УДК 351.746.1.355.535 (477)

О.М. ШИНКАРУК, І.І. ЧЕСАНОВСЬКИЙ
Хмельницький національний університет
О.В. БОРОВИК
Національна академія Державної прикордонної служби України

ДВОХФАКТОРНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ БЕЗВІДМОВНОСТІ З УРАХУВАННЯМ ПАРАМЕТРІВ ЗАКОНІВ РОЗПОДІЛУ ВІДМОВ ТА КОРЕЛЬОВАНОСТІ ПОКАЗНИКІВ ДОВГОВІЧНОСТІ

У статті представлена двохфакторна математична модель безвідмовності з урахуванням параметрів законів розподілу відмов та корельованості показників довговічності. Оригінальність цієї моделі полягає в тому, що вперше отримано аналітичні вирази для розрахунку ймовірності відмови зразка озброєння і техніки з урахуванням її функціональних залежностей від тривалості та інтенсивності експлуатації. У моделі знайшли відображення детерміновані та стохастичні параметри, які визначають закони розподілу відмов залежно від часу експлуатації і величини напрацювання зразка озброєння і техніки, а також ступінь корельованості цих характеристик.

In the article the twofactor mathematical model of faultlessness is presented with the parameters of laws of distributing of refuses indexes of longevity. Originality of this model consists in that analytical expressions are first got for the calculation of probability of refuse of standard of armament and technique taking into account its functional dependences from duration and intensity of exploitation. The determined and stochastic parameters which determine the laws of distributing of refuses in dependence on time of exploitation and size of work of standard of armament and technique, and also degree of these descriptions, found a reflection in a model.

Ключові слова: двохфакторна математична модель, закон розподілу.

Вступ

Висока інтенсивність використання озброєння і техніки (ОіТ) Державної прикордонної служби та інших військових і правоохоронних формувань сектору безпеки України висуває серйозні вимоги щодо рівня її готовності до використання та безвідмовної роботи. На даний момент зразки ОіТ експлуатуються переважно в змішаному режимі. Різноманітність і стохастичний характер впливу експлуатаційних факторів на технічний стан ОіТ призводить до того, що при одному і тому самому напрацюванні, але різному терміні перебування в експлуатації, окремі зразки ОіТ мають різний фактичний технічний стан. Отже, надійність ОіТ залежить не лише від інтенсивності витрачання зразками ресурсу, а й від терміну їх перебування в експлуатації.

Кожний окремий зразок ОіТ складається з великої кількості систем різного функціонального призначення, що мають різні характеристики надійності. На практиці підтримання ОіТ в працездатному стані є складним завданням у зв’язку із довготривалим перебуванням окремих зразків у змішаному режимі експлуатації. З урахуванням вказаного, одним із альтернативних шляхів підтримання достатнього рівня готовності та безвідмовності ОіТ, забезпечення можливості її інтенсивного використання є підвищення ефективності системи технічного обслуговування і ремонту (ТО і Р) [1-3].

Проведений аналіз науково-методичної бази у даній предметній області свідчить про те, що в існуючих роботах з різних позицій розглянуті роль і місце системи ТО і Р при вирішенні завдань технічного забезпечення військ. Разом із тим у даних роботах питання можливості нарощення ефективності профілактико-відновлювальних заходів для ОіТ, що відпрацювала встановлені технічні ресурси, розглянуті недостатньо повно. При цьому, як правило, призначені профілактичні заходи зводяться до планово-попереджувальної заміни вузлів і агрегатів з низькою довговічністю і базуються на створенні гарантованої кількості запасних частин визначеної номенклатури для усунення ймовірних відмов. Окрім того, існуючий методичний апарат визначення періодичності проведення та обсягів робіт технічного обслуговування (ТО) не враховує вплив напрацювання та термін перебування в експлуатації ОіТ, тому за його допомогою важко визначити раціональну періодичність та обсяги робіт ТО для зразків, що перебувають в експлуатації тривалий період.

