УДК 517.93

ПАРАМЕТРИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ТИПУ ЛОТКИ — ВОЛЬТЕРРИ У СЕРЕДОВИЩІ MAXIMA ДЛЯ ПРОГНОЗУВАННЯ РОЗВИТКУ ВЗАЄМОДІЇ ЕКОСИСТЕМ

Романюк В. В., к. т. н., доц.
Хмельницький національний університет
, вул. Інститутська, 11, м. Хмельницький, Україна
E-mail: romanukevadimv@mail.ru

Запропоноване до використання середовище Maxima з графічним інтерфейсом wxMaxima для якісного дослідження динамічних систем другого порядку типу Лотки — Вольтерри, що описують взаємодію популяцій двох біологічних видів. Показаний спосіб побудови фазового портрета досліджуваної системи з шістьома параметрами, значення яких можна регулювати безпосередньо на графічній формі Plotdf.

Ключові слова: динамічна система, система Лотки — Вольтерри.

Вступ. Логістичні динамічні моделі є хорошим представленням розвитку боротьби за існування, росту біологічних популяцій, взаємовідносин у системах “хижак — жертва” [1, 2]. Моделі Лотки — Вольтерри

$$\frac{dx_k}{dt} = x_k\left(\alpha_k - \sum_{j=1}^{N} a_{kj}x_j\right) \quad \forall\, k = \overline{1,\, N} \qquad (1)$$

є частинним випадком більш загальної системи диференціальних рівнянь логістичного типу

$$\frac{dx_k}{dt} = x_k f_k\left(x_1,\, x_2,\, \mathbf{K},\, x_N\right) \quad \forall\, k = \overline{1,\, N} \qquad (2)$$

з диференційовними функціями

$$\left\{ f_k\left(x_1,\, x_2,\, \mathbf{K},\, x_N\right)\right\}_{k=1}^{N},$$

де x_k є чисельністю популяції k-го виду, $\{\alpha_k\}_{k=1}^{N}$ й $\left\{\{a_{kj}\}_{j=1}^{N}\right\}_{k=1}^{N}$ є дійсними числами, причому $x_k \geqslant 0$ $\forall\, k = \overline{1,\, N}$ [3, 4]. Якісний аналіз таких систем буває непростим уже при $N = 2$, особливо тоді, коли деякі з параметрів $\{\alpha_1,\, \alpha_2\}$ й $\{a_{11},\, a_{12},\, a_{21},\, a_{22}\}$ визначені інтервально або їх точкові оцінки є “нечіткими”, “розмитими”. Тому пошук і вибір математико-програмованого середовища для швидкого параметричного дослідження динамічних систем є актуальною задачею, оскільки це дозволятиме прогнозувати розвиток взаємодії біологічних видів й, отже, екологічну ситуацію неантропогенного характеру у досліджуваній області з високою надійністю. Почнемо з обґрунтування вибору такого середовища для якісного аналізу динамічних систем типу Лотки — Вольтерри другого порядку [5, 6].

Аналіз попередніх досліджень. Екологічна система (екосистема) — це сукупність популяцій різноманітних видів рослин, тварин і мікробів, взаємодіючих між собою та навколишнім середовищем таким чином, що ця сукупність зберігається невизначено довгий час. Прикладами екологічних систем є луг, ліс, озеро, океан. Одним із фундаментальних правил, котрому підпорядковуються усі екосистеми, є принцип Ле Шательє — Брауна [7]: при зовнішньому впливі, що виводить систему із стану стійкої рівноваги, ця рівновага зміщується у напрямку, при якому ефект зовнішнього впливу послаблюється. Пристосування, вироблювані жертвами для протидії хижакам в екосистемах “хижак — жертва”, сприяють виробленню в хижаків механізмів подолання цих пристосувань. Тривале спільне існування хижаків і жертв приводить до формування системи взаємодії, при якій обидві групи стійко зберігаються на досліджуваній території. Порушення такої системи часто приводить до негативних екологічних наслідків. Запобігаючи цьому, для якісного аналізу моделей Лотки — Вольтерри можна використовувати такі програмно-математичні середовища як MATLAB, Maple, MathCAD, але вони не дозволяють контролювати зміни фазових портретів зі зміною параметрів $\{\alpha_1,\, \alpha_2\}$ й $\{a_{11},\, a_{12},\, a_{21},\, a_{22}\}$ [8].

Мета роботи. У зв’язку з вищезазначеним необхідно запропонувати до використання й описати метод автоматизованої побудови фазового портрета динамічної системи другого порядку типу Лотки — Вольтерри, де передбачити можливість швидкої перебудови портрета зі зміною параметрів системи.

Матеріал і результати дослідження. Позначимо через x та y кількість осіб популяції першого та другого біологічних видів відповідно, котрі знаходять у певній взаємодії у межах визначеного ареалу. Тоді найпростіша динамічна система другого порядку типу Лотки — Вольтерри матиме вид

$$\frac{dx}{dt} = x\left(a - by\right), \qquad (3)$$

$$\frac{dy}{dt} = y\left(c - dx\right), \qquad (4)$$

де a і c є коефіцієнтами народжуваності першого та другого видів відповідно, коефіцієнти b і d відбивають взаємодію між видами. Але в такій системі, котра при додатних a, b, c, d є моделлю міжвидової конкуренції, а при $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$ (коефіцієнт смертності) і $d < 0$ (коефіцієнт народжуваності другого виду за рахунок представників першого) є моделлю “хижак — жертва”, не враховується обмеженість ареалу, а також те, що загальні (сукупні) харчові ресурси не є необмеженими. Тому поряд із системою (3), (4) досліджують більш загальну систему

$$\frac{dx}{dt} = x\left(a - by - gx\right), \qquad (5)$$

$$\frac{dy}{dt} = y\left(c - dx - hy\right), \qquad (6)$$

де додатні коефіцієнти g та h якраз і відображають обмеженість ресурсів.

Параметрична побудова фазового портрета у Maxima. Запустимо Maxima й у командному рядку графічного інтерфейсу wxMaxima завантажимо засіб “plotdf”, після чого у наступному рядку запишемо систему (3), (4) параметрично (рис. 1). Запуск для виконання обчислень відбувається після натискання “Ctrl+Enter”.

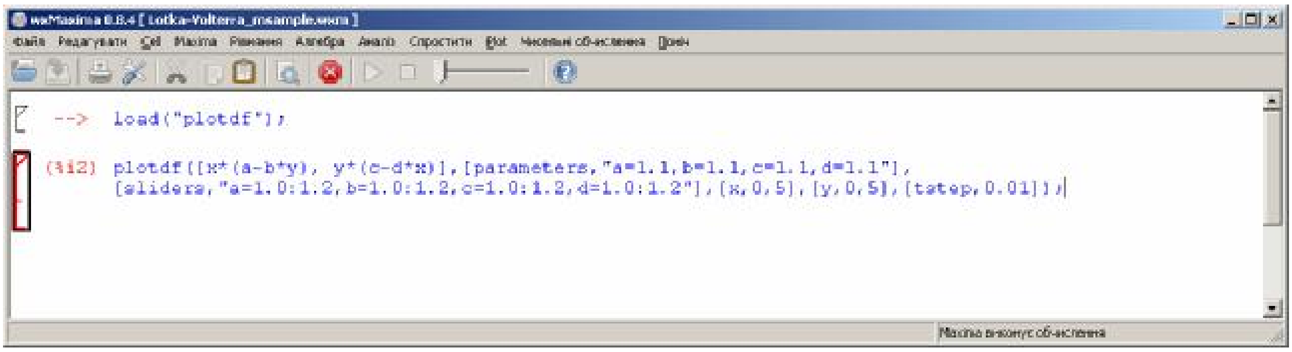

Рисунок 1 – Завантаження “plotdf” та запуск побудови фазового портрета системи (3), (4) у першому квадранті з параметрами $a=1.1$, $b=1.1$, $c=1.1$, $d=1.1$ з можливістю їх регулювання у межах сегмента $[1;1.2]$

На рис. 2-7 представлені графічні форми Plotdf з побудованими фазовими портретами та повзунками для регулювання чотирьох параметрів системи (3), (4) у межах сегмента $[1;1.2]$ з автоматичним перебудовуванням портретів. Стрілки вказують напрямок руху, а суцільні лінії відповідають фазовим траєкторіям, котрі проходять через фіксовані точки. Ці точки можна вибирати натискуванням на графічну частину форми, після чого будується відповідна фазова траєкторія.

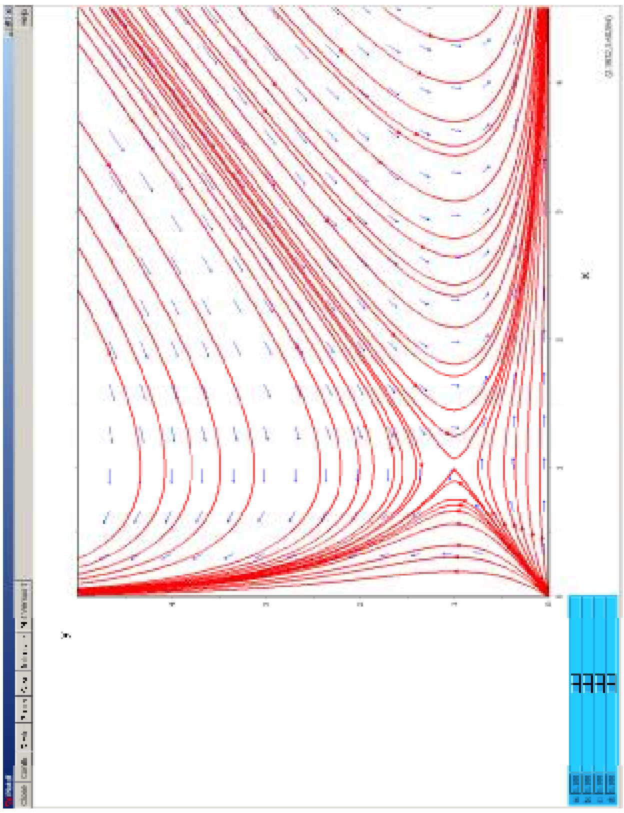

Рисунок 2 — Фазовий портрет системи (3), (4) у першому квадранті з параметрами $a=1.1$, $b=1.1$, $c=1.1$, $d=1.1$ з можливістю їх регулювання у межах сегмента $[1;1.2]$ (з побудованого фазового портрета видно, що міжвидова конкуренція у нескінченності завершується витісненням одного виду іншим)

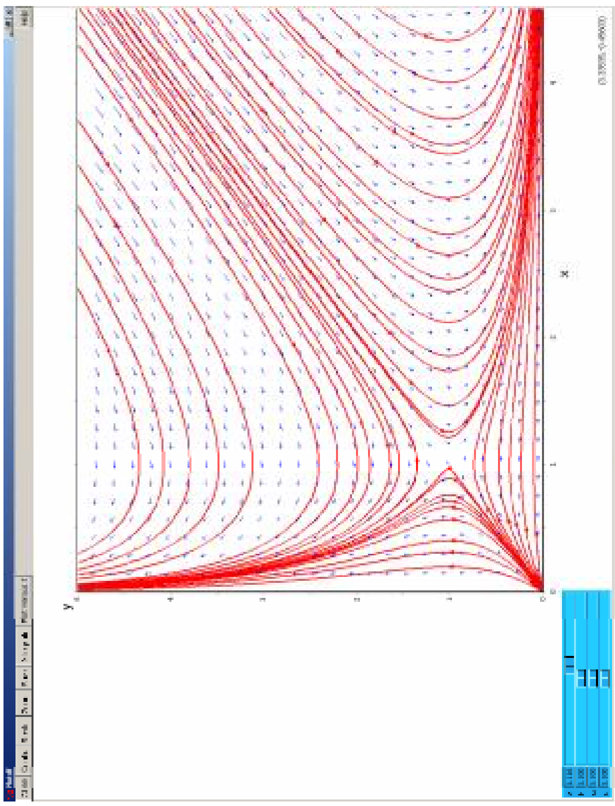

Рисунок 3 — Фазовий портрет системи (3), (4) у першому квадранті з параметрами $a=1.116$, $b=1.1$, $c=1.1$, $d=1.1$ з можливістю їх регулювання у межах сегмента $[1;1.2]$

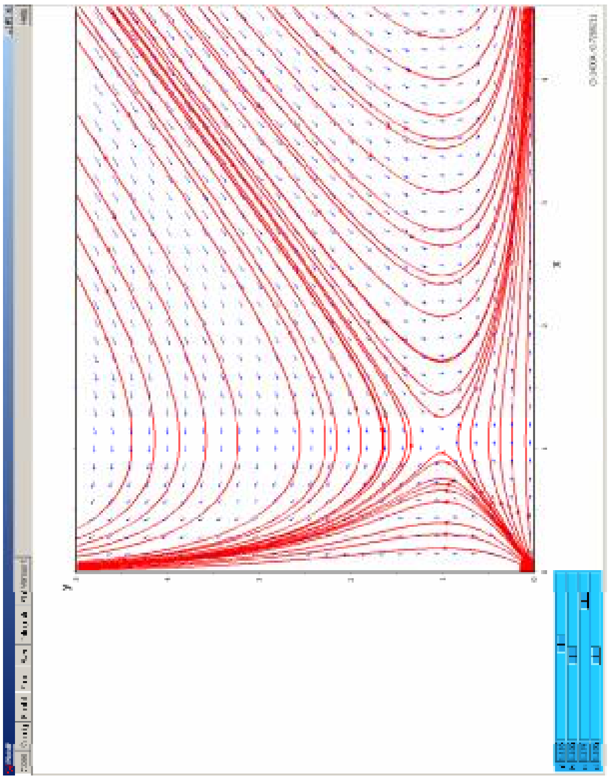

Рисунок 4 — Фазовий портрет системи (3), (4) у першому квадранті з $a = 1.116$, $b = 1.1 = d$, $c = 1.174$ з можливістю їх регулювання у межах сегмента $[1; 1.2]$

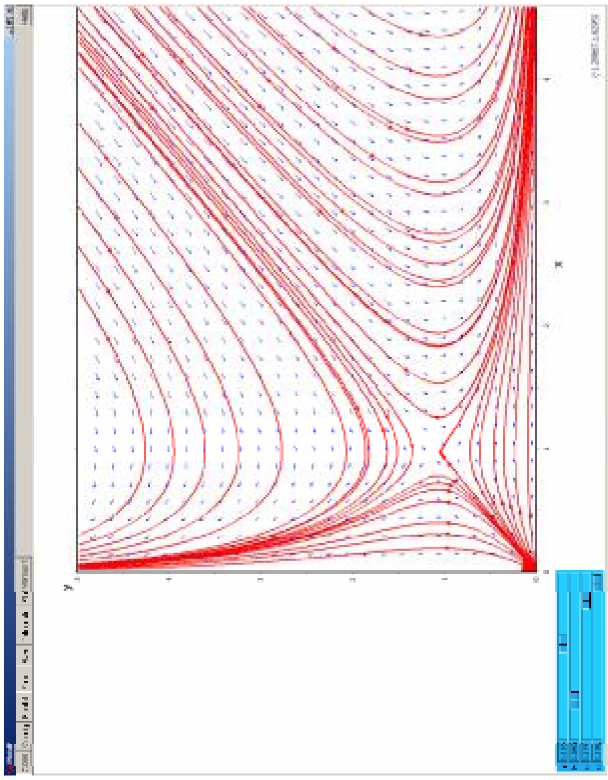

Рисунок 5 — Фазовий портрет системи (3), (4) у першому квадранті з $a = 1.116$, $b = 1.04$, $c = 1.174$, $d = 1.198$ з можливістю їх регулювання у межах сегмента $[1; 1.2]$

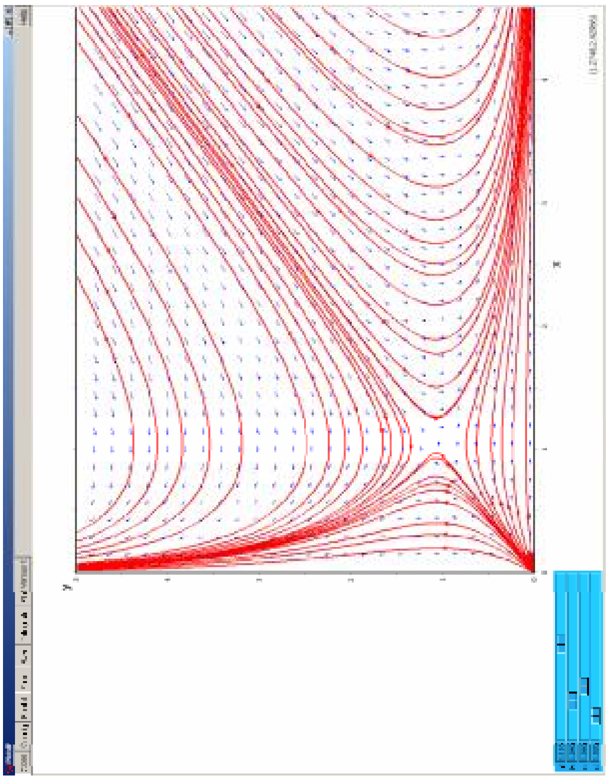

Рисунок 6 — Фазовий портрет системи (3), (4) у першому квадранті з $a = 1.116$, $b = 1.04$, $c = 1.06$, $d = 1.02$ з можливістю їх регулювання у межах сегмента $[1; 1.2]$

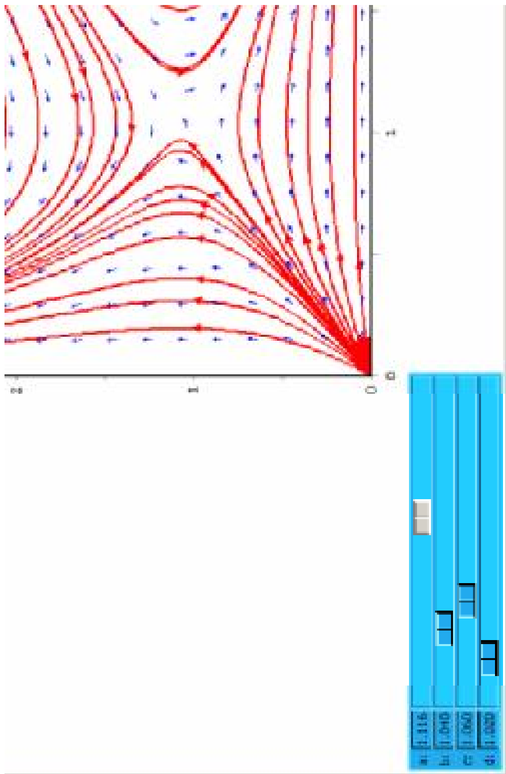

Рисунок 7 — Регулювання параметра a системи (3), (4) у першому квадранті у межах сегмента $[1; 1.2]$ на відповідному повзунку

Тепер у наступному рядку графічного інтерфейсу wxMaxima запишемо систему (5), (6) з шістьома параметрами (рис. 8). На рис. 9 — 13 представлені графічні форми Plotdf з побудованими фазовими портретами та повзунками для регулювання шістьох параметрів системи (5), (6) у межах відповідних сегментів $[1; 1.2]$ та $[0.1; 0.3]$ з автоматичним перебудовуванням портретів.

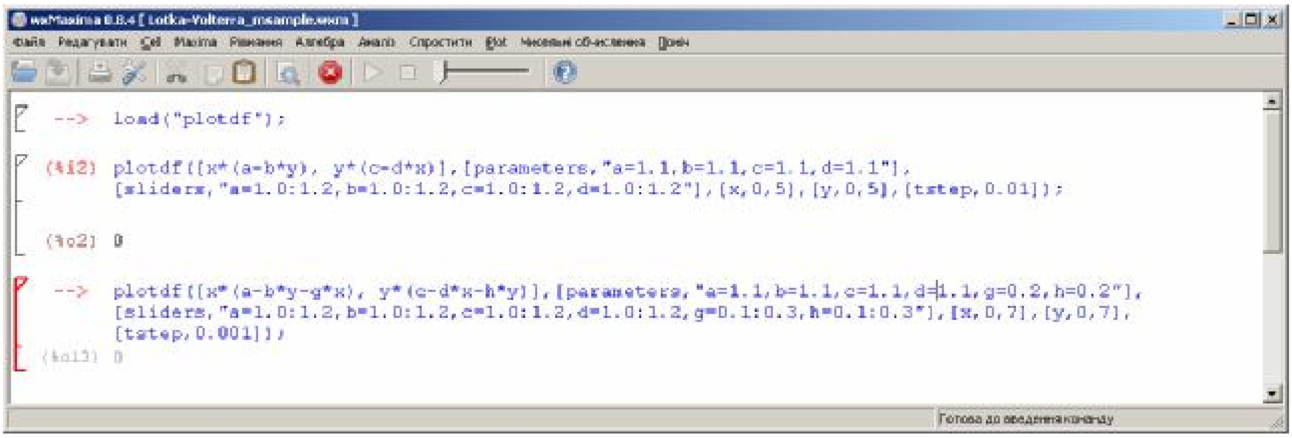

Рисунок 8 — Запис системи (5), (6) у першому квадранті з параметрами $a=1.1$, $b=1.1$, $c=1.1$, $d=1.1$ з можливістю їх регулювання у межах сегмента $[1; 1.2]$ та параметрами $g=0.2$, $h=0.2$ з можливістю їх регулювання у межах сегмента $[0.1; 0.3]$

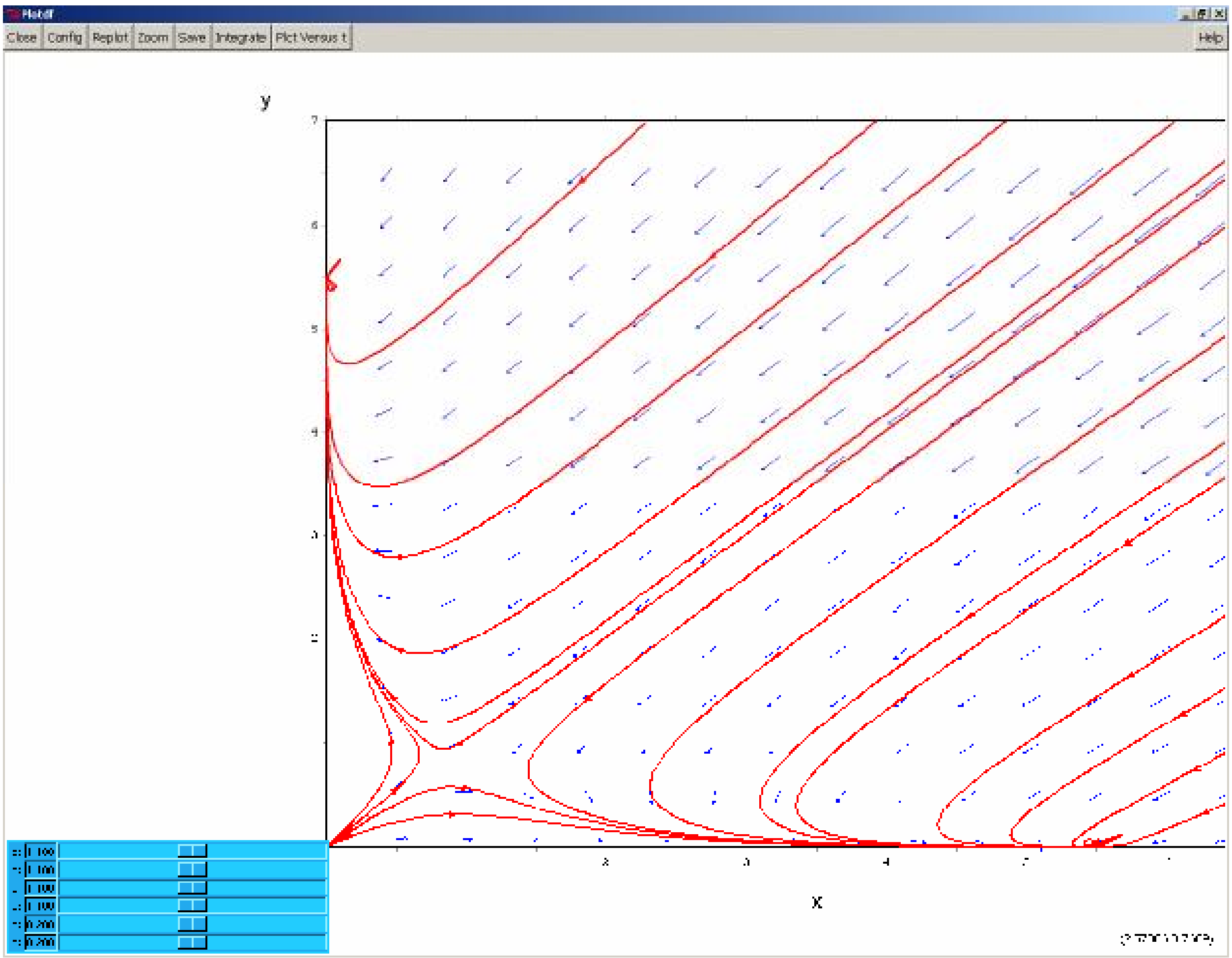

Рисунок 9 — Фазовий портрет системи (5), (6) у першому квадранті з параметрами $a=1.1$, $b=1.1$, $c=1.1$, $d=1.1$, $g=0.2$, $h=0.2$ з можливістю їх регулювання у межах відповідних сегментів $[1; 1.2]$ та $[0.1; 0.3]$

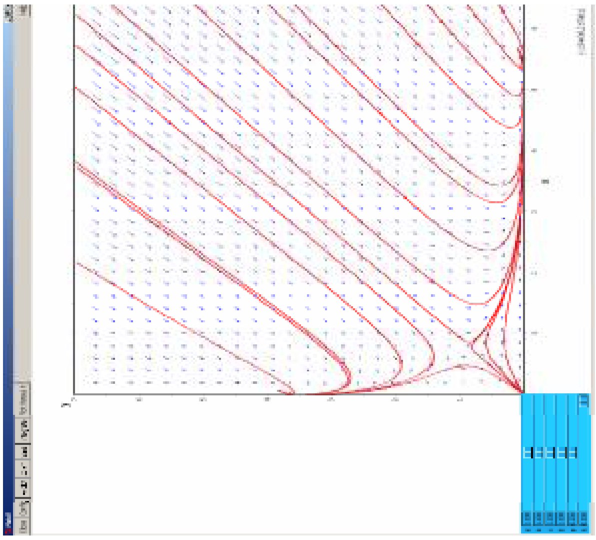

Рисунок 10 — Фазовий портрет системи (5), (6) у першому квадранті з параметрами $a=1.1$, $b=1.1$, $c=1.1$, $d=1.1$, $g=0.2$, $h=0.3$ з можливістю їх регулювання

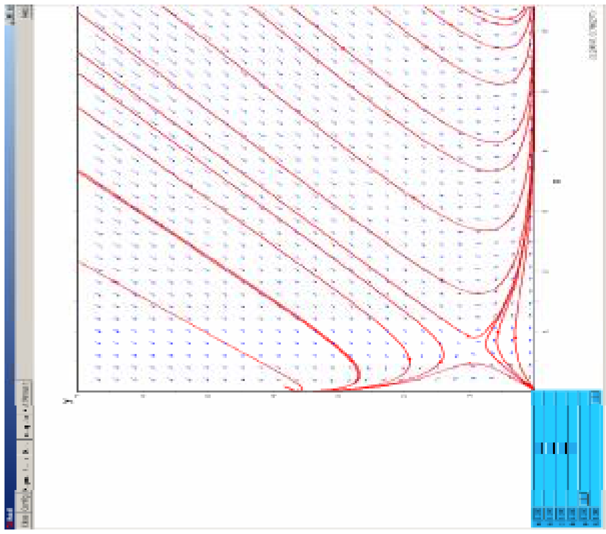

Рисунок 11 — Фазовий портрет системи (5), (6) у першому квадранті з параметрами $a=1.1$, $b=1.1$, $c=1.1$, $d=1.1$, $g=0.1$, $h=0.3$ з можливістю їх регулювання

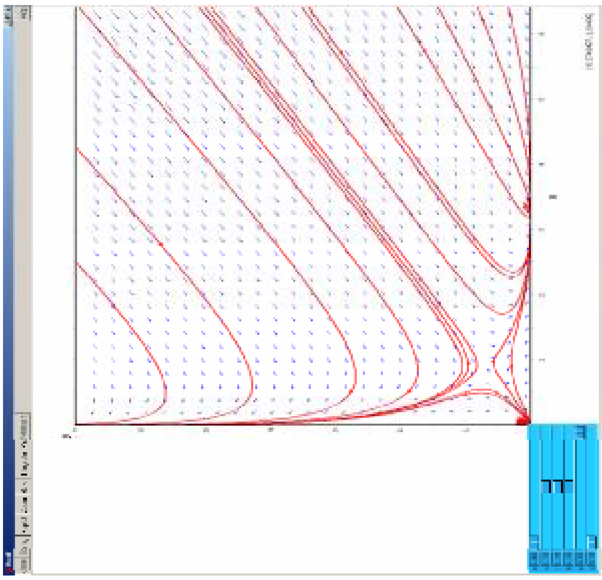

Рисунок 12 — Фазовий портрет системи (5), (6) у першому квадранті з параметрами $a=1$, $b=1.1$, $c=1.1$, $d=1.1$, $g=0.3$, $h=0.1$ з можливістю їх регулювання

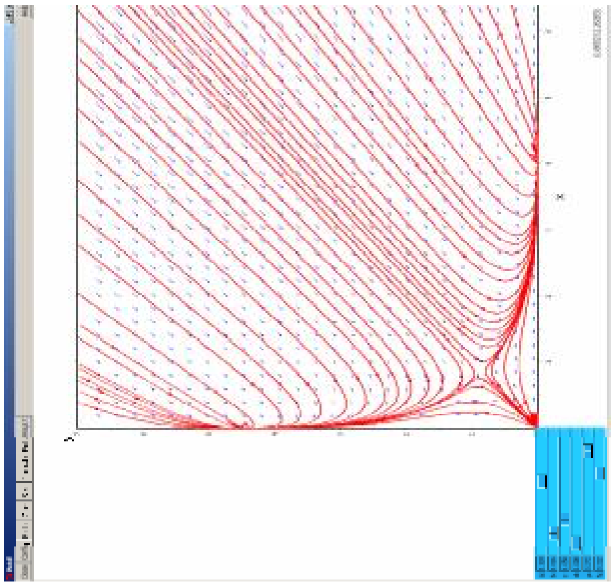

Рисунок 13 — Фазовий портрет системи (5), (6) у першому квадранті з параметрами $a=1.118$, $b=1.026$, $c=1.05$, $d=1.008$, $g=0.272$, $h=0.232$ з можливістю їх регулювання

Розглянуті приклади побудови фазового портрету динамічних систем другого порядку типу Лотки — Вольтерри з параметрами (рис. 1 і рис. 8), де були розглянуті моделі двовидової конкуренції, можуть бути застосовані як шаблони для параметричного дослідження довільних моделей співіснування двох об'єктів (або явищ). Для цього у рядку зі записом "plotdf(...);" достатньо змінити початкові значення параметрів

$$\{\alpha_1, \alpha_2\}=\{a, c\}$$

й

$$\{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}\}=\{g, b, d, h\}$$

на необхідні, записати інтервали їх зміни, а також вказати область першого квадранта, у якій будуватиметься фазовий портрет.

Висновки. Для якісного дослідження динамічних систем другого порядку типу Лотки — Вольтерри, заданих параметрично у формі (3), (4) або (5), (6), можна використовувати запропоноване середовище Maxima з графічним інтерфейсом wxMaxima, де існує можливість окремої побудови функцій часу $x(t)$ та $y(t)$. Подальше дослідження слід спрямувати на пошук і вибір математико-програмованого середовища для швидкого параметричного дослідження динамічних систем третього порядку, фазові портрети котрих ще можна побачити в $\mathbb{R}^3$ (переважно у першому октанті). Параметричне дослідження динамічних систем вищих порядків, де порядок $N \geq 4$, можливе лише при фіксації частини фазових координат і відповідній побудові "зрізу" фазового портрета в $\mathbb{R}^3$ чи, в окремих випадках, в $\mathbb{R}^2$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Баутин Н. Н. Методы и приёмы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1990. — 488 с.
2. Якубович В. А. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения / В. А. Якубович, В. М. Старжинский. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1972. — 720 с.
3. Неймарк Ю. И. Динамические системы и управляемые процессы / Неймарк Ю. И. — М.: Наука, 1978. — 336 с.
4. Немыцкий В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений / В. В. Немыцкий, В. В. Степанов. — М.: УРСС, 2004. — 552 с.
5. Самарский А. А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. — [2-е изд., испр.]. — М.: Физматлит, 2001. — 320 с.
6. Simon A. V. A model of employment social interrelation and asserting the necessity for the investigation of the Lotka — Volterra system of the second order with varying coefficients / A. V. Simon, V. V. Romanuke // Applied mathematics tasks in mechanics, economy, ecology: Materials VI of International student scientific conference, Sevastopol, April, 14 — 18, 2008. — Sevastopol : Publishing house SevNTU, 2008. — P. 76 — 79.
7. Николайкин Н. И. Экология / Николайкин Н. И., Николайкина Н. Е., Мелехова О. П. — [5-е изд.]. — М.: Дрофа, 2006. — 640 с.
8. Штовба С. Д. Проектирование нечетких систем средствами MATLAB / Штовба С. Д. — М.: Горячая линия — Телеком, 2007. — 288 с.

RESOURCES

1. Bautin N. N. Methods and techniques of qualitative investigation of dynamic systems on the plane / N. N. Bautin, Y. A. Leontovich. — M. : Nauka, Head editorial office of physic-mathematical literature, 1990. — 488 p. [In Russian]
2. Yakubovich V. A. Linear differential equations with periodic coefficients and their applications / V. A. Yakubovich, V. M. Starzhynskiy. — M. : Nauka, Head editorial office of physic-mathematical literature, 1972. — 720 p. [In Russian]
3. Neymark Y. I. Dynamic systems and the controlled processes / Neymark Y. I. — M. : Nauka, 1978. — 336 p. [In Russian]
4. Nemytskiy V. V. Qualitative theory of differential equations / V. V. Nemytskiy, V. V. Stepanov. — M. : URSS, 2004. — 552 p. [In Russian]
5. Samarskiy A. A. Mathematical modeling: Ideas. Methods. Examples / A. A. Samarskiy, A. P. Mikhaylov. — [2-nd ed., rev.]. — M. : Physmathlit, 2001. — 320 p. [In Russian]
6. Simon A. V. A model of employment social interrelation and asserting the necessity for the investigation of the Lotka — Volterra system of the second order with varying coefficients / A. V. Simon, V. V. Romanuke // Applied mathematics tasks in mechanics, economy, ecology: Materials VI of International student scientific conference, Sevastopol, April, 14 — 18, 2008. — Sevastopol : Publishing house SevNTU, 2008. — P. 76 — 79. [In English]
7. Nikolaykin N. I. Ecology / Nikolaykin N. I., Nikolaykina N. Y., Melekhova O. P. — [5-th ed.]. — M. : Drofa, 2006. — 640 p. [In Russian]
8. Shtovba S. D. Projecting the fuzzy systems with means of MATLAB / Shtovba S. D. — M. : Hot line — Telecom, 2007. — 288 p. [In Russian]

Стаття надійшла 17.07.2010 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., проф. Степаненком С.М.

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА ТИПА ЛОТКИ — ВОЛЬТЕРРЫ В СРЕДЕ MAXIMA ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ РАЗВИТИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭКОСИСТЕМ

Романюк В. В., к. т. н., доцент
Хмельницкий национальный университет
ул. Институтская, 11, г. Хмельницкий, Украина
E-mail: romanukevadimv@mail.ru

Предложена к использованию среда Maxima с графическим интерфейсом wxMaxima для качественного исследования динамических систем второго порядка типа Лотки — Вольтерры, описывающих взаимодействие популяций двух биологических видов. Показан способ построения фазового портрета исследуемой системы с шестью параметрами, значения которых можно регулировать прямо на графической форме Plotdf.

Ключевые слова: динамическая система, система Лотки — Вольтерры.

PARAMETRIC INVESTIGATION OF SECOND ORDER LOTKA — VOLTERRA DYNAMIC SYSTEMS IN MAXIMA ENVIRONMENT FOR PREDICTION OF INTERACTION ECOSYSTEMS

Romanuke V. V., c. t. s., associate prof.
Khmelnytskyy national university
Khmelnytskyy, Instytutska str., 11
E-mail: romanukevadimv@mail.ru

There has been suggested the application of Maxima environment for qualitatively analyzing the second order dynamic systems of Lotka — Volterra type, describing the interaction of two biological species populations. There has been demonstrated a way of plotting the phase portrait of the being investigated system with six parameters, which values can be controlled downright on the graphical form Plotdf.

Key words: dynamic system, Lotka — Volterra system.