

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка

ЯРЕЦЬКА НАТАЛІЯ ОЛЕКСАНДРІВНА



УДК 539.3

ТИСК ПРУЖНОГО ЦИЛІНДРИЧНОГО ШТАМПУ
НА ПРУЖНИЙ ШАР
З ПОЧАТКОВИМИ (ЗАЛИШКОВИМИ) НАПРУЖЕННЯМИ

Спеціальність 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2014

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Хмельницькому національному університеті Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор технічних наук, професор
Рудницький В'ячеслав Броніславович,
Хмельницький національний університет,
завідувач кафедри вищої математики
та комп'ютерних застосувань.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Мартиненко Михайло Антонович,
Національний університет харчових технологій,
завідувач кафедри вищої математики;

кандидат фізико-математичних наук, доцент
Глухов Юрій Петрович,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
старший науковий співробітник
відділу динаміки та стійкості суцільних середовищ.

Захист відбудеться «10» лютого 2015 р. о 13³⁰ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.166.01 Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України за адресою: 03057, м. Київ-57, вул. Нестерова, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України за адресою: 03057, м. Київ-57, вул. Нестерова, 3.

Автореферат розісланий «25» грудня 2014 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради Д 26.166.01
доктор фізико-математичних наук



О.П. Жук

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Проблема контактної взаємодії попередньо напружених тіл, що є однією з найбільш поширених на практиці способів передачі навантаження, актуальна і важлива як для розвитку фундаментальних досліджень з механіки твердого деформівного тіла, так і для застосування у різних галузях промисловості. А успішному розв'язанню задач, пов'язаних із контактною взаємодією деформівних тіл, великою мірою допомагають широкі наукові дослідження. Тому їх розв'язання викликає велику увагу науковців, як у нас в країні, так і за кордоном.

Методи, що розвиваються теорією контактних задач, дозволяють знайти розподіл тиску у місцях контакту, вивчити концентрацію напружень та дослідити напружено-деформівний стан у тілах тощо.

Незважаючи на існуючі досягнення у цьому напрямку, все ще залишається недостатньо розробленою проблема тиску попередньо напруженого циліндричного штампку на шар з початковими напруженнями. Тому в цій роботі вперше представлено розв'язок нової контактної задачі в рамках лінеаризованої теорії пружності про тиск попередньо напруженого циліндричного штампку на пружний шар з початковими напруженнями. А дисертація має важливе прикладне і теоретичне значення та її дослідження приводиться автором вперше.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана в рамках кафедральної бюджетної теми «Контактна взаємодія пружних тіл» в галузі механіки твердого деформівного тіла. Тема затверджена Вченою радою Хмельницького національного університету (протокол № 8 від 21 лютого 2007 р.). Дисертаційна робота увійшла також до звітів ХНУ по держбюджетній дослідній темі № 6Б–2013 «Механіка циклічного фрикційного контакту з відносними мікро-нанопереміщеннями та наступним руйнуванням поверхонь» (№ ДР 0113U002065). Теоретичні дослідження проводились і у договорах про творчу співдружність № 10–2007 р. ДС та № 2–2009 р. ТС, які були укладені між Хмельницьким національним університетом та ТОВ «Європа–Експорт Плюс».

Мета і задачі дослідження. *Метою роботи* є розв'язок осесиметричної статичної задачі про тиск пружного циліндричного штампку з початковими напруженнями на пружний шар з початковими напруженнями в рамках лінеаризованої теорії пружності. Дослідження представлені в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу для стисливих і нестисливих тіл, включаючи: 1) постановку задачі та теоретичні дослідження у межах лінеаризованої теорії пружності; 2) запис відповідних граничних умов; 3) виведення аналітичних залежностей для скінченного циліндричного штампку з початковими напруженнями; 4) одержання аналітичних залежностей для шару та основи, коли: шар лежить на жорсткій основі без тертя; шар жорстко закріплений із недеформованою основою; шар з початковими напруженнями лежить без тертя на пружній основі з початковими напруженнями;

шар з початковими напруженнями лежить без тертя на пружній основі без початкових напружень; 5) розробки числових алгоритмів обчислення та графічної інтерпретації напружено-деформівних станів пружних штампу та шару з початковими напруженнями; 6) аналіз впливу початкових напружень стосовно потенціалів конкретної структури; 7) формування висновків.

Об'єктом дослідження є процес контактної взаємодії пружного циліндра з початковими напруженнями та шару з початковими напруженнями.

Предметом дослідження є вплив початкових напружень на закон розподілу контактних напружень і переміщень пружних циліндра та шару.

Методи дослідження. В рамках лінеаризованої теорії пружності загальні співвідношення напружено-деформівного стану пружних тіл, що контактують, вписані з використанням відлікового методу, який наведений у монографіях О.М. Гузя. Побудова аналітичних розв'язків для циліндричного штампу і шару з початковими напруженнями відбувалась за допомогою методів розділення змінних (метод Фур'є) та інтегральних перетворень Ханкеля, відповідно. Також в роботі використаний метод розв'язання парних інтегральних рівнянь з подальшим їх зведенням до інтегрального рівняння типу Фредгольма другого роду, розв'язок якого знайдений методом послідовних наближень. Задача зводиться до розв'язання квазірегулярної нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, що розв'язується методом редукції і засобами програмного забезпечення.

Наукова новизна результатів представлена положеннями:

- вперше отримано розв'язок нової осесиметричної статичної задачі лінеаризованої теорії пружності в тілах з початковими напруженнями при довільній структурі пружного потенціалу для стисливих і нестисливих тіл. Одержані співвідношення, які дозволяють досліджувати напружено-деформівний стан у зоні контакту, та на відміну від класичної теорії пружності враховують вплив початкових напружень;

- вперше встановлені нові аналітичні залежності, які дозволяють досліджувати поведінку напружень та переміщень у зоні контакту для пружного циліндричного штампу, пружного шару та основи з початковими напруженнями без врахування сил тертя у випадках, коли: шар лежить на жорсткій основі без тертя; шар жорстко закріплений із недеформованою основою; попередньо напружений шар лежить без тертя на основі з початковими напруженнями або без них у рамках лінеаризованої теорії пружності при довільній структурі пружного потенціалу;

- розроблено алгоритм чисельного обчислення компонентів напружено-деформівного стану контактуючих тіл з початковими напруженнями при довільній структурі пружного потенціалу, що зводить задачу до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, через невідомі якої виражаються компоненти напружень і переміщень пружних штампу, шару та основи. Це дозволяє використовувати його при інженерних розрахунках;

- встановлено особливість впливу початкових напружень на закон розподілу контактних напружень і переміщень пружних циліндра й шару, як у якісному так і у кількісному плані, порівняно з випадком відсутності початкових напружень.

Практичне значення одержаних результатів полягає в тому, що:

- дисертаційні дослідження орієнтовано на розв’язання просторової осесиметричної статичної задачі про тиск пружних циліндра та шару з врахуванням початкового напруженого стану. Результати досліджень дозволяють сформулювати характерні для потенціалів довільної структури співвідношення компонентів напружено-деформівного стану в зоні контакту. Одержані аналітичні співвідношення, які відображають вплив початкових напружень на закон розподілу контактних напружень і переміщень;

- запропонований принцип дослідження і алгоритм розв’язку можуть використовуватись для дослідження різноманітних ізотропних, трансверсально-ізотропних або композитних матеріалів при проектуванні технологічного обладнання, колон будівель та інших конструкцій;

- розроблена в рамках дисертаційних досліджень нова комп’ютерна програма, що принципово спрощує процес отримання числових і графічних результатів досліджень була використана при дослідженні впливу початкових напружень на з’єднання і кріплення в трансформаторних підстанціях, враховуючи дію електричних, магнітно-електричних та силових полів. Отримані результати враховані у рекомендаціях для ТОВ «Європа–Експорт Плюс»;

- одержані в процесі виконання досліджень результати використані у науково-дослідній роботі студентів Хмельницького національного університету за спеціальністю 6.050101 «Комп’ютерні науки».