Постановка завдання

Виходячи з викладеного вище, існує необхідність розробки та дослідження математичної моделі безвідмовності ОіТ, що адекватна специфіці експлуатації та яка забезпечує врахування більшої кількості експлуатаційних чинників, які призводять до зміни рівня безвідмовності.

Основна частина

Враховуючи, що необхідний рівень надійності ОіТ при експлуатації встановлюється у вигляді фіксованих значень комплексних показників надійності, зокрема таких, як коефіцієнт технічного використання і коефіцієнт готовності, допустиме значення ймовірності відмови (ймовірності безвідмовної роботи) буде мати також фіксоване значення і протягом усього періоду експлуатації буде представляти собою певну межу працездатності [4]. Геометрична інтерпретація такої моделі показана на рис. 1. Величина ймовірності виходу параметра надійності об’єкту за межі поля допуску пропорційна заштрихованій площі розподілу $j\ (Y,t)$ [5].

Визначення показників надійності через щільність розподілу $j\left(Y,t\right)$ випадкової функції *Y (t)* і характеристики поля допуску проводиться при наступних допущеннях:

1) закон розподілу $j\left(Y,t\right)$ в часі не змінюється;

2) реалізація *Y (t)* і моментні функції $x_Y(t)$, що є апроксимаціями параметрів щільності розподілу $j\left(Y,t\right)$ в часі змінюються монотонно;

3) у початковий момент часу t_0 значення параметрів знаходиться у межах поля допуску.

Для зв'язку характеристик випадкового процесу *Y (t)* з характеристиками надійності використані наступні залежності. Щільність ймовірності того, що за час *dt,* що включає момент *t,* значення параметру надійності вийде за межі поля допуску, складає [5]:

$$f\left(t\right)=\left|\frac{dq(Y,t)}{dt}\right|. \qquad (1)$$

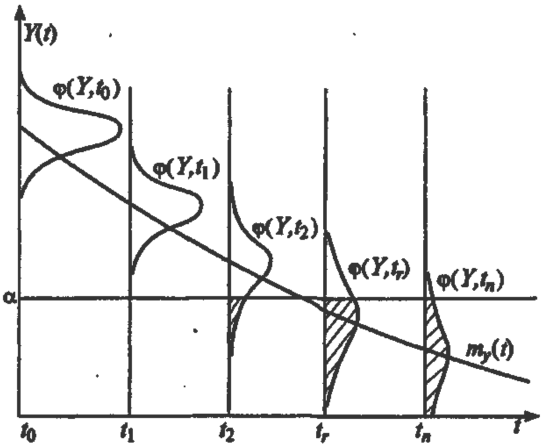

Рис. 1. Схема формування поступової відмови при односторонній межі поля допуску

При нормальному законі розподілу і законі Релея при односторонньому допуску формули для *f (t)* мають вигляд:

$$f\left(t\right)=\frac{1}{\sqrt{2p}}exp\left\{-\frac{a-m_Y(t)}{2s_Y^2(t)}\right\}\left|\frac{d}{dt}\left[\frac{a-m_Y(t)}{s_Y(t)}\right]\right|, \qquad (2)$$

$$f\left(t\right)=\frac{a^2}{s_Y^3}exp\left\{-\frac{a^2}{2s_Y^2(t)}\right\}\left|\frac{ds_Y(t)}{dt}\right|. \qquad (3)$$

де $m_Y(t)$ і $s_Y(t)$ – відповідно, функції математичного очікування і середнього квадратичного відхилення функціонального параметра *Y (t).*

Для безпосереднього визначення параметрів надійності по формулах (2) – (3) необхідно знати параметри апроксимуючих кривих $m_Y(t)$ і $s_Y(t)$. В якості моментних функцій $x_Y(t)$ функціонального параметру *Y (t)* використанні апроксимації, що притаманні зразкам ОіТ згідно статистичних даних:

$$\left.\begin{aligned}x_Y\left(t\right)&=a+bt\\x_Y\left(t\right)&=at^b\\x_Y\left(t\right)&=at^b+c\\x_Y\left(t\right)&=ae^{bt}\\x_Y\left(t\right)&=ae^{bt}+c\end{aligned}\right\}. \qquad (4)$$

Підставляючи вирази для моментних функцій у формули (2) і (3) і проводячи математичні перетворення отримано співвідношення для ймовірності відмови при фіксованому допуску значення ймовірності відмови.

