)-\left(2v_1+5\varepsilon\right)\left(3v_1+5\varepsilon\right)}{3v_1\left(2v_1+5\varepsilon\right)}=$$

$$=\frac{6\left(v_1^2+4v_1\varepsilon+3\varepsilon^2\right)-6v_1^2-25v_1\varepsilon-25\varepsilon^2}{3v_1\left(2v_1+5\varepsilon\right)}=\frac{-v_1\varepsilon-7\varepsilon^2}{3v_1\left(2v_1+5\varepsilon\right)}=-\varepsilon\cdot\frac{v_1+7\varepsilon}{3v_1\left(2v_1+5\varepsilon\right)}<0\,,$$

то для устранения ТЭН по МИД (1) использование ОСВИ (9) приоритетно по сравнению с использованием СА (4), и принимаемой для УН оценкой есть

$$\hat{v}\in\arg\min_{\left\{\bar{v},\,\hat{v}\left(\breve{\mathbf{Q}}\right)\right\}}\left\{\max_{i=\overline{1,\,3}}\left\{\max\left\{\frac{\bar{v}}{v_i},\,\frac{v_i}{\bar{v}}\right\}\right\},\,\max_{i=\overline{1,\,3}}\left\{\max\left\{\frac{\hat{v}\left(\breve{\mathbf{Q}}\right)}{v_i},\,\frac{v_i}{\hat{v}\left(\breve{\mathbf{Q}}\right)}\right\}\right\}\right\}=$$

$$=\arg\min_{\left\{\bar{v},\,\hat{v}\left(\breve{\mathbf{Q}}\right)\right\}}\left\{1+\frac{5\varepsilon}{3v_1},\,\frac{2v_1^2+8v_1\varepsilon+6\varepsilon^2}{v_1\left(2v_1+5\varepsilon\right)}\right\}=\left\{\hat{v}\left(\breve{\mathbf{Q}}\right)\right\}=\left\{v_1+3\varepsilon\cdot\frac{v_1+2\varepsilon}{2v_1+5\varepsilon}\right\}.\qquad(22)$$

Тогда если взять отношение границ в (6) и (21)

$$\left(1+\frac{5\varepsilon}{3v_1}\right)\cdot\left(\frac{2v_1^2+8v_1\varepsilon+6\varepsilon^2}{v_1\left(2v_1+5\varepsilon\right)}\right)^{-1}=\frac{3v_1+5\varepsilon}{3v_1}\cdot\frac{v_1\left(2v_1+5\varepsilon\right)}{2v_1^2+8v_1\varepsilon+6\varepsilon^2}=\frac{3v_1+5\varepsilon}{3}\cdot\frac{2v_1+5\varepsilon}{2v_1^2+8v_1\varepsilon+6\varepsilon^2}=\frac{\left(3v_1+5\varepsilon\right)\left(2v_1+5\varepsilon\right)}{6\left(v_1+\varepsilon\right)\left(v_1+3\varepsilon\right)}\,,\qquad(23)$$

то значение (23) можно рассматривать как коэффициент полезности применения ОСВИ (9) для данной задачи устранения ТЭН по МИД (1). При фиксированном ε и небольшом v_1 этот коэффициент становится заметно больше единицы.

Вывод и возможность продолжения исследования УН

Пример устранения ТЭН по частному МИД (1) наглядно обосновывает предложение использования НООВР на МИД, а не равновероятного распределения. Напомним, что речь идёт о полной неопределённости, и любое вероятностное распределение на МИД считается равновозможным. При этом предлагаемая квазиметрика в (3) и (8), состоящая в выявлении максимальной относительной удалённости двух значений друг от друга, как раз подходит для измерений и эмпирического оценивания параметров деталей, агрегатов, узлов и, вообще говоря, объектов в машиностроении, где практически редко оперируют абсолютными данными, не прибегая к нормировке. Интересно также отметить, что ОСВИ (9) оказалась не вполне смешанной, как это могло ожидаться. В её спектр не вошла третья чистая стратегия s_3, то есть влияние третьего значения v_3 на оценку $\hat{v}=\hat{v}\left(\breve{\mathbf{Q}}\right)$ “проигнорировано”. Впрочем, это может быть объяснено излишней “локализацией” случая с соотношением $\frac{v_3}{v_2}=1+\frac{\varepsilon}{v_1+2\varepsilon}$, откуда проясняется возможность продолжения исследования УН в плане решения задачи устранения ТЭН по МИД

$$\left\{v_i\right\}_{i=1}^{3}=\left\{v_1,\,v_1+a,\,v_1+a+b\right\},\;\;v_1>0\,,\;\;a>0\,,\;\;b>0\,.\qquad(24)$$

При этом, кстати, желательно дополнительное обоснование выбора квазиметрики для сравнения расхождения оценки $\hat{v}$ и элементов множества (24) с МДОО и генерации элементов матрицы $\mathbf{U}=\left[u_{kj}\right]_{3\times3}$ игры (7).