Ступінь обґрунтованості наукових положень висновків та рекомендацій, сформульованих у дисертації, достовірні й відповідають об’єктивній реальності. Це підтверджується тим, що всі висновки досліджень отримані в результаті коректно поставленої задачі у рамках лінеаризованої теорії пружності, залученням строгого математичного апарату, надійних чисельних методів і програмного забезпечення. Одержані результати перевірялись на еталонних задачах і у спрощених випадках відповідають відомим розв’язкам у літературі.

Особистий внесок здобувача. Дисертаційна робота виконана дисертантом самостійно. Визначення загального напрямку досліджень і постановки задачі належить науковому керівнику проф. В. Б. Рудницькому. Дисертація містить лише ті результати, які отримані дисертантом особисто.

Апробація результатів дисертації. Основні результати і положення дисертації доповідалися на: щорічних семінарах і конференціях Хмельницького національного університету (лютий 2007–2014 р.); VI Всеукраїнській молодіжній науково-технічній конференції «Машинобудування України очима молодих: прогресивні ідеї-наука-виробництво» (м. Хмельницький: ХНУ, 2006 р.); III Міжнародній науковій конференції «Новітні матеріали та технології в будові та експлуатації машин» (6–8 вересня 2007, Кам’янець-Подільський, Україна); II та III міжнародних наукових конференціях «Сучасні проблеми механіки та математики» (м. Львів, КМУ ІППМ ім. академіка Я. С. Підстригача, травень 2008–2009 рр.); VII Всеукраїнській науковій конференції молодих учених та студентів «Наукові розробки молоді на сучасному етапі» (м. Київ, 23–24 квітня

2009 р.); VII Міжнародній науковій конференції (м. Тираспіль, 8–10 червня 2011 р.); XII Міжнародній конференції з математичного моделювання (МКММ–2011) (м. Херсон, ХНТУ, 12–17 вересня 2011 р.); Міжнародній конференції «IV українсько-польські наукові діалоги» (до 50-річчя заснування ХНУ, м. Яремче, Україна, 11–14 жовтня 2011 р.); IV Міжнародній науково-технічній конференції «Актуальні проблеми прикладної механіки та міцності конструкцій» (м. Запоріжжя, 8–10 червня 2012 р.); XV Міжнародній конференції з математичного моделювання (МКММ–2014) (смт. Залізний порт, Херсонська обл., 16–20 вересня 2014 р.).

У завершеному вигляді результати дисертаційних досліджень доповідалися і обговорювалися на науковому семінарі кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань Хмельницького національного університету (м. Хмельницький, 2013 р.); міжкафедральному семінарі Хмельницького національного університету (м. Хмельницький, 2014 р.); науковому семінарі Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України за напрямом «Механіка деформованого твердого тіла» (м. Київ, 2014 р.).

Публікації. Результати роботи були опубліковані у 37 наукових збірниках та журналах. Суто за матеріалами дисертації опубліковано 21 наукову працю, з яких: 7 у міжнародних та фахових виданнях [1–7], 8 статей і 6 тез доповідей у інших наукових виданнях України та зарубіжжя [8–21]. Зареєстровано акт про авторське право на комп'ютерну програму в середовищі Maple (заявка № 55015 від 18.02.2014 р., свідоцтво № 54576 від 05.05.2014 р.).

Структура та обсяг дисертації. Робота складається із вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел з 173 найменувань робіт на 18 сторінках. Повний обсяг дисертації викладений на 141 сторінці, включаючи 40 рисунків і 8 таблиць.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** подано загальну характеристику дисертації; розкрито стан наукової проблеми, обґрунтовано актуальність теми дисертації, її зв'язок з науковими програмами; сформульовано мету, завдання і методи дослідження; відзначено наукову новизну, теоретичну і практичну цінність та достовірність одержаних результатів; наведено дані про апробацію та основні публікації результатів дисертаційної роботи, а також короткий опис структури та обсягу дисертації.

У **першому** розділі наведено огляд літератури за темою дисертації. На основі аналізу виконаного огляду сучасного стану проблеми визначено місце даної роботи серед проведених раніше досліджень і обґрунтовано вибір напрямку досліджень.

Основи теорії контактної взаємодії між пружними тілами без початкових напружень були закладені класичними роботами Н. Герца та І. Бусинеска, а також роботами М. Бородачева, В. Власова, І. Воровича, Л. Галіна, В. Грилицького, В. Грінченка, А. Динніка, А. Каландія, М. Кізіми, М. Леонова, М. Леонтьєва,

А. Лур'є, М. Мартиненка, В. Моссановського, М. Мухелішвілі, С. Мхитаряна, Г. Попова, В. Рвачева, М. Савіна, В. Саркісяна, В. Сеймова, М. Теплового, С. Чаплигіна, Ю. Шевченка, Д. Шермана, І. Штаермана та багато інших, а імена та праці яких подані в оглядових статтях Н.О. Кільчевського і Є.Н. Костюка, В.Л. Рвачева, Г.Я. Попова і Н.А. Ростовцева, Б.Л. Абрамяна, О.М. Гузя, В.Б. Рудницького, С.Ю. Бабича, а також у колективній монографії під редакцією Л.О. Галіна.

Перші роботи з контактної взаємодії тіл, що враховують вплив початкових напружень, присвячені взаємодії попередньо напружених тіл із жорсткими та пружними штампами без початкових напружень. Причому розглядаються або пружні потенціали конкретної структури, або задача ставиться в загальному вигляді для стисливих (нестисливих) тіл при довільній структурі пружного потенціалу на основі лінеаризованої теорії пружності. У загальному випадку постановка таких задач вимагає залучення апарату нелінійної теорії пружності, але при досить великих початкових деформаціях можна обмежитися і її лінеаризованим варіантом.

Складність подібних задач пояснюється тим, що їх дослідження зводяться до одних із найважчих рівнянь математичної фізики, розв'язок яких пов'язаний із великими математичними труднощами.

Різного роду задачами в тілах з початковими напруженнями, займалися С. Акбаров, В. Александров, Д. Андерсон, Н. Арутюнян, О. Бачко, С. Бруднов, Д. Васілік, І. Воротинцева, К. Гао, А. Грін, О. Гуца, Р. Далівал, Дж. Дорман, О. Жук, В. Кнюх, М. Курашіге, В. Кушнір, Ж. Лантейн, В. Лебедев, Ле Мінь Кхань, О. Максимук, Ц. Мао, П. Махорт, А. Мовчан, В. Назаренко, Д. Паугвет, В. Порошин, М. Саїто, Н. Сітенко, Г. Сулим, С. Танг, Т. Токуока, Л. Філіпова, Б. Шелестовський М. Ямамото та інші.

Фундаментальні результати лінеаризованої теорії пружності були одержані українським вченим, академіком НАН України проф. О.М. Гузем. Ним вперше розв'язано ряд контактних задач для стисливих і нестисливих тіл одним із найбільш ефективних підходів для матеріалів з довільною формою пружного потенціалу та однорідними початковими напруженнями, що оснований на теорії функції комплексної змінної для плоских задач і теорії потенціалу для просторових задач. Подальшого розвитку теорія контактної взаємодії тіл з початковими напруженнями отримала у працях його учнів: С.Ю. Бабича, В.Б. Рудницького, П.П. Григоренка, В.М. Назаренка, Ю.П. Глухова, А.О. Рамського, М.М. Діхтярука, О.М. Панасюка та інших вітчизняних і зарубіжних вчених. Загальний аналіз основних методів і найбільш відомих результатів по всіх напрямках контактної взаємодії тіл з початковими напруженнями представлений в оглядових статтях О.М. Гузя, С.Ю. Бабича, В.Б. Рудницького, опублікованих у фахових журналах України та зарубіжжя.

Основні результати і досягнення при дослідженні впливу початкових напружень на контактну взаємодію тіл належать співробітникам Інституту механіки, а саме: О.М. Гузю, С.Ю. Бабичу, В.Б. Рудницькому та іншим.

Але, незважаючи на безперервне збільшення кількості досліджень, присвячених контактній взаємодії тіл з попередньо напруженим станом, що

пояснюється їх актуальністю як для розвитку фундаментальних досліджень з контактної взаємодії тіл, так і для застосування у галузях промисловості. Задача про тиск циліндричного штампу з початковими напруженнями на попередньо напружений шар досі не була розв'язана в рамках лінеаризованої теорії пружності для стисливих і нестисливих тіл у загальному вигляді при довільній структурі пружного потенціалу. Тому дослідження проведені у дисертації мають важливе прикладне і теоретичне значення.

У **другому** розділі розглянуто основні принципи та співвідношення лінеаризованої теорії пружності в координатах початкового деформівного стану при однорідних початкових напруженнях. Усі співвідношення, в основному, подані спираючись на праці О.М. Гузя, В.Б. Рудницького.

У загальному вигляді представлено розв'язки просторових осесиметричних статичних задач для стисливих і нестисливих тіл при однорідних початкових напруженнях для теорії великих початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу.

Розрізняємо такі стани тіл з початковими напруженнями: природний (початкові напруження відсутні), початковий, та збурений стан. Всі величини, останнього, складаються з суми величин початкового стану та відповідних збурень. Оскільки збурення вважаємо меншими відповідних величин початкового стану, дослідження проводимо в рамках лінеаризованої теорії пружності.

Для дослідження застосуємо координати деформівного стану Oy_i ($i = \overline{1, 3}$), які пов'язані з лагранжевими координатами x_i ($i = \overline{1, 3}$) співвідношеннями: $y_i = \lambda_i x_i$, ($i = \overline{1, 3}$), де λ_i , ($i = \overline{1, 3}$) – коефіцієнти видовження, що визначають переміщення початкового стану, $\lambda_i = \text{const}$. Вісь y_3 спрямовано по нормалі до межі контакту.

Припускаємо, що пружні потенціали – двічі неперервно-диференційовні функції алгебраїчних інваріантів тензора деформацій Гріна та будуть виконуватись співвідношення $y_m = x_m + U_m^0$, $U_m^0 = \delta_{mi}(\lambda_m - 1)\lambda_i^{-1}y_i$.

Тоді основне рівняння в переміщеннях для стисливих тіл має вигляд:

$$L'_{m\alpha} U_\alpha = 0, \quad L'_{m\alpha} = \omega'_{ij\alpha\beta} \partial^2 / \partial y_i \partial y_\beta, \quad (i, m, \alpha, \beta = \overline{1, 3}), \quad (1)$$

а для нестисливих тіл разом із умовою нестисливості:

$$\begin{aligned} L'_{m\alpha} U_\alpha + q'_{\alpha m} \partial p' / \partial y_\alpha = 0, \quad L'_{m\alpha} = \kappa'_{im\alpha\beta} \partial^2 / \partial y_i \partial y_\beta, \\ q'_{ij} \partial U_j / \partial y_i = 0, \quad q'_{ij} = \lambda_i q_{ij}, \quad (i, j, m, \alpha, \beta = \overline{1, 3}). \end{aligned} \quad (2)$$

Вирази для визначення складових тензора напружень для стисливих і нестисливих тіл запишемо у вигляді:

$$Q'_{ij} = \omega'_{ij\alpha\beta} \frac{\partial U_\alpha}{\partial y_\beta}, \quad Q'_{ij} = \kappa'_{ij\alpha\beta} \frac{\partial U_\alpha}{\partial y_\beta} + q'_{ij} p,$$

$$\omega'_{ij\alpha\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_j \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \omega_{ij\alpha\beta}, \kappa'_{ij\alpha\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_j \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \kappa_{ij\alpha\beta},$$

де $\omega'_{ij\alpha\beta}$, $\kappa'_{ij\alpha\beta}$ – складові тензора модулів пружності четвертого порядку.

При однорідних початкових напруженнях $S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0$; $S_0^{33} = 0$; $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ розв'язки рівнянь (1), (2) виразимо через розв'язки диференціального рівняння:

$$(\Delta_1 + \xi_2'^2 \partial^2 / \partial y_3^2)(\Delta_1 + \xi_3'^2 \partial^2 / \partial y_3^2) \tilde{\chi} = 0, \quad (3)$$

де $\Delta_1 = \partial^2 / \partial r^2 + r^{-1} \partial / \partial r$.

Враховуючи умову існування єдиного розв'язку лінеаризованої теорії пружності для стисливих і нестисливих тіл, можливі два варіанти представлення загального розв'язку (3): випадок рівних коренів ($\xi_2'^2 = \xi_3'^2$):

$$\tilde{\chi} = \tilde{\chi}_1 + y_3 \tilde{\chi}_2, \quad (\Delta_1 + \xi_2'^2 \partial^2 / \partial y_3^2) \tilde{\chi}_1 = 0, \quad (\Delta_1 + \xi_2'^2 \partial^2 / \partial y_3^2) \tilde{\chi}_2 = 0 \quad (4)$$

випадок нерівних коренів ($\xi_2'^2 \neq \xi_3'^2$):

$$\tilde{\chi} = \tilde{\chi}_1 + \tilde{\chi}_2, \quad (\Delta_1 + \xi_2'^2 \partial^2 / \partial y_3^2) \tilde{\chi}_1 = 0, \quad (\Delta_1 + \xi_3'^2 \partial^2 / \partial y_3^2) \tilde{\chi}_2 = 0. \quad (5)$$

У системі кругових циліндричних координат (r, θ, z_i) , де $z_i = v_i^{-1} y_3$, $v_i = \sqrt{n_i}$, $(i = \overline{1, 2})$, $n_1 = \xi_2'^2$, $n_2 = \xi_3'^2$, за допомогою методів розділення змінних (метод Фур'є) виведено розв'язки для скінченного циліндричного штапу з початковими напруженнями, які виражаються через нескінченну систему констант. А напружено-деформівний стан у пружному шарі та основі з початковими напруженнями для випадків (4) і (5), був визначений через гармонійні функції у вигляді інтегралів Ханкеля.

Також, для пружних потенціалів найпростішої структури у розділі подані значення ряду величин, які входять у загальні розв'язки та співвідношення лінеаризованої теорії пружності й залежать від вигляду пружного потенціалу.

У **третьому** розділі дисертації у рамках лінеаризованої теорії пружності подано постановку, граничні умови та розв'язок контактної задачі про тиск попередньо напруженого скінченного циліндричного штапу на пружний шар з початковими напруженнями. Виконано порівняння отриманих результатів із відомими розв'язками лінійної теорії пружності.

Відзначимо, що усі величини, які відносяться до пружного штапу позначаються верхнім індексом «(1)», шару – «(2)», а основи – «(3)».

У дослідженні розглядаємо пружні ізотропні тіла (стисливі або нестисливі) з довільною формою пружного потенціалу. У випадку ортотропних тіл, вважаємо, що пружно-еквівалентні напрямки співпадають із напрямком осей координат y_i . Нехай початкові стани у шарі та циліндричному штапі є однорідними та рівними, а в зоні контакту циліндра та шару відсутнє тертя.

Вважаємо, що початкові напруження діють вздовж зони контакту. Тому, припустимо, що будуть виконуватися наступні положення, які є основними для лінеаризованої теорії пружності:

1. Контактна взаємодія пружного скінченного циліндричного штампу з початковими напруженнями із попередньо напруженим пружним шаром, відбувається після виникнення у них початкового напруженого стану.

2. Додаткове зовнішнє навантаження діє на пружний циліндричний штамп, викликаючи у шарі з початковими напруженнями значно менше збурення напружено-деформівного стану порівняно із відповідними величинами початкового напруженого стану.

3. Початковий напружено-деформівний стан контактуючих тіл, має таку структуру, що в ділянці контакту його можна вважати однорідним.

4. Розв'язок лінеаризованої задачі теорії пружності про контактну взаємодію попередньо напруженого циліндричного штампу з пружним шаром із початковими напруженнями – єдиний.

Вище описані положення дають можливість застосовувати лінеаризовану теорію пружності до розв'язання даної проблеми. Відзначимо, що друге положення може порушуватись в околі точок зміни граничних умов, в яких контактні напруження зростають до безмежності. Детальне обговорення цього явища виконано у працях Л.О. Галіна, Д.В. Грілицького, Я.М. Кізіми, О.М. Гузя, В.Б. Рудницького, М.І. Мусхелішвілі та інших.

Постановка задачі. Нехай пружний циліндричний штамп радіуса R і висотою H з початковими напруженнями втискається у пружний шар під дією

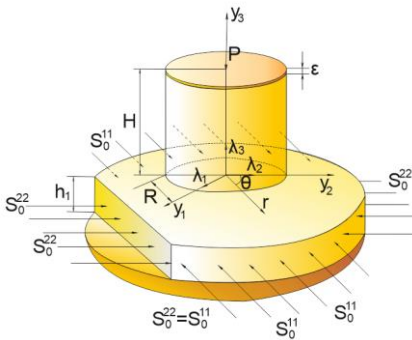


Рис. 1

или P після виникнення там початкового деформівного стану (рис. 1). h_1 – товщина шару в початковому деформівному стані, яка пов'язана з товщиною h_2 у недеформівному стані відношенням $h_1 = \lambda_3 h_2$. Будемо вважати, що зовнішнє навантаження прикладене тільки до зільного торця пружного штамп, під дією якого всі точки торця штампу тереміщаються у напрямку осі симетрії y_3 на одну і ту ж саму величину ϵ . Вважатимемо, що поверхні поза ділянкою контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил, а в зоні контакту

переміщення та напруження – неперервні. У випадку попередньо напруженого шару пропонується три види закріплення із основою: 1) шар лежить на жорсткій основі без тертя; 2) шар з початковими напруженнями жорстко закріплений із недеформованою основою; 3.а) шар з початковими напруженнями лежить без тертя на основі з початковими напруженнями; 3.б) шар з початковими напруженнями лежить без тертя на основі без початкових напружень. У циліндричній системі координат такій постановці відповідають *граничні умови*:

1) на торці пружного штампу $z_i = H v_i^{-1}$, де $v_i = \sqrt{n_i}$, $(i = \overline{1, 2})$:

$$u_3^{(1)} = -\varepsilon, \quad Q_{3r}^{(1)} = 0, \quad (0 \leq r \leq R); \quad (6)$$

2) на межі пружного шару в ділянці контакту $z_i = 0$, $(i = \overline{1, 2})$:

$$u_3^{(1)} = u_3^{(2)}, \quad Q_{33}^{(1)} = Q_{33}^{(2)}, \quad Q_{3r}^{(1)} = Q_{3r}^{(2)} = 0, \quad (0 \leq r \leq R); \quad (7)$$

3) на межі пружного шару поза ділянкою контакту $z_i = 0$, $(i = \overline{1, 2})$:

$$Q_{33}^{(2)} = 0, \quad Q_{3r}^{(2)} = 0, \quad (R \leq r < \infty); \quad (8)$$

4) на боковій поверхні пружного штампу $r=R$:

$$Q_{rr}^{(1)} = 0, \quad Q_{3r}^{(1)} = 0, \quad (0 \leq z_i \leq H v_i^{-1}); \quad (9)$$

5) на нижній поверхні шару, $z_i = -\lambda_3 h_2 v_i^{-1} = -H v_i^{-1}$, $(i = \overline{1, 2})$:

– для шару з початковими напруженнями, що лежить без тертя на недеформованій основі:

$$u_3^{(2)} = 0, \quad Q_{3r}^{(2)} = 0, \quad (0 \leq r < \infty); \quad (10)$$

– для шару з початковими напруженнями, що жорстко з'єднаний з недеформованою основою:

$$u_3^{(2)} = 0, \quad u_r^{(2)} = 0, \quad (0 \leq r < \infty); \quad (11)$$

– для шару з початковими напруженнями, що лежить без тертя на пружній основі з початковими напруженнями:

$$u_3^{(2)} = u_3^{(3)}, \quad Q_{3r}^{(3)} = Q_{3r}^{(2)} = 0, \quad (0 \leq r < \infty). \quad (12)$$

Виписана, також умова рівноваги, що встановлює зв'язок між осіданням і рівнодіючою навантаження P .

Методика розв'язання. Знайдено розв'язки та компоненти напружено-деформівного стану у випадку коренів (4) і (5) рівняння (3). Так, наприклад, загальний розв'язок для циліндричного штампку представлений виразами:

при $n_1 = n_2$:

$$\begin{aligned} \tilde{\chi} = & (1 + v_1 z_1) \left[A_0 z_1 + B_0 + C_0 z_1 (3r^2 - 2z_1^2) \right] + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(A_k + v_1 z_1 B_k) I_0(\gamma_k v_1 r) S_1(\gamma_k z_1 v_1) + J_0(\alpha_k r) (S_2(\alpha_k z_1) + v_1 z_1 S_3(\alpha_k z_1)) \right], \end{aligned}$$

а при $n_1 \neq n_2$:

$$\begin{aligned} \tilde{\chi} = & r^2 (2A_0 + 3C_0 (z_1 + z_2)) - 2A_0 (z_1^2 + z_2^2) - 2C_0 (z_1^3 + z_2^3) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ [A_k I_0(\gamma_k v_1 r) S_1(\gamma_k z_1 v_1) + B_k I_0(\gamma_k v_2 r) S_1(\gamma_k z_2 v_2)] + J_0(\alpha_k r) [S_2(\alpha_k z_1) + S_3(\alpha_k z_2)] \right\}, \end{aligned}$$

де $S_1 = C_k \sin(\gamma_k v_1 z_1) + D_k \cos(\gamma_k v_1 z_1)$, $S_2 = E_k \operatorname{sh}(\alpha_k z_1) + F_k \operatorname{ch}(\alpha_k z_1)$,
 $S_3 = N_k \operatorname{sh}(\alpha_k z_1) + M_k \operatorname{ch}(\alpha_k z_1)$, A_0, B_0, C_0, A_k, B_k – невідомі коефіцієнти.

Напружено-деформівний стан у попередньо напруженому шарі, врахувавши (6)–(12), представимо, наприклад, для рівних коренів у вигляді:

$$u_3^{(2)} = \theta_3 \left(\int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_0(\eta \rho) d\eta - \int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} G(\eta h) J_0(\eta \rho) d\eta \right),$$

$$Q_{33}^{(2)} = \theta_1 \int_0^\infty F(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta, \quad Q_{3r}^{(2)} = 0, \quad (13)$$

де $\theta_1 = C_{44} l_1 (1 + m_1) \kappa$, $h = h_1 / R$, $\theta_3 = \frac{m_1}{v_1} (s_1 - s_0)$, $s_0 = \frac{(1 + m_2)}{(1 + m_1)}$, $s_1 = \frac{m_1 - 1}{m_1}$.

У (13) введено позначення $F(\eta) = \eta^3 B_2 R^{-3} (1 - G(\eta))^{-1}$. А функції $G(\eta)$ та κ визначаються умовами (6) – (12).

Вводяться нові величини χ_k ($k = 0, 1, 2, \dots$), через які виражаються усі невідомі коефіцієнти у шарі, штампі та основі, що залежать від вигляду пружного потенціалу, для рівних і нерівних коренів відповідно.

З умов неперервності напружень та переміщень (5), (6) в зоні контакту та поза нею випишемо парні інтегральні рівняння відносно функції $F(\eta)$:

$$\int_0^\infty F(\eta) \eta^{-1} J_0(\eta \rho) d\eta = f(\rho), \quad (\rho < 1), \quad \int_0^\infty F(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = 0, \quad (\rho > 1),$$

де наприклад, у випадку нерівних коренів маємо:

$$f(\rho) = \varepsilon \theta_3^{-1} (\chi_0 - 1 - \theta_4 \sum_{k=1}^\infty \chi_k J_0(\mu_k \rho) + \theta_3 \varepsilon^{-1} \int_0^\infty \eta^{-1} F(\eta) G(\eta h) J_1(\eta \rho) d\eta),$$

де $\theta_4 = n_1^{-1} (v_1 (m_2 - 1) - m_1 s_0)$, $b_1^{(k)}$ – виражаються із граничних умов (6)–(12), $J_0(\mu_k \rho)$, $I_0(\gamma_k v_1 \rho)$ – функції Бесселя.

Використовуючи формулу звернення, матимемо інтегральні рівняння типу Фредгольма 2-го роду відносно функції $F(\eta)$, які представлені співвідношеннями для рівних коренів:

$$\frac{F(\eta)}{\eta} = -\frac{2\varepsilon}{\pi \theta_3} \left((1 - \chi_0) \Psi_0(\eta, 0) - 2(m_2 - 1) \frac{R^2}{\theta_2} \chi_0 \Psi_1(\eta, 0) + \theta_4 \sum_{k=1}^\infty \chi_k \Psi_0(\eta, \mu_k) + \right.$$

$$\left. + 0,5(m_2 - 1) R^2 \sum_{k=1}^\infty b_1^{(k)} \chi_k \Psi_0(\eta, i \gamma_k v_1 R) \right) + 2\pi^{-1} \int_0^\infty u^{-1} F(u) G(uh) \Psi_0(\eta, u) du \quad (14)$$

та нерівних коренів:

$$\frac{F(\eta)}{\eta} = \frac{2\varepsilon}{\pi\theta_3} \left((\chi_0 - 1)\Psi_0(\eta, 0) - \theta_4 \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \Psi_0(\eta, \mu_k) + \frac{\theta_3}{\varepsilon} \int_0^{\infty} \frac{F(u)}{u} G(uh)\Psi_0(\eta, u) du \right), \quad (15)$$

де $\Psi_n(x, y) = \int_0^1 t^n \cos xt \cos ytdt$.

Розв'язки (14), (15) шукаємо методом послідовних наближень у вигляді:

$$F(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} F^{(k)}(\eta). \quad (16)$$

Відмітимо, що процес послідовних наближень (16) збіжний при $\lambda_1 > \lambda_{kp}$.

Використовуючи граничні умови (6)–(12) та ортогональність бesselевих функцій отримаємо нескінченну квазірегулярну систему лінійних рівнянь:

$$\mathfrak{G}_k \chi_k + \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{G}_{kn} \chi_n = \varpi_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (17)$$

Таким чином, задача зведена до визначення постійних χ_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) через які виражаються характеристики напружено-деформівного стану пружного шару, штампку та основи з початковими напруженнями.

Зв'язок між осадом торця штампку та рівнодіючою навантаження P для рівних і нерівних коренів, відповідно, матиме вигляд:

$$P = 8\pi\varepsilon E \theta_1 (\kappa \theta_2 l R)^{-1} \chi_0, \quad P = 2\pi\varepsilon E \theta_5 \theta_1 (\kappa H)^{-1} \chi_0,$$

де $l = H/R$, $\theta_5 = (v_2 + v_1 s) n_1 n_2 ((m_1 v_2^3 + m_2 v_1^3) E)^{-1}$.

При обчисленні компонентів напружено-деформівного стану для шару і основи більшість інтегралів у кінцевому вигляді не обчислюються, враховуючи складність функції $G(t)$. Тому, починаючи із другого наближення функції (16), підінтегральні вирази розкладаємо у ряди за степенями h^{-i} ($i = 1, 2, \dots$), що дозволить обчислити коефіцієнти системи (17) наближено.

У розділі виконано порівняння отриманих результатів із відомими розв'язками лінійної теорії пружності за допомогою граничного переходу у випадку потенціалів конкретної структури.

У **четвертому** розділі представлені результати дослідження впливу початкових напружень на контактну взаємодію пружного циліндра та шару стосовно конкретних потенціалів, таких як: потенціал Бартенева–Хазановича, Трелоара і гармонічного потенціалу. Досліджено квазірегулярність системи (17) до якої зводиться розв'язок поставленої задачі; та збіжність методу послідовних наближень і рядів, що зустрічаються при розв'язанні задачі.

Враховуючи асимптотичні представлення для функцій Бесселя, величин μ_k та обмеженості інтегралів $\Psi(\mu_k, \mu_n)$, система (17) квазірегулярна, якщо $\lambda_1 > \lambda_{kp}$, а також при виконанні умови:

$$C_{44}I_1(1+m_1)(s-s_0)(m_1(s_0-s_1))^{-1} < \begin{cases} 0,36E(1-\nu^2)^{-1}, & \text{якщо } \nu \leq \nu_{\text{кр}}; \\ 0,48E, & \text{якщо } \nu > \nu_{\text{кр}}, \end{cases}$$

де ν – коефіцієнт Пуассона, E – модуль Юнга.

В роботі квазірегулярність системи (17) підтверджено, також, чисельними розрахунками на прикладі потенціала Трелоара.

Проведено чисельне розв'язання системи (17) при $k = 32$ для потенціалів гармонічного типу, Бартенева–Хазановича і Трелоара. Алгоритм базується на методі редукції та реалізований у вигляді програми в пакеті Maple. Ефективність програми перевірялась на ряді еталонних задач.

Також, в роботі для порівняння представлено значення χ_k , що визначаються методом редукції із (17) відповідно для 8, 16 та 32 рівнянь.

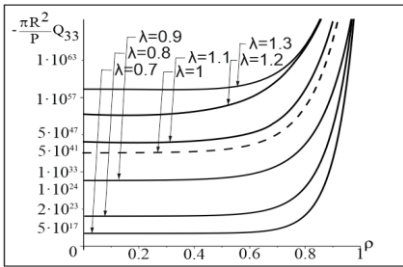


Рис. 2. Гармонічний потенціал

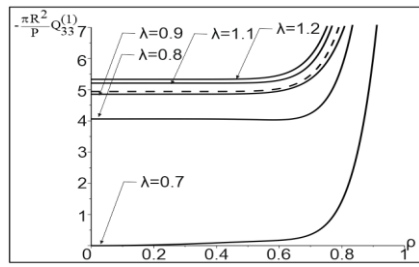


Рис. 3. Потенціал Трелоара

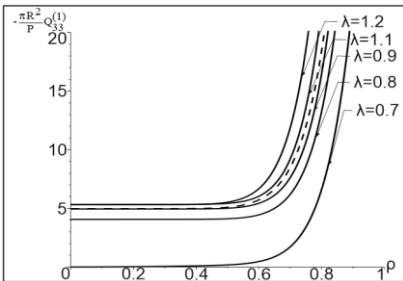


Рис. 4. Потенціал Трелоара, $h = 4$

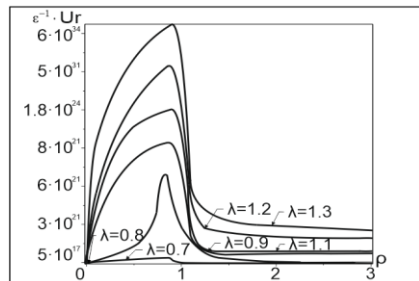


Рис. 5. Потенціал Бартенева–Хазановича

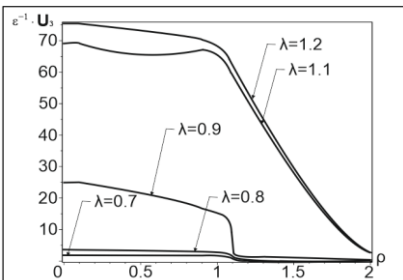


Рис. 6. Потенціал Трелоара

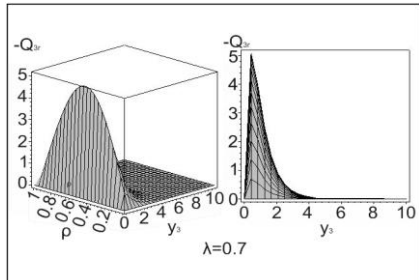


Рис. 7. Потенціал Трелоара

Числовий аналіз подано у вигляді графіків у безрозмірних координатах. На рисунках штрихпунктирна лінія відповідає стану без початкових напружень.

На рис. 2 і 3 представлено контактні напруження для циліндра з початковими напруженнями при $h = 1,6$.

Порівнюючи рис. 3 і 4, на яких зображено контактні напруження для попередньо напруженого циліндра, видно, що h не впливає на характер дії початкових напружень а впливає лише на їх значення.

Закономірність впливу початкових напружень на контактні переміщення у циліндрі та шарі проілюстровано на рис. 5 та 6.

З рис. 7 видно, що тангенціальні напруження найбільш зосереджені поблизу зони контакту.

Порівнюючи компоненти напружено-деформівного стану тіл з початковими напруженнями із відповідними виразами для ізотропного тіла без початкових напружень, при $z_i = 0$ отримаємо рівняння:

$$U_3(r, 0) = k \cdot U_3^0(r, 0), \quad Q_{33}(r, 0) = k_s \cdot Q_{33}^0(r, 0), \quad (18)$$

де $U_3(r, 0)$, $Q_{33}(r, 0)$ – переміщення і напруження під штампом, що втискається у шар з початковими напруженнями; $U_3^0(r, 0)$, $Q_{33}^0(r, 0)$ – переміщення і напруження під штампом, що втискається у шар без початкових напружень; k , k_s – коефіцієнти, які відображають вплив початкових напружень на контактні напруження і переміщення пружних циліндра та шару.

Залежність зміни коефіцієнтів k , k_s з рівнянь (18) представлено у табл. 1. З чого видно, що при наближенні коефіцієнта видовження до значень поверхневої нестійкості матеріалу переміщення необмежено зростають, а напруження прямують до нуля.

Таблиця 1

λ_1	Потенціал Баргенева–Хазановича		Потенціал Трелоара		Гармонічний потенціал	
	k	k_s	k	k_s	k	k_s
0,5951	–	–	–	–	∞	0
0,6661	–	–	∞	0	1,7391	0,2332
0,6934	∞	0	4,1602	0,2090	1,5396	0,3128
0,7	19,7913	44,3841	3,4487	2,9543	1,5061	4,7907
0,8	1,7088	2,6107	1,3285	1,2423	1,2446	2,3223
0,9	1,1653	1,3597	1,0774	1,0376	1,1166	1,4539
1,1	0,9328	0,8847	0,9583	1,0218	0,8533	0,7142
1,2	0,9048	0,8778	0,9176	1,0699	0,6306	0,5132
1,3	0,8961	0,9327	0,8687	1,1269	0,2329	0,3609

Перевірка одержаних результатів на еталонних задачах представлена чисельно у табл. 2, порівнянням числових значень сили P , що діє на верхній торець штапу, при заданих величинах початкових напружень та товщини шару h із випадком без початкових напружень (виділеного жирним шрифтом).

Числові значення сили $P/\epsilon R$

Потенціал Трелоара	λ_1	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2
	h						
		1,6	1,4082	1,2487	1,2974	1,2315	1,2978
	4	1,4025	1,2456	1,2945	1,2296	1,2653	1,2022

Досліджено збіжність методу послідовних наближень (за принципом стиснутих відображень), що був використаний в роботі при розв'язанні рівнянь (14), (15) при умові $h > v_1 \sqrt{D_1(2\pi)^{-1}}$, де $D_n = \int_0^{\infty} t^n G(t) dt$.

Мінімальні значення товщини шару h представлені в табл. 3, у випадку гармонічного потенціалу. Для порівняння, приведені значення товщини шару t , коли у циліндрі відсутні початкові напруження. З таблиці видно, що початкові напруження впливають на метод послідовних наближень.

Таблиця 3

λ_1	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3
h	1,54	1,25	1,02	0,83	0,67	0,54	0,42
t	1,49	1,27	1,08	0,83	0,65	0,51	0,41

Усі висновки, які зроблені у цьому розділі відповідають висновкам впливу початкових напружень на закон розподілу контактних напружень і переміщень, досліджених у працях О.М. Гузя, В.Б. Рудницького.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

У дисертації наведено теоретичне узагальнення і вирішено нову наукову проблему контактної взаємодії попередньо напружених тіл, а саме: вперше, в рамках лінеаризованої теорії пружності, розв'язана задача про тиск пружного циліндричного штампу на пружний шар з початковими напруженнями. Результати проведених досліджень дозволять ефективніше враховувати в інженерних розрахунках міцність матеріалів, і знижувати матеріаломісткість конструкцій, зберігаючи необхідні характеристики.

Основні наукові результати:

– у дисертаційній роботі в рамках лінеаризованої теорії пружності дано постановку і розв'язок нової осесиметричної задачі про тиск пружного скінченного циліндричного штампу з початковими напруженнями на попередньо напружений шар, для якої були сформульовані відповідні граничні умови. Дослідження виконані у загальній формі для теорії великих початкових деформацій і двох варіантів малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу для стисливих і нестисливих тіл;

– вперше знайдено розв'язки для пружного циліндра з початковими напруженнями, що втискається у попередньо напружений шар, які виражаються

через нескінченну систему констант. Ці константи визначаються з квазірегулярної системи лінійних алгебраїчних рівнянь;

- вперше виписані компоненти переміщень і напружень у внутрішніх точках основи та шару з початковими напруженнями для усіх розглянутих випадків;

- знайдено розв’язки нескінченної квазірегулярної системи лінійних алгебраїчних рівнянь для потенціалів конкретної структури (гармонічний, Бартенєва–Хазановича, Трелоара), через які визначається напружено-деформівний стан у пружних тілах з початковими напруженнями;

- розроблена нова комп’ютерна програма, що спрощує отримання числових і графічних результатів досліджень;

- числова реалізація методу дослідження дала змогу графічно відобразити вплив початкових напружень на закон розподілу контактних зусиль попередньо напружених тіл для потенціалів найпростішої структури;

- виявлено механічний ефект аналогічний раніше проведеним дослідженням академіка О.М. Гузя та проф. В.Б. Рудницького, який полягає в тому, що у випадку, коли коефіцієнт видовження наближається до значень поверхневої нестійкості матеріалу, виникають явища резонансного характеру як у шарі, так і у штампі. Вони полягають у тому, що напруження та переміщення у цих тілах різко змінюються (напруження наближаються до нуля, а переміщення необмежено зростають);

- виконано порівняння отриманих результатів із відомими розв’язками лінійної механіки контактної взаємодії.

Рекомендації щодо практичного використання здобутих результатів:

- початкові напруження при стиску призводять до зменшення сили напружень у циліндричному штампі та шарі, а при розтягненні – до їх збільшення, у випадку переміщень все відбувається навпаки. Тобто, наявність попередньо напруженого стану під час контактної взаємодії пружних тіл дає змогу регулювати контактні напруження та переміщення при розрахунках на міцність конструкцій. Причому для контактних напружень небезпечними є початкові напруження у випадку розтягнення, а для переміщення – у випадку стиску;

- найбільший вплив початкових напружень виявлено на бічній поверхні штампі;

- товщина шару не впливає на характер дії початкових напружень, а впливає лише на їх значення;

- більш суттєво, у кількісному плані, початкові напруження діють у високоеластичних матеріалах у порівнянні із більш жорсткими, але якісно їх вплив зберігається;

- небезпечною є ситуація, коли початкові напруження наближаються до значень поверхневої нестійкості, оскільки контактні напруження і переміщення різко змінюють свої значення.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Yaretska N. O. Contact interaction of resilient and cylindrical dies with initial (residual) tension / N. O. Yaretska // *Czasopismo techniczne: zeszyt 3/2008 (ROK 105)*. – Wydawnictwo politechniki Krakowskiej. – *Mechanika*, M/2008. – z. 3. – С. 213–216.
2. Ярецька Н. О. Тиск пружного циліндричного штампа на шар з початковими (залишковими) напруженнями / Н. О. Ярецька // *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла* : зб. наук. праць під ред. кол.: А. П. Дзюба (відп. ред.) та ін. – Дніпропетровськ : Ліра, 2012. – Вип. 13. – 460 с. Рос., укр. та англ. мовами. – С. 444–450.
3. Ярецька Н. О. Змішана статична контактна задача для пружного шару і пружного циліндричного штампа з початковими (залишковими) напруженнями / Н. О. Ярецька // *Вісник Тернопільського національного технічного університету*. – Тернопіль, 2013. – № 2 (70). – С. 63–73.
4. Ярецька Н. О. Про контактну задачу для циліндричного штампа і шару з початковими (залишковими) напруженнями / Н. О. Ярецька // *Вісник Тернопільського національного технічного університету*. – Тернопіль, 2013. – № 4 (72). – С. 68–77.
5. Ярецька Н. О. Вплив початкових (залишкових) напружень на контактну взаємодію пружного циліндричного штампа та пружного шару / Н. О. Ярецька // *Доповіді НАН України*. – Київ, 2014. – № 1. – С. 57–62.
6. Ярецкая Н. А. Пространственная контактная задача для упругого слоя и цилиндрического штампа с начальными напряжениями / Н. А. Ярецкая // *Прикл. механика*. – Киев, 2014. – № 50 (4). – С. 30–40.
7. Yaretskaya N. A. Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses / N. A. Yaretskaya // *International Applied Mechanics*. – July 2014. – Vol. 50, Issue 4. – Pp. 378–388.
8. Ярецька Н. О. Осесиметрична контактна задача для пружного шару і циліндричного штампа з початковими (залишковими) напруженнями / Н. О. Ярецька // *Тези доповідей VII Всеукраїнської наукової конференції молодих вчених «Наукові розробки молоді на сучасному етапі»*: В 3 т. – Київ, 2009. – Т. 2. – С. 218.
9. Ярецька Н. О. Осесиметрична контактна задача для пружного циліндра і шару з початковими (залишковими) напруженнями / Н. О. Ярецька // *IV українсько-польські наукові діалоги : тези наукових праць Міжнародної наукової конференції*, 11.10.2011 р., Хмельницький–Яремче, 2011. – С. 188–189.
10. Ярецкая Н. А. Давление упругого цилиндрического штампа на упругий слой с начальными (остаточными) напряжениями / Н. А. Ярецкая // *Сборник международной конференции «Современные проблемы механики», посвященный 100-летию Л.А. Галина. Тезисы докладов*. – Москва, 2012. – С. 90.
11. Ярецька Н. О. Статична контактна задача для попередньо напружених циліндричного штампа та шару, що лежить без тертя на жорсткій основі / Н. О. Ярецька // *Вісник Херсонського національного технічного університету*. – Херсон : ХНТУ, 2014. – № 3 (50). – С. 549–553.

12. Rudnitsky V. B. Contact interaction of resilient die and cylindrical die with initial (residual) tension / V. B. Rudnitsky, N. O. Yaretska // Вісник ХНУ: Технічні науки. – Хмельницький : ХНУ. – 2007. – № 5. – С. 136–137.

13. Рудницький В. Б. Тиск пружного циліндра на шар з початковими залишковими напруженнями / В. Б. Рудницький, Н. О. Ярецька // Сучасні проблеми механіки та математики: В 3 т. – Львів, 2008. – Т. 2. – С. 101–102.

14. Рудницький В. Б. Контактна взаємодія пружного шару і циліндричного штампу з початковими (залишковими) напруженнями / В. Б. Рудницький, Н. О. Ярецька // Актуальні проблеми комп'ютерних технологій : збірник наукових праць за матеріалами II Всеукраїнської науково-технічної конференції «Актуальні проблеми комп'ютерних технологій 2008» – Хмельницький : ХНУ, 2008. – Т. 2. – С. 178–181.

15. Рудницький В. Б. Просторова контактна задача для пружного циліндра та шару з початковими залишковими напруженнями / В. Б. Рудницький, Н. О. Ярецька // Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача. Тези доповідей. – Львів, 2009. – С. 92–94.

16. Рудницький В. Б. Контактная задача для слоя с начальными (остаточными) напряжениями / В. Б. Рудницький, Н. А. Ярецька // Збірник наукових праць ФПМКТ ХНУ. – Хмельницький, 2010. – № 1 (3). – С. 14–20.

17. Рудницький В. Б. Контактное взаимодействие слоя и упругого цилиндра с начальными (остаточными) напряжениями / В. Б. Рудницький, Н. А. Ярецька // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон : ХНТУ, 2011. – Вып. 3 (42). – С. 372–377.

18. Рудницький В. Б. Осесимметрическая контактная задача для упругого цилиндра и слоя с начальными (остаточными) напряжениями / В. Б. Рудницький, Н. А. Ярецька // Математическое моделирование в образовании, науке и производстве : Сборник статей VII Международной конференции, 8.06.2011 г. – Тирасполь, 2011. – С. 172–177.

19. Рудницький В. Б. Осесимметрическая контактная задача для упругого цилиндра и слоя с начальными (остаточными) напряжениями / В. Б. Рудницький, Н. А. Ярецька // Математическое моделирование в образовании, науке и производстве. Тезисы VII Международной конференции, 8–10 июня 2011 г. – Тирасполь, 2011. – С. 104–105.

20. Капучак Ю. О. Дослідження похибок форми в поперечному перетині циліндричних поверхонь деталей / Ю. О. Капучак, С. С. Ковальчук, О. О. Прошин, Н. О. Ярецька // Тези доповідей VI Всеукраїнської молодіжної науково-технічної конференції «Машинобудування України очима молодих: прогресивні ідеї–наука–виробництво». – Хмельницький: ХНУ, 2006. – С. 38.

21. Капучак Ю. О. Дослідження похибок форми в поперечному перетині циліндричних поверхонь деталей. / Ю. О. Капучак, С. С. Ковальчук, О. О. Прошин, Н. О. Ярецька // Вісник ХНУ: Технічні науки. – Хмельницький : ХНУ. – 2006. – № 6. – С. 32–34.

В [12–19] дисертанту належить виведення аналітичних залежностей, проведення аналізу впливу початкових напружень на закон розподілу тиску у

зоні контакту та розробка алгоритму розв'язку задачі. Керівнику, В.Б. Рудницькому, належить визначення загального напрямку досліджень і постановка задачі. В [20–21] Ярецькою Н.О. розроблено алгоритм чисельного розв'язку, виконано статистичну обробку результатів вимірювання відхилень форми циліндричних поверхонь деталей, викликаних деформаціями; Прошин О.О. сформулював постановку проблеми та напрямок досліджень; Ковальчук С.С. розробив програмне забезпечення системи керування верстатів; Капучак Ю.О. провів експериментальні дослідження відхилень форми в поперечному перетині циліндричних поверхонь деталей у виробничих умовах.

АНОТАЦІЯ

Ярецька Н. О. Тиск пружного циліндричного штампу на пружний шар з початковими (залишковими) напруженнями. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла. – Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України. – Київ, 2014.

Дисертація присвячена дослідженню проблеми контактної взаємодії попередньо напружених тіл, а саме: тиску пружних штампу і шару з початковими напруженнями. Розглянуто випадки, коли: шар з початковими напруженнями лежить на жорсткій основі без тертя; шар з початковими напруженнями жорстко закріплений із недеформованою основою; попередньо напружений шар лежить без тертя на основі з початковими напруженнями або без них.

Дослідження виконано у рамках лінеаризованої теорії пружності в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу. Отримані розв'язки виражаються через нескінченну систему констант, які визначаються з системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Досліджено вплив початкових напружень на контактну взаємодію пружних циліндра та шару на прикладі потенціалів конкретної структури.

Ключові слова: контактна взаємодія, пружний циліндричний штамп, пружний шар, початкові напруження, лінеаризована теорія пружності.

АННОТАЦИЯ

Ярецькая Н. А. Давление упругого цилиндрического штампа на упругий слой с начальными (остаточными) напряжениями. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела. – Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины. – Киев, 2014.

Одной из важных и актуальных областей механики твердого деформированного тела является изучение проблемы передачи нагрузки в конструкциях путем их контактного взаимодействия, учитывая начальные

напряжения. Поэтому диссертация посвящена исследованию проблемы контактного взаимодействия предварительно напряженных тел, а именно: давлению упругого цилиндрического штампа и упругого слоя с начальными напряжениями. В работе рассмотрены случаи, когда: слой с начальными напряжениями лежит на жестком основании без трения; предварительно напряженный слой жестко соединен с недеформируемым основанием; предварительно напряженный слой лежит без трения на упругом основании с начальными напряжениями и без них. Предполагается, что начальные состояния в контактирующих телах однородны и равны.

Исследование выполнено в рамках линеаризированной теории упругости в общем виде для сжимаемых и несжимаемых тел как для теории больших начальных деформаций, так и для двух вариантов теории малых начальных деформаций в случае произвольной структуры упругого потенциала. Считаем, что упругие тела изготовлены из различных изотропных, трансверсально-изотропных или композитных материалов.

В диссертации дана постановка и решение осесимметричной статической задачи о давлении упругого цилиндрического штампа конечной длины с начальными напряжениями на предварительно напряженный слой, для которой сформулированы соответствующие граничные условия.

В рамках линеаризированной теории упругости общие соотношения напряженно-деформированного состояния упругих тел, которые находятся в контактном взаимодействии, выписаны с использованием отсчетного метода, который приведен в монографиях А.Н. Гузя. Построение аналитических решений для штампа и слоя с начальными напряжениями происходило с помощью методов разделения переменных (метод Фурье) и интегральных преобразований Ханкеля, соответственно. Также в работе использован метод решения парных интегральных уравнений с последующим их сведением к интегральному уравнению типа Фредгольма второго рода, решение которого найдено методом последовательных приближений. В последствии чего, задача сводится к решению бесконечной системы алгебраических уравнений, что решается методом редукции и средствами программного обеспечения.

Впервые получены решения для упругого цилиндра, упругого слоя и основы с начальными напряжениями, которые выражаются через бесконечную систему констант. Эти константы определяются из бесконечной квазирегулярной системы линейных алгебраических уравнений.

Изучено влияние начальных напряжений в слое и цилиндрическом штампе на распределение контактных напряжений и перемещений в области контакта. Приведены результаты численного анализа для потенциалов конкретной структуры (гармонический потенциал, потенциалы Бартенева–Хазановича, Трелоара), представленные в виде графиков, которые иллюстрируют достаточно значительно влияние начальных напряжений.

Выявлен механический эффект, который по аналогии соответствует ранее проведенным исследованиям академика А.Н. Гузя и профессора В.Б. Рудницкого, и заключается в том, что в случае, когда коэффициент

удлинения, приближается к значениям поверхностной неустойчивости материала, возникают явления резонансного характера как в упругом слое, так и в упругом штампе. Они заключаются в том, что напряжения и перемещения в телах, которые взаимодействуют, резко изменяются.

Предложены рекомендации по практическому использованию полученных результатов, а также выводы качественного и количественного характера, что дает возможность использования их в инженерных расчетах.

Ключевые слова: контактное взаимодействие, упругий цилиндрический штамп, упругий слой, начальные напряжения, линеаризованная теория упругости.

SUMMARY

Iaretska N. A. Pressure of elastic cylindrical die onto elastic layer with initial (residual) stresses. – Manuscript.

Dissertation for Degree of Candidate in Physical and Mathematical Sciences in Speciality 01.02.04 – Mechanics of Deformable Solids. – S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of National Academy of Sciences of Ukraine. – Kyiv, 2014.

The dissertation is devoted to the research of problems of contact interaction of prestressed bodies, namely: the pressure of an elastic cylinder die upon an elastic layer with initial stresses. The following cases are considered in the dissertation: a layer with initial stresses is rested on the rigid basis without friction; a layer with initial stresses is rigidly fixed to the underformed basis; a prestressed layer lies without friction on the basis of initial stresses or without them.

In general, the research was carried out for the theory of initial deformations and two variants of the theory of small initial deformations within the framework of linearized theory of elasticity with the elastic potential having arbitrary structure. The obtained solutions are expressed through the infinite system of constants. The latter are determined from the system of linear algebraic equations.

The research investigates the influence of initial stress on the contact interaction of an elastic cylindrical die and a layer on the basis of a particular structure potentials.

Key words: contact interaction, elastic cylindrical die, elastic layer, initial stresses, linearized theory of elasticity.

Підписано до друку 27.11.2014. Формат 30 × 42/4
Ум. друк. арк. – 0,9. Обл.-вид. арк. – 1,0
Наклад 100 прим. Зам. № 230/14, 2014

Редакційно-видавничий центр ХНУ
29016, м. Хмельницький, вул. Інститутська, 7/1
Свідоцтво про внесення в Державний реєстр,
серія ДК № 4489 від 18.02.2013 р.