При $m_Y\left(t\right)=a_m t^{b_m}$ і $s_Y\left(t\right)=a_s t^{b_s}$ вираз для розрахунку ймовірності відмови прийме вигляд:

- при нормальному розподілі $j\left(Y,t\right)$

$$q\left(Y,t\right)=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{a-a_m t^{b_m}}{a_s t^{b_s}}\right)-\lim_{t_0\to 0}\Phi\left(\frac{a-a_m t_0^{b_m}}{a_s t_0^{b_s}}\right)\right]; \qquad (5)$$

- при розподілі Релея $j\left(Y,t\right)$

$$q\left(Y,t\right)=exp\left\{-\frac{a^2}{2\left(a_s t^{b_s}\right)^2}\right\}-\lim_{t_0\to 0}exp\left\{-\frac{a^2}{2\left(a_s t_0^{b_s}\right)^2}\right\}. \qquad (6)$$

При $m_Y\left(t\right)=a_m e^{b_m t}$ і $s_Y\left(t\right)=a_s e^{b_s t}$ вираз для розрахунку ймовірності відмови прийме вигляд:

- при нормальному розподілі $j\left(Y,t\right)$

$$q\left(Y,t\right)=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{a-a_m e^{b_m t}}{a_s e^{b_s t}}\right)-\Phi\left(\frac{a-a_m}{a_s}\right)\right];\tag{7}$$

- при розподілі Релея $j\left(Y,t\right)$

$$q\left(Y,t\right)=exp\left\{-\frac{a^2}{2\left(a_s t^{b_s}\right)^2}\right\}-exp\left\{-\frac{a^2}{2a_s^2}\right\}.\tag{8}$$

При $m_Y\left(t\right)=a_m e^{b_m}+c_m$ і $s_Y\left(t\right)=a_s e^{b_s}+c_s$ вираз для розрахунку ймовірності відмови прийме вигляд:

- при нормальному розподілі $j\left(Y,t\right)$

$$q\left(Y,t\right)=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{a-a_m t^{b_m}-c_m}{a_s t^{b_s}+c_s}\right)-\lim_{t_0\to 0}\Phi\left(\frac{a-a_m t_0^{b_m}-c_m}{a_s t_0^{b_s}+c_s}\right)\right];\tag{9}$$

- при розподілі Релея $j\left(Y,t\right)$

$$q\left(Y,t\right)=exp\left\{-\frac{a^2}{2\left(a_s t^{b_s}+c_s\right)^2}\right\}-\lim_{t_0\to 0}exp\left\{-\frac{a^2}{2\left(a_s t_0^{b_s}+c_s\right)^2}\right\}.\tag{10}$$

При $m_Y\left(t\right)=a_m e^{b_m t}+c_m$ і $s_Y\left(t\right)=a_s e^{b_s t}+c_s$ вираз для розрахунку ймовірності відмови прийме вигляд:

- при нормальному розподілі $j\left(Y,t\right)$

$$q\left(Y,t\right)=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{a-a_m e^{b_m t}-c_m}{a_s e^{b_s t}+c_s}\right)-\Phi\left(\frac{a-a_{m-}c_m}{a_s+c_s}\right)\right];\tag{11}$$

- при розподілі Релея $j\left(Y,t\right)$

$$q\left(Y,t\right)=exp\left\{-\frac{a^2}{2\left(a_s e^{b_s t}+c_s\right)^2}\right\}-exp\left\{-\frac{a^2}{2\left(a_s+c_s\right)^2}\right\}.\tag{12}$$

При $m_Y\left(t\right)=a_m+b_m t$ і $s_Y\left(t\right)=a_s+b_s t$ вираз для розрахунку ймовірності відмови прийме вигляд:

- при нормальному розподілі $j\left(Y,t\right)$

$$q\left(Y,t\right)=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{a-a_m-b_m t}{a_s+b_s t}\right)-\Phi\left(\frac{a-a_m}{a_s}\right)\right];\tag{13}$$

- при розподілі Релея $j\left(Y,t\right)$

$$q\left(Y,t\right)=exp\left\{-\frac{a^2}{2\left(a_s+b_s t\right)^2}\right\}-exp\left\{-\frac{a^2}{2a_s^2}\right\}.\tag{14}$$

При $m_Y\left(t\right)=a_m e^{b_m t}$ і $s_Y\left(t\right)=a_s t^{b_s}+c_s$ вираз для розрахунку ймовірності відмови прийме вигляд:

- при нормальному розподілі $j\left(Y,t\right)$

$$q\left(Y,t\right)=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{a-a_m e^{b_m t}}{a_s t^{b_s}+c_s}\right)-\lim_{t_0\to 0}\Phi\left(\frac{a-a_m e^{b_m t_0}}{a_s t_0^{b_s}+c_s}\right)\right];\tag{15}$$

- при розподілі Релея $j\left(Y,t\right)$

$$q\left(Y,t\right)=exp\left\{-\frac{a^2}{2\left(a_s t^{b_s}+c_s\right)^2}\right\}-\lim_{t_0\to 0}exp\left\{-\frac{a^2}{2\left(a_s t_0^{b_s}+c_s\right)^2}\right\}.\tag{16}$$

Аналіз залежностей вигляду (2), (16) показує, що значення характеристик надійності виробу істотно залежить не тільки від значень параметрів a_m, b_m, c_m і a_σ, b_σ, c_σ але і від їх знаку. Оскільки в даному методі був зроблений перехід від багатовимірної щільності розподілу до одновимірної $j\left(Y,t\right)$, що не враховує залежності між значеннями випадкової функції в різні моменти часу t, то деякі з властивостей функції розподілу при певних видах функцій (4) і величинах параметрів виконуються не завжди. Так, не завжди виконується властивість:

$$q\left(t\to\infty\right)=1. \tag{17}$$

Для нормального закону розподілу:

$$q\left(t\right)=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{a-m_Y(t)}{2Y(t)}\right)-\lim_{t_0\to 0}\Phi\left(\frac{a-m_Y(t_0)}{s_Y(t_0)}\right)\right]; \tag{18}$$

для закону Релея

$$q\left(t\right)=exp\left\{-\frac{a^2}{2s_Y^2(t)}\right\}-\lim_{t_0\to 0}exp\left\{-\frac{a^2}{2s_Y^2(t_0)}\right\}. \tag{19}$$

Дослідження цих формул показує, що для виконання умови (17) необхідно, щоб при даних видах апроксимації (4):

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[\frac{a-m_Y(t)}{s_Y(t)}\right]\geq 0\\&\frac{ds_Y(t)}{dt}\geq 0\end{aligned}\right\}.$$

Отже, необхідно додатково досліджувати параметри, що входять у вирази (2) – (3).

Таким чином, щільність розподілу *f (t)* може бути отримана, якщо будуть відомі моментні функції випадкового процесу:

$$m_Y\left(t\right)=x_m(t)\ \text{ і }\ s_Y\left(t\right)=x_s\left(t\right).$$

Це дозволяє за наслідками експлуатації або випробувань, при яких набувають значень $m_Y\left(t\right)$ і $s_Y\left(t\right)$ визначити характеристики надійності як функції часу по приведених виразах.

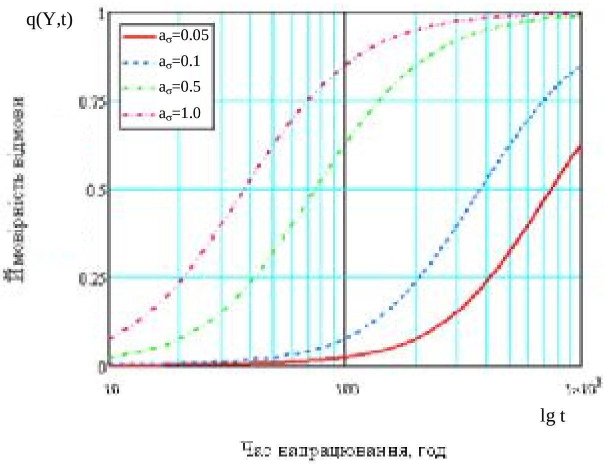

Рис. 2. Залежність ймовірності відмови від параметру a_s **,**
при $K_П=1{,}13$, $a_m=1.5$, $b_s=0{,}005$

Аналіз виразів (2) – (16) свідчить, що вид закону розподілу *f (t)* і його параметри залежать від параметрів розподілу $j\left(Y,t\right)$. Дійсно:

при $s_Y\left(t\right)=s_0=const$ і m_y *(t),* що змінюється по лінійному закону $m_Y\left(t\right)=m_Y\left(t\right)+\Delta mt$, розподіл *f (t)* має такий же вигляд, як і розподіл $j\left(Y,t\right)$, якщо останній для всіх моментів часу однаковий;

при $s_Y\left(t\right)=const$ і m_y *(t),* що змінюється по нелінійному закону, розподіл *f (t)* виявляється істотно відмінним від розподілу;

надійність ОіТ істотно залежить від закону розподілу $j\left(Y_0,t_0\right)$ в початковий момент часу. При більш усічених законах розподілу надійність об’єктів нижча.

Щільність розподілу $j\left(Y_0,t_0\right)$, $j\left(Y,t\right)$ і параметри моментних функцій випадкового процесу $m_Y\left(t\right)$ і $s_Y\left(t\right)$ можна визначити за наслідками експлуатації або випробувань. Слід також відзначити, що на значення характеристик надійності істотно впливає значення коефіцієнта запасу по параметру $K_П=m_Y\left(t=0\right)/a$.

Результати дослідження статистичних даних експлуатації ОіТ показали, що для більшості підсистем при нормальному законі розподілу і розподілі Релея напрацювання до відмови за витратою ресурсу, як математичне очікування, так і середнє квадратичне відхилення залежно від часу перебування зразка в експлуатації змінюються за показниковими законами, а отже, справедливими є вирази (11), (12).

Розглянемо вплив на величину характеристик надійності значень і вигляду параметрів моментних функцій, а також значень коефіцієнта запасу по параметру $K_П=m_Y\left(t=0\right)/a$. З цією метою на рис. 2 і 3 приведені залежності *q (Y, t)* в діапазоні зміни *t* = 10...1000 одиниць часу закону Релея при різних значеннях відповідно a_s і b_s . Можна відзначити, що в дослідженому діапазоні, із збільшенням a_s його вплив на ймовірність відмови зростає. Особливо сильно позначається вплив коефіцієнта b_s . Так, наприклад, при t = 100 збільшення b_s від 0,001 до 0,005 приводить до зростання *q (Y, t)* на 0,2, а збільшення b_s від 0,001 до 0,01 – до зростання *q (Y, t)* на 0,55. Зміна коефіцієнта запасу в межах 1,0...1,3 для того ж самого випадку не приводить до істотної зміни ймовірності відмови.

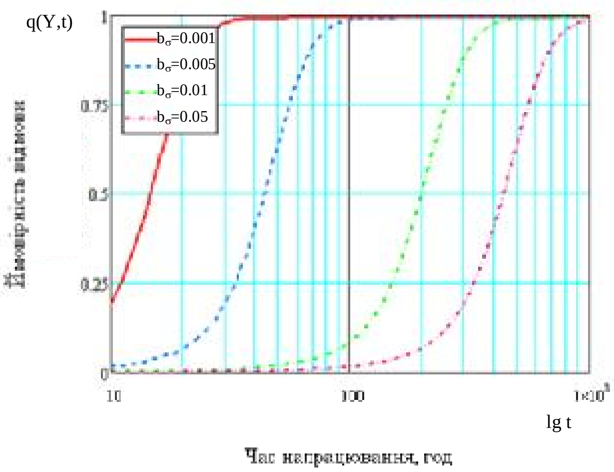

Рис. 3. Залежність ймовірності відмови від параметру b_s , при

$$K_П = 1{,}13,\ a_m = 1.5,\ a_s = 0{,}005$$

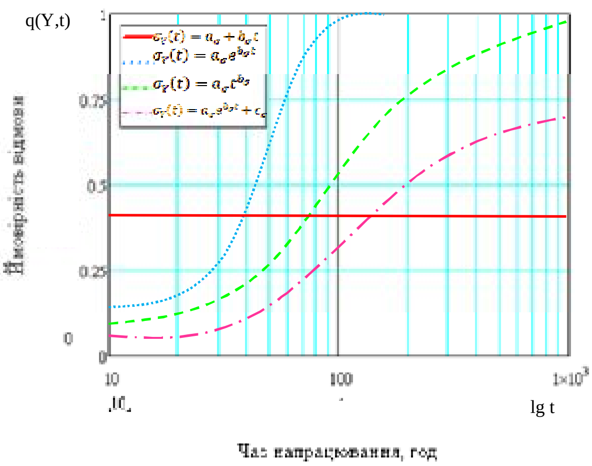

Рис. 4. Залежність ймовірності відмови від виду апроксимації моментних функцій при

$$K_П = 1{,}13,\ a_m = 1.5,\ a_s = 1,\ b_s = 0{,}01$$

$$c_s = 0{,}4$$

Найпомітніше впливає на надійність елементів вид апроксимації моментних функцій (рис. 4).

Для нормального закону розподілу зміна $K_П$ сильніше позначається при малих значеннях часу; при t = 20 збільшення $K_П$ від 1,5 до 3 призводить до зменшення *q (Y, t)* на 0,13, при t = 100 – на 0,08.

Висновки

Таким чином, знаючи за наслідками експлуатації або випробувань параметри моментних функцій і використовуючи розглянуту модель, можна порівняно нескладно визначити характеристики надійності досліджуваних об’єктів.

Напрямками подальших досліджень є перевірка запропонованої математичної моделі на практиці, подальше вивчення законів розподілу, якими характеризуються відмови досліджуваної техніки, а також моментних функцій, що є апроксимаціями параметрів щільності розподілу.

Література

1. ДСТУ 2860-94. Надійність техніки. Терміни та визначення. Введено вперше ; Введ. 28.12.94. – К. : Держстандарт України, 1994. – 40 с.

2. Барзилович Е. Ю. Эксплуатация авиационных систем по состоянию / Е. Ю. Барзилович, В. Ф. Воскобоев. – М. : Транспорт, 1981. – 196 с.

3. Модели технического обслуживания систем с избыточностью / Б. П. Креденцер, С. В. Ленков, М. И. Резников, В. В. Зубарев ; под ред. Б. П. Креденцера. – К. : Фенікс, 2002. – 192 с.

4. Смирнов Н. Н. Обслуживание и ремонт авиационной техники по техническому состоянию / Н. Н. Смирнов, А. А. Ицкович. – М. : Транспорт, 1980. – 232 с.

5. Острейковский В. А. Теория надежности : [учебник для вузов] / В. А. Острейковский. – М. : Высш. шк., 2003. – 463 с.

Надійшла 14.8.2011 р.