Литература

1. Тененбаум М. М. Сопротивление абразивному изнашиванию / Тененбаум М. М. — М. : Машиностроение, 1976. — 271 с.
2. Мушик Э. Методы принятия технических решений / Мушик Э., Мюллер П. : [пер. с нем.]. — М. : Мир, 1990. — 208 с.
3. Воробьёв Н. Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков / Воробьёв Н. Н. — М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. — 272 с.
4. Черноруцкий И. Г. Методы принятия решений / Черноруцкий И. Г. — СПб. : БХВ-Петербург, 2005. — 416 с. : ил.
5. Трухаев Р. И. Модели принятия решений в условиях неопределённости / Трухаев Р. И. — М. : Наука, 1981. — 258 с.
6. Романюк В. В. Мінімаксний підхід у реалізації стохастичного параметра з невідомим імовірнісним розподілом на інтервалі ненульової міри / В. В. Романюк // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. — 2010. — № 3. — С. 65 — 71.
7. Романюк В. В. Використання мінімаксного принципу у прогнозному контролі корпусного ядерного реактора для оптимізації процедури мінімізації помилки / В. В. Романюк // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. — 2010. — № 5. — С. 161 — 165.
8. Romanuke V. V. Adjusting the neuron transfer function with symmetric kernel matrix game / V. V. Romanuke // V International Conference on Optoelectronic Information Technologies “Photonics — ODS 2010”, September 28 — 30, 2010, Vinnytsya: abstracts. — Vinnytsya : VNTU, 2010. — P. 61.
9. Ашманов С. А. Линейное программирование : [учебное пособие для студ. вузов] / С. А. Ашманов. — М. : Наука, 1981. — 340 с.
10. Банди Б. Основы линейного программирования / Банди Б. ; [пер. с англ.]. — М. : Радио и связь, 1989. — 176 с.

Надійшла 15.5.2012 р.
Рецензент: д.т.н. Рудницький В.Б.

УДК 687. 021

С.В. ПЕТЕГЕРИЧ, І.А. МАНДЗЮК, Г.Б. ПАРАСКА
Хмельницький національний університет
В.П. МІСЯЦЬ, М.П. БЕРЕЗНЕНКО
Київський національний університет технологій та дизайну

ЕНЕРГЕТИЧНІ ПРОЦЕСИ ПРИ ФОРМУВАННІ ПОЛІМЕРНИХ ПОКРИТТІВ ГАЗОДИНАМІЧНИМ ПОТОКОМ

Запропонована математична модель енергетичних процесів при формуванні полімерних покриттів газодинамічним методом. Описано фізичну суть енергетичних процесів та запропоновано напрями для оптимізації процесів формування полімерних покриттів.

The mathematical model of energy processes in the formation of polymer coatings of gas-dynamic method. We describe the physical nature of energy processes and suggests ways to optimize the processes of formation of polymer coatings.

Ключові слова: полімерне покриття, газодинамічний потік.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Викладені основи закономірностей механізму формування поверхневих покриттів, отриманих газодинамічним методом. Суть газодинамічного методу синтезу покриттів полягає в тому, що покриття наносяться в результаті зіткнення високошвидкісних гетерогенних потоків з основою. Зіткнення частинок порошку, які мають високу кінетичну енергію, з основою призводить до їх взаємної зсувної деформації, активізації зв'язаних поверхонь, фізичної взаємодії за рахунок високого напірного тиску і значного підвищення температури в зоні удару. Це забезпечує високий рівень адгезійних і когезійних властивостей покриття. У місцях удару часток реалізуються процеси високошвидкісної пружної і пластичної деформації, адіабатичне перетворення механічної енергії в теплоту, її дисипація, дифузія, а також можливі фазові і структурні зміни [1–3].

Постановка завдання

Однією з найбільш важливих характеристик покриттів є їх адгезія і когезія. Аналіз експериментальних досліджень, а також ряду публікацій [1–3] дозволив встановити, що при формуванні покриттів утворюються хімічні і механічні зв'язки. Математична модель цього процесу може бути з достатньою точністю представлена рівнянням хімічної кінетики у вигляді [1]: