

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

НАУКОВИЙ ВІСНИК УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Том 42 № 1

Ужгород 2023

УДК 51+001

Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика» / редкол.: М. М. Маляр (гол. ред.) та інші. Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2023. Т. 42, № 1. 232 с.

DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\)](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1)).

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Головний редактор — Маляр М. М., доктор техн. наук, професор (Україна).

Заст. головн. редактора — Сливка-Тилищак Г. І., доктор фіз.-мат. наук, доцент (Україна).

Відповідальний секретар — Андрашко Ю. В., канд. техн. наук, доц. (Україна).

Технічний секретар — Порохнавець І. М. (Україна).

Члени редакційної колегії: Бабич С. Ю. — д.т.н., проф. (Україна), Бовді В. А. — док. філ. з мат., проф. (ОАЕ), Бондаренко В. М. — д.ф.-м.н., проф. (Україна), Бортош М. Ю., к.ф.-м.н. (Україна), Гече Ф. Е. — д.т.н., проф. (Україна), Гуляницький Л. Ф. — д.т.н., с.н.с., член-кор. НАНУ (Україна), Зайченко Ю. П. — д.т.н., проф., академік АН ВШ (Україна), Капустян О. А. — д.ф.-м.н., с.н.с. (Україна), Кондрук Н. Е. — к.т.н., доц. (Україна), Король І. І. — д.ф.-м.н., доц. (Україна), Маринець В. В. — д.ф.-м.н., проф. (Україна), Маринець К. В. — к.ф.-м.н., доц. (Нідерланди), Моклячук М. П. — д.ф.-м.н., проф., академік АН ВШ (Україна), Мулеса П. П. — к.т.н., доц. (Україна), Поліщук В. В. — д.т.н., доц. (Україна), Рейтій О. К. — к.ф.-м.н., доц. (Україна), Ронто А. М. — д.ф.-м.н., проф. (Чехія), Семенова Н. В. — д.ф.-м.н., с.н.с. (Україна), Синявська О. О. — к.ф.-м.н., доц. (Україна), Снитюк В. Є. — д.т.н., проф. (Україна), Тилищак О. А. — д.ф.-м.н., доц. (Україна), Шаркаді М. М. — к.екон.н., доц. (Україна), Щобак Н. М. — к.ф.-м.н., проф. (Чехія).

Рекомендовано до друку: Редакційно-видавничою ДВНЗ "УжНУ" (протокол №3 від 2 травня 2023 р.), Вченою радою ДВНЗ "УжНУ" (протокол №5 від 4 травня 2023 р.)

Журнал включено в Перелік наукових фахових видань України (наказ МОН України №409 від 17.03.2020р.) Категорія: «Б». Спеціальності: 111 – Математика, 113 – Прикладна математика, 122 – Комп'ютерні науки, 124 – Системний аналіз та 126 – Інформаційні системи та технології.

Індексується в Index Copernicus. ICV 2021 = 78.86.

Свідцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Серія КВ №7972 від 9.10.2003 року, видане Державним комітетом телебачення і радіомовлення України.

Засновник і видавець – ДВНЗ «Ужгородський національний університет».

Виходить два рази на рік.

Збірник наукових праць видається з 1994 року.

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

Адреса редакційної колегії: Україна, 88000 Ужгород, вул. Університетська, 14, ФМЦТ. Тел. (факс): +380 (312) 642725, e-mail: visnyk-math@uzhnu.edu.ua.

© М. М. Маляр,

Ю. В. Андрашко, упорядкування, 2023

© Ужгородський національний університет,
2023

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

STATE UNIVERSITY
«UZHHOROD NATIONAL UNIVERSITY»

SCIENTIFIC BULLETIN OF UZHHOROD UNIVERSITY

Series of
MATHEMATICS AND INFORMATICS

Volume 42 No 1

Uzhhorod 2023

Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics / Edit.: M. Malyar (Chief edit.) and others. Uzhhorod: Publishing center of UzhNU «Hoverla», 2023. Vol. 42, No 1. 232 p.
DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\)](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1)).

EDITORIAL

Chief Editor — M. Malyar, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine).

Deputy Chief Editor — G. Slyvka-Tylyshchak, Dr. Sci. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine).

Responsible Secretary — Yu. Andrashko, Ph. D. (Tech.), As. prof. (Ukraine).

Technical Secretary — I. Porokhnavets (Ukraine).

Members: S. Babich, Dr. Sci. (Tech.). Prof. (Ukraine), V. Bovdi, Ph. D. (Math.), Prof. (UAE), V. Bondarenko, Dr. Sci. (Phys.-Math.). Prof. (Ukraine), M. Bortosh, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), F. Geche, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine), L. Huliannykyi, Dr. Sci. (Tech.), S.R.O., Academics (Ukraine), Yu. Zaichenko, Dr. Sci. (Tech.), Prof., Academics (Ukraine), O. Kapustyan, Dr. Sci. (Phys.-Math.), S.R.O. (Ukraine), N. Kondruk, Ph. D. (Tech.), As. prof. (Ukraine), I. Korol, Dr. Sci. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), V. Marynets, Dr. Sci. (Phys.-Math.). Prof. (Ukraine), K. Marynets, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Netherlands), M. Mokliachuk, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Academics (Ukraine), P. Mulesa, Ph. D. (Tech.), As. prof. (Ukraine), V. Polishchuk, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine), O. Reity, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), A. Ronto, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof. (Czech Republic), N. Semenova, Dr. Sci. (Phys.-Math.), S.R.O. (Ukraine), O. Syniavska, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), V. Snytyuk, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine), A. Tylyshchak, Dr. Sci. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), M. Sharkadi, Ph. D. (Econom.), As. prof. (Ukraine), N. Shchobak, Ph. D. (Phys.-Math.), Prof. (Czech Republic).

Recommended for publication at the meeting of the Editorial and Publishing Board of Uzhhorod National University (protocol No 3 of May 2, 2023) and at the meeting of the Scientific Council of Uzhhorod National University (protocol No 5 of May 4, 2023)

The journal is included in the List of Scientific Professional Species of Ukraine (Order of the MES Of Ukraine No 409 by November 15, 2020). Category: "B". Specialty: 111 – Mathematics, 113 – Applied Mathematics, 122 – Computer Science, 124 – System Analysis, 126 – Information Systems and Technologies.

Indexed in the Index Copernicus. ICV 2021 = 78.86.

Certificate of state registration number KV 7972 dated by September 9, 2003.

Founder and Publisher: State University "Uzhhorod National University".

Published twice a year.

The collection of scientific articles has been published since 1994.

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

Address of publishing house: FMDT, Universytetska str. 14, Uzhhorod, 88000, Ukraine, tel. (fax): +380 (312) 642725, e-mail: visnyk-math@uzhnu.edu.ua.

ЗМІСТ

Розділ 1: Математика і статистика

1. *Бондаренко В. М., Стойка М. В., Стъопочкіна М. В.* Про комбінаторні властивості частково впорядкованих множин надсуперкритичного MM -типу найменшого порядку 8
2. *Бондаренко В. М., Зубарук О. В.* Про алгебру Ауслендера над полем характеристики два комутативної нециклічної напівгрупи третього порядку без одиничного і нульового елементів 13
3. *Бортош М. Ю., Химинець М. В.* Розширені бінарні коди Голея за груповою алгеброю групи $S_3 \times D_8$ 19
4. *Божонок К. В.* Алгоритм поліноміальної апроксимації розв'язків нелінійного диференціального рівняння Абеля 25
5. *Гуртовий Ю. В., Єлькін В. І.* Стоячі хвилі в двошаровій обмеженій рідині 34
6. *Капустей М. М., Слюсарчук П. В., Боярищева Т. В.* Точність наближення в центральній граничній теоремі в термінах зрізаних псевдомоментів 46
7. *Курченко О. О., Синявська О. О.* Чотири теореми для диференційовних функцій кількох змінних 55
8. *Назаренко О. А., Стехун А. О., Яровий А. Т.* Дифракція пружних хвиль на сферичних дефектах 65
9. *Петрова Т. О., Петрова І. Л.* Узагальнення негативних результатів для інтерполяційного монотонного наближення функцій, що мають дробову похідну в просторі соболева з індексом $r \in (2, 3)$ 74
10. *Самарук Н. М.* Квазі-мономи відносно підгруп афінної групи простору 80
11. *Турчин Є. В.* Асиметричні аналоги узагальненого подвійного розподілу Ломакса: властивості та застосування 91

Розділ 2: Інформатика, комп'ютерні науки та прикладна математика

1. *Бабич С. Ю., Діхтярук М. М., Лазар В. Ф., Мальяр М. М.* Контактна задача для нескінченного пружного неоднорідного стрингера і двох смуг з початковими напруженнями 102
2. *Бабич С. Ю., Ярецька Н. О., Лазар В. Ф., Микоряк М. В.* Числовий розв'язок контактної задачі для попередньо напруженого циліндричного штампа та двох півпросторів з початковими напруженнями 116
3. *Бойко Н. І., Ткачик О. А.* Алгоритми та методи кластеризації для різноманітних даних 130
4. *Брила А. Ю., Кузка О. І., Погоріляк О. О.* Задача лексикографічної оптимізації з альтернативними критеріями та інтервальними обмеженнями допустимості 149
5. *Глагола В. Ю.* Синтез комбінованої нейромережевої моделі прогнозування 155
6. *Ічанська Н. В., Лисенко М. В.* Прогнозування видобутку нафти в Україні за допомогою адаптивних моделей 165
7. *Кириченко В. В., Лесіна Є. В.* Формальний розв'язок задачі Діріхле у кулі для неоднорідного ультрагіперболічного рівняння з поліноміальною правою частиною 175
8. *Кондрук Н. Е.* Аналіз технік зменшення розмірності в машинному навчанні 182
9. *Крилов Є. В., Нікітін В. А.* Використання транзакційного годинника для пришвидшення процесу узгодження даних в розподілених системах 189
10. *Мич І. А., Ніколенко В. В., Варцаба О. В.* Еквациональне описання функціонально неповних булевих алгебр 194
11. *Сабов Д. П., Шаркаді М. М.* Підходи щодо кластеризації криптовалют 202
12. *Симонов Д. І.* Конкурентні моделі розміщення центрів обслуговування клієнтів 209
13. *Червак-Смерічко О. Ю.* Лексикографічна згортка багатьох критеріїв як надкритерій їх паретівської згортки 217

CONTENTS

Chapter 1: Mathematics and Statistics

1. *Bondarenko V. M., Stoika M. V., Styopochkina M. V.* On combinatorial properties of the posets of oversupercritical MM -type of smallest order. 8
2. *Bondarenko V. M., Zubaruk O. V.* On the Auslander algebra over a field of characteristic two of the commutative noncyclic semigroup of third order without unit and zero elements 13
3. *Bortos M. Yu., Khymynets M. V.* Extended binary Golay codes by a group algebra of the group $C_3 \times D_8$ 19
4. *Bozhonok K. V.* Algorithm for the Polynomial Approximation of the Abel's Differential Equation Solutions. 25
5. *Hurtovyi Yu. V., Yelkin V. I.* Standing waves in a two-layer limited liquid 34
6. *Kapustey M. M., Slyusarchuk P. V., Boiaryshcheva T. V.* Exactness of an approximation in the central limit theorem in the term of axe middle pseudomoments 46
7. *Kurchenko O. O., Syniavska O. O.* Four theorems for differentiable functions of several variables 55
8. *Nazarenko O. A., Stekhun A. O., Yarovyi A. T.* The diffraction of elastic waves by spherical defects. 65
9. *Petrova T. O., Petrova I. L.* Generalization of negative results for interpolation monotone approximation of functions having a fractional derivative in sobolev space with index $r \in (2, 3)$ 74
10. *Samaruk N. M.* Quasi-monomials with respect to subgroups of the space affine group 80
11. *Turchyn I. V.* Skew Counterparts of the Generalized Double Lomax Distribution: Properties and Applications 91

Chapter 2: Informatics, Computer Science and Applied Mathematics

1. *Babich S. Yu., Dikhtyaruk M. M., Lazar V. F., Malyar M. M.* Contact problem for an infinite elastic inhomogeneous stringer and two strips with initial stresses . 102
2. *Babich S. Yu., Yaretska N. O., Lazar V. F., Mikoryak M. V.* Numerical solution of the contact problem for a pre-stressed cylindrical stamp and two half-spaces with initial stresses 116
3. *Boyko N. I., Tkachyk O. A.* Clustering algorithms and methods for diverse data . 130
4. *Bryla A. Yu., Kuzka O. I., Pohoriliak O. O.* The Lexicographic Optimization Problem with alternative criteria and interval admissibility conditions 149
5. *Hlahola V. Yu.* Synthesis of the combined neural network forecasting model 155
6. *Ichanska N. V., Lysenko M. V.* Oil Production Forecasting in Ukraine using Adaptive Models and Neural Networks. 165
7. *Kyrychenko V. V., Lesina E. V.* Formal solution of the Dirichlet problem in a ball for a non-homogeneous ultrahyperbolic equation with a polynomial right-hand part 175
8. *Kondruk N. E.* Analysis of Dimensionality Reduction Techniques in Machine Learning. 182
9. *Krylov E. V., Nikitin V. A.* Usage of transaction clock to speed up the data consistency process in distributed systems 189
10. *Mych I. A., Nikolenko V. V., Vartsaba O. V.* Equational description of functionally incomplete Boolean algebras. 194
11. *Sabov D. P., Sharkadi M. M.* Approaches to clusterization of cryptocurrencies . . . 202
12. *Symonov D. I.* Competitive models of placement of customer service centers 209
13. *Chervak-Smerichko O. Yu.* Lexicographic convolution of multiple criteria as a supercriterion of their paretian convolution 217

УДК 519.4

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).80-90](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).80-90)**Н. М. Самарук**

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Аспірантка Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника
samaruk.nat@khmnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4611-8528>

КВАЗИ-МОНОМИ ВІДНОСНО ПІДГРУП АФІННОЇ ГРУПИ ПРОСТОРУ

Нехай H — підгрупа просторової афінної групи $\text{Aff}(3)$, яка розглядається разом з природною дією на дійсному векторному просторі многочленів від трьох змінних. Сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ називається квазі-мономіальною відносно H , якщо групові оператори в двох різних базисах $x^m y^n z^k$ та $B_{m,n,k}(x, y, z)$ мають *ідентичні* матриці. В даній статті ми отримали критерій квазі-мономіальності для випадку, коли група H є підгрупою масштабувань або підгрупою паралельних перенесень в термінах експоненціальної породжуючої функції для сім'ї многочленів $B_{m,n,k}(x, y, z)$.

Ключові слова: квазі-мономи, афінна група простору, група масштабування, група паралельних перенесень, експоненціальна породжуюча функція.

1. Вступ. Нехай H є підгрупою просторової афінної групи $\text{Aff}(3)$, яка розглядається разом з природною дією на векторному просторі многочленів з трьома змінними. Сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ називається *квазі-мономіальною* відносно H , якщо оператори групи в двох різних базисах $x^m y^n z^k$ та $B_{m,n,k}(x, y, z)$ мають *ідентичні* матриці. У цьому випадку многочлени $B_{m,n,k}(x, y, z)$ називаються *квазі-мономами*. Останнім часом квазі-мономіальні сім'ї многочленів знайшли широке застосування в аналізі 2D та 3D зображень. Для розпізнавання та класифікації зображень за допомогою алгоритмів машинного навчання необхідно виділити такі *ознаки* зображень, які залишаються інваріантними при геометричних перетвореннях площини або простору. Такими перетвореннями є обертання, паралельні перенесення, масштабування та композиція цих перетворень, див. [1]. Відповідні інваріантні ознаки для 2D зображень були вперше представлені у статті [2] та називаються *геометричними моментними інваріантами*. Проте, ці моментні інваріанти конструювалися у стандартному поліноміальному базисі $\{x^m y^n\}$, що спричиняло практичні труднощі через обчислювальну нестабільність при роботі в дискретних областях, оскільки значення $x^m y^n$ швидко зростають зі збільшенням розміру зображення. Перехід до інших базисів, особливо до базисів із класичних дискретних ортогональних многочленів, вирішив проблему нестабільності. Але тепер виникла нова проблема знаходження явних виразів для моментних інваріантів, які змінилися із зміною базису. Знаходження виразів для моментних інваріантів в новому базису стикається з великими технічними труднощами і задовільно вирішується лише для деяких часткових випадків, див. [3].

Проте, відносно недавно, в статті [4] автори довели, що в базисі $\{H_m(x)H_n(y)\}$, де $H_n(x)$ — класичні ортогональні многочлени Ерміта, вирази для $SO(2)$ -інваріантних моментів виявилися ідентичними відомим виразам для $SO(2)$ -інваріантних геометричних моментів в базисі $\{x^m y^n\}$. Таким чином, ця

несподівана властивість многочленів Ерміта дозволила ефективно обчислювати моменти зображення, інваріантні відносно групи обертань площини $SO(2)$.

У статті [5] ці ідеї були розвинуті, і отримано повний опис усіх сімей многочленів в термінах їхніх породжуючих функцій, які володіють цією властивістю, яка була названа властивістю квазі-мономіальності відносно групи обертань площини $SO(2)$. У роботі [6] поняття квазі-мономіальності було поширено на довільну підгрупу H афінної групи площини $Aff(2)$, та отримано опис квазі-мономів для випадку, коли група H генерується масштабуванням та паралельними перенесеннями площини, а також їхніми композиціями, в тому числі з обертаннями.

У цій статті ми продовжуємо цей напрям досліджень і пропонуємо опис, всіх сімей многочленів від трьох змінних, які є квазі-мономіальними відносно підгруп масштабування та паралельних перенесень афінної групи простору $Aff(3)$. Випадок групи обертань простору розглядався в [7]. В статті встановлено необхідні і достатню умови, для того, щоб сім'я многочленів буде квазі-мономіальною відносно підгруп масштабування або паралельних перенесень. Крім того, ми встановлюємо умови, за яких нормування квазі-мономів зберігає властивість квазі-мономіальності.

2. Квазі-мономи відносно групи масштабування простору. Група масштабування простору є трипараметричною групою перетворень тривимірного простору, які масштабують координати точок незалежно за осями x, y та z відповідно до коефіцієнтів масштабування s, t та r . Масштабування може збільшувати або зменшувати об'ємні фігури та відстані між точками, але зберігає відносні пропорції фігур.

Формула для масштабування простору може бути записана як:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

де (x, y, z) — координати початкової точки, (x', y', z') — координати точки після масштабування, а s, t та r — коефіцієнти масштабування вздовж відповідних осей. Група масштабування простору діє операторами $T_{s,t,r}$ на функції таким чином:

$$T_{s,t,r}(f(x, y, z)) = f(sx, ty, rz), \quad s, t, r \in \mathbb{R}.$$

Зокрема, для мономів ми маємо

$$T_{s,t,r}(x^m y^n z^k) = t^m s^n r^k x^m y^n z^k.$$

Нас цікавлять сім'ї многочленів, на які оператори групи $T_{s,t,r}$ діють аналогічним чином.

Означення 1. Сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ називається квазі-мономіальною відносно групи масштабування простору, якщо дія групи на ці многочлени збігається з дією групи на стандартні мономи, тобто виконується тотожність

$$B_{m,n,k}(sx, ty, rz) = t^m s^n r^k B_{m,n,k}(x, y, z), \quad (1)$$

для всіх $s, t, r \in \mathbb{R}$.

Наступна теорема описує всі сім'ї многочленів які є квазі-мономіальними відносно групи масштабування простору в термінах породжуючої функції:

Теорема 1. Сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$, визначена експоненційною породжуючою функцією

$$G = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(x, y, z) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!},$$

буде квазі-мономіальною відносно групи масштабування простору тоді і тільки тоді коли G є функцією від трьох змінних xu, yv і zw :

$$G = G(xu, yv, zw).$$

Доведення. (\implies) Припустимо, що сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ задовольняє умову (1). Спочатку доведемо, що у цьому випадку многочлени $B_{m,n,k}(x, y, z)$ для всіх індексів m, n, k задовольняють таку систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial x} = m B_{m,n,k}(x, y, z), \\ y \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial y} = n B_{m,n,k}(x, y, z), \\ z \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial z} = k B_{m,n,k}(x, y, z). \end{cases}$$

Справді, продиференціюємо тотожність (1) по змінній s :

$$x \frac{\partial B_{m,n,k}(sx, ty, rz)}{\partial x} = m s^{m-1} t^n r^k B_{m,n,k}(x, y, z).$$

Поклавши $s = 1, t = 1, r = 1$ отримаємо

$$x \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial x} = m B_{m,n,k}(x, y, z).$$

Аналогічно, послідовними диференціюванням по t та по r виводяться друга та третя тотожності.

Враховуючи першу доведену тотожність, отримаємо

$$\begin{aligned} x \frac{\partial G}{\partial x} &= \sum_{m,n,k=0}^{\infty} \left(x \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial x} \right) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!} = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} m B_{m,n,k}(x, y, z) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!} = \\ &= u \sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(x, y, z) \frac{u^{m-1} v^n w^k}{(m-1)! n! k!} = u \frac{\partial G}{\partial u}. \end{aligned}$$

Аналогічно знаходимо, що мають місце рівняння

$$y \frac{\partial G}{\partial y} = v \frac{\partial G}{\partial v},$$

i

$$z \frac{\partial G}{\partial z} = w \frac{\partial G}{\partial w}.$$

Отже, породжуюча функція G задовольняє таку систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x \frac{\partial G}{\partial x} = u \frac{\partial G}{\partial u}, \\ y \frac{\partial G}{\partial y} = v \frac{\partial G}{\partial v}, \\ z \frac{\partial G}{\partial z} = w \frac{\partial G}{\partial w}. \end{cases} \quad (2)$$

Система з трьох диференціальних рівнянь, для функції від шести змінних, не може мати більше трьох функціонально незалежних розв'язків, див. [8]. Однак, xu, yv і zw є очевидно є функціонально незалежними розв'язками. Отже, G повинна бути функцією лише від змінних xu, yv і zw .

(\Leftarrow) Тепер доведемо зворотну імплікацію. Нехай

$$G(x, y, z, u, v, w) = G(xu, yv, zw).$$

Доведемо, що $B_{m,n,k}(x, y, z)$ задовольняє умову (1):

$$B_{m,n,k}(sx, ty, rz) = t^m s^n r^k B_{m,n,k}(x, y, z).$$

Зауважимо, що, оскільки

$$G(sxu, tyv, rzv) = G(x(su), y(tv), z(rw)),$$

то функція G задовольняє тотожність

$$G(sx, ty, rz, u, v, w) = G(x, y, z, su, tv, rw).$$

Тепер, з одного боку ми маємо

$$G(sx, ty, rz, u, v, w) = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(sx, ty, rz) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!},$$

а з іншого боку:

$$G(sx, ty, rz, u, v, w) = G(x, y, z, su, tv, rw) = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(x, y, z) \frac{(su)^m (tv)^n (rw)^k}{m! n! k!}.$$

Порівнюючи ліву і праву частини отримуємо

$$\sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(sx, ty, rz) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!} = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(x, y, z) \frac{(su)^m (tv)^n (rw)^k}{m! n! k!}.$$

Прирівнявши коефіцієнти біля однакових степенів u і v , знаходимо, що

$$B_{m,n,k}(sx, ty, rz) = t^m s^n r^k B_{m,n,k}(x, y, z),$$

як і вимагалось.

□

2.1. Квазімономи відносно групи рівномірних масштабувань. Розглянемо частковий випадок групи *рівномірних* масштабувань простору, тобто таких перетворень простору

$$\begin{cases} x' = sx, \\ y' = sy, \\ z' = sz. \end{cases}$$

Многочлени $B_{m,n,k}(x, y, z)$ назвемо квазімономами відносно групи рівномірних розтягів, якщо виконується тотожність:

$$B_{m,n}(sx, sy, sz) = s^{m+n+k} B_{m,n,k}(x, y, z).$$

Наступна теорема дає повний опис таких многочленів у термінах породжуючих функцій.

Теорема 2. *Сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ визначена експоненціальною породжуючою функцією*

$$G = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(x, y, z) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!},$$

буде квазі-мономіальною відносно групи рівномірних розтягів простору тоді і тільки тоді коли G є функцією від змінних $\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, ux, vx, wx$:

$$G = G\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, ux, vx, wx\right).$$

Доведення. (\implies) Диференціюючи по s тотожність

$$B_{m,n}(sx, sy, sz) = s^{m+n+k} B_{m,n,k}(x, y, z),$$

і поклавши $s = 1$ отримуємо таке диференціальне рівняння

$$x \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial x} + y \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial y} + z \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial z} = (m + n + k) B_{m,n,k}(x, y, z).$$

Тоді, аналогічно як при доведенні Теорема 1 знаходимо, що породжуюча функція G задовольняє таке рівняння

$$x \frac{\partial G}{\partial x} + y \frac{\partial G}{\partial y} + z \frac{\partial G}{\partial z} = u \frac{\partial G}{\partial u} + v \frac{\partial G}{\partial v} + w \frac{\partial G}{\partial w}.$$

Це рівняння не може мати більше п'яти функціонально незалежних розв'язків, які ми можемо вказати явно: $\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, ux, vx, wx$. Тому, породжуюча функція є функцією від змінних $\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, ux, vx, wx$.

Достатність доводиться аналогічно як в Теоремі 1.

□

3. Квазі-многочлени відносно групи паралельних перенесень простору. Трипараметрична група трансляцій простору породжується паралельними перенесеннями такої форми

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b, \\ z' = z + c. \end{cases}$$

Ця група діє на функції операторами зсуву $T_{a,b,c}$ наступним чином:

$$T_{a,b,c}(f(x, y, z)) = f(x + a, y + b, z + c), a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Оскільки

$$(x + a)^m (y + b)^n (z + c)^k = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{l=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{j} \binom{k}{l} x^i y^j z^l a^{m-i} b^{n-j} c^{k-l},$$

то ми приходимо до такого означення

Означення 2. Сім'я многочленів $\{B_{m,n}(x, y)\}$ називається квазі-мономіальною відносно групи паралельних перенесень простору, якщо виконується наступна тотожність

$$B_{m,n,k}(x + a, y + b, z + c) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{l=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{j} \binom{k}{l} a^{m-i} b^{n-j} c^{k-l} B_{i,j,l}(x, y, z), \quad (3)$$

для всіх $m, n, k \in \mathbb{N}$.

Наступна теорема дає простий критерій квазі-мономіальності сім'ї многочленів у термінах її експоненціальної породжуючої функції.

Теорема 3. Сім'я многочленів $B_{m,n,k}(x, y, z)$ є квазі-мономіальною сім'єю відносно групи паралельних перенесень простору тоді і тільки тоді, коли її експоненціальна породжуюча функція має вигляд

$$G = C(u, v, w)e^{xu+yv+zw},$$

де $C(u, v, w)$ — довільний степеневий ряд від змінних u, v, w .

Доведення. (\implies) Спочатку диференціюємо (3) по a при $a = 0$ та $b = 0$, $c = 0$. Отримуємо диференціальне рівняння на $B_{m,n,k}(x, y, z)$:

$$\frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial x} = m B_{m-1,n,k}(x, y, z).$$

Аналогічно, диференціюючи по b та по c , отримуємо два інших диференціальних рівняння на $B_{m,n,k}(x, y, z)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial y} &= n B_{m,n-1,k}(x, y, z), \\ \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial z} &= k B_{m,n,k-1}(x, y, z). \end{aligned}$$

Взявши до уваги першу тотожність ми маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x} &= \sum_{m,n,k=0}^{\infty} \left(\frac{\partial B_{m,n,k}(x,y,z)}{\partial x} \right) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!} = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} m B_{m-1,n,k}(x,y,z) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!} = \\ &= u \sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m-1,n,k}(x,y,z) \frac{u^{m-1} v^n w^k}{(m-1)! n! k!} = u \sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(x,y,z) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!} = uG. \end{aligned}$$

Аналогічно отримаємо, що

$$\frac{\partial G}{\partial y} = vG \text{ і } \frac{\partial G}{\partial z} = wG.$$

Отже, G задовольняє таку систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial x} = uG, \\ \frac{\partial G}{\partial y} = vG, \\ \frac{\partial G}{\partial z} = wG, \end{cases} \quad (4)$$

Ця проста система диференціальних рівнянь першого порядку має такий розв'язок

$$G = C(u, v, w)e^{xu+yv+zw},$$

де C — довільна функція від u, v, w . Оскільки G є степеневим рядом, то $C(u, v, w)$ також степеневий ряд від змінних u, v, w .

⇐ Припустимо тепер, що породжуюча функція для сім'ї многочленів $B_{m,n,k}(x, y, z)$ має вигляд

$$G = C(u, v, w)e^{xu+yv+zw}.$$

Для оператора зсуву маємо

$$T_{a,b,c}(xu + yv + zw) = au + vb + cw + ux + vy + zw.$$

З одного боку,

$$\begin{aligned} T_{a,b,c}(G) &= T_{a,b,c} \left(\sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(x,y,z) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!} \right) = \\ &= \sum_{m,n,k=0}^{\infty} T_{a,b,c}(B_{m,n,k}(x,y,z)) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!}. \end{aligned}$$

З іншого боку

$$\begin{aligned} T_{a,b,c}(G) &= C(u, v, w)T_{a,b,c}(e^{xu+yv+zw}) = C(u, v, w)e^{au+vb+cw+ux+vy+zw} = \\ &= e^{au+vb+cw}G = \left(\sum_{i,j,l=0}^{\infty} a^i b^j c^l \frac{u^i v^j w^l}{i! j! l!} \right) \left(\sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(x,y,z) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!} \right) = \\ &= \sum_{m,n,k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{l=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{j} \binom{k}{l} a^{m-i} b^{n-j} c^{k-l} B_{i,j,l}(x,y,z) \right) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!}. \end{aligned}$$

Порівнюючи коефіцієнти однакових степенів u та v , ми отримуємо, що

$$T_{a,b,c}(B_{m,n,k}(x, y, z)) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{l=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{j} \binom{k}{l} a^{m-i} b^{n-j} c^{k-l} B_{i,j,l}(x, y, z).$$

Отже, многочлени $B_{m,n,k}(x, y, z)$ є квазі-мономами відносно групи паралельних перенесень простору. \square

Властивість квазі-мономіальності може зникнути, якщо многочлени нормалізуються, тобто множаться на деякі константи. Нормалізація часто використовується для обмеження допустимого діапазону значень многочленів при обчисленнях. Наступна теорема встановлює, який тип нормалізації зберігає властивість квазі-мономіальності.

Теорема 4. *Нехай $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ – квазі-мономіальна сім'я відносно групи паралельних перенесень простору. Сім'я $\{\tilde{B}_{m,n}(x, y)\}$, де*

$$\tilde{B}_{m,n,k}(x, y, z) = \alpha_{m,n,k} B_{m,n,k}(x, y, z),$$

буде квазі-мономіальною відносно групи паралельних перенесень простору тоді і тільки тоді, коли кожний коефіцієнт $\alpha_{m,n,k}$ є функцією ϕ , від однієї змінної $m + n + k$, яка задовольняє таке рекурентне співвідношення:

$$\phi(m + n + k) = \phi(m + n + k - 1).$$

Доведення. (\implies) Оскільки виконується

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{B}_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial x} &= m \tilde{B}_{m-1,n,k}(x, y, z), \\ \frac{\partial \tilde{B}_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial y} &= n \tilde{B}_{m,n-1}(x, y, z), \\ \frac{\partial \tilde{B}_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial z} &= k \tilde{B}_{m,n,k-1}(x, y, z), \end{aligned}$$

то ми маємо

$$\begin{aligned} \alpha_{m,n,k} \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial x} &= m \alpha_{m-1,n,k} B_{m-1,n,k}(x, y, z), \\ \alpha_{m,n,k} \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial y} &= n \alpha_{m,n-1,k} B_{m,n-1,k}(x, y, z), \\ \alpha_{m,n,k} \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial z} &= k \alpha_{m,n,k-1} B_{m,n,k-1}(x, y, z), \end{aligned}$$

Ми отримуємо наступну систему рекурентних рівнянь для послідовності $\alpha_{m,n}$:

$$\begin{cases} \alpha_{m-1,n,k} = \alpha_{m,n,k}, \\ \alpha_{m,n-1,k} = \alpha_{m,n,k}, \\ \alpha_{m,n,k-1} = \alpha_{m,n,k}. \end{cases}$$

Легко помітити, що розв'язок системи має вигляд $\alpha_{m,n,k} = \phi(m+n+k)$, де ϕ — довільна функція. Справді, розглянемо довільний індекс (m, n, k) . Ми можемо досягти індексу $(0, 0, m+n+k)$ через послідовність перетворень, як показано нижче. Спочатку зменшуємо m , збільшуючи n , доки $m = 0$: $\alpha_{0,n+m,k} = \alpha_{m,n,k}$. Потім зменшуємо n , збільшуючи k , доки $n = 0$: $\alpha_{0,0,m+n+k} = \alpha_{0,n+m,k}$.

В результаті маємо:

$$\alpha_{m,n,k} = \alpha_{0,n+m,k} = \alpha_{0,0,m+n+k}.$$

Тепер можемо визначити функцію $\phi(x) = \alpha_{0,0,x}$. Тоді $\alpha_{m,n,k} = \phi(m+n+k)$, що показує, що будь-який розв'язок системи є функцією однієї змінної, $m+n+k$.

Підставимо розв'язок $\alpha_{m,n,k} = \phi(m+n+k)$ у перше рівняння і отримуємо необхідне рекурентне співвідношення $\phi(m+n+k) = \phi(m+n+k-1)$.

(\Leftarrow) Тепер доведемо обернену імплікацію. Нехай $\alpha_{m,n,k} = \phi(m+n+k)$ і $\phi(m+n+k) = \phi(m+n+k-1)$, тоді очевидно виконуються умови

$$\begin{cases} \alpha_{m-1,n,k} = \alpha_{m,n,k}, \\ \alpha_{m,n-1,k} = \alpha_{m,n,k}, \\ \alpha_{m,n,k-1} = \alpha_{m,n,k}. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{B}_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial x} &= \alpha_{m,n,k} \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial x} = \\ &= m\alpha_{m-1,n,k} B_{m-1,n,k}(x, y, z) = m\tilde{B}_{m-1,n,k}(x, y, z). \end{aligned}$$

Аналогічно отримуємо

$$\frac{\partial \tilde{B}_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial y} = n\tilde{B}_{m,n-1,k}(x, y, z) \text{ і } \frac{\partial \tilde{B}_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial z} = k\tilde{B}_{m,n,k-1}(x, y, z).$$

Отже, породжуюча функція для сім'ї многочленів $\tilde{B}_{m,n,k}(x, y, z)$ задовольняє умови Теорема 3 і сім'я многочленів $\tilde{B}_{m,n,k}(x, y, z)$ буде квазі-мономіальною відносно групи паралельних перенесень простору. □

3.1. Рівномірні паралельні перенесення. Для часткового випадку рівномірних паралельних перенесень $T_{a,a,a} = T_a$:

$$T_a(x) = x + a, T_a(y) = y + a, T_a(z) = z + a,$$

справедливе наступне твердження:

Теорема 5. Сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ буде квазі-мономіальною відносно групи рівномірних паралельних перенесень тоді і тільки тоді коли її експоненціальна породжуюча функція має вигляд

$$C(x-y, x-z, u, v, w)e^{xu+yv+zw},$$

де C — довільний степеневий ряд від змінних $x-y, x-z, u, v, w$.

Доведення. Умова квазімономіальності (3) прийме вигляд

$$\begin{aligned} & B_{m,n,k}(x+a, y+a, z+a)(x, y, z) = \\ & = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{l=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{j} \binom{k}{l} a^{m+n+k-i-j-l} B_{i,j,l}(x, y, z), \end{aligned}$$

для всіх $m, n, k \in \mathbb{N}$.

Диференціюємо цю тотожність по a в $a = 0$ знаходимо

$$\begin{aligned} & \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial z} = \\ & = mB_{m-1,n,k}(x, y, z) + nB_{m,n-1,k}(x, y, z) + kB_{m,n,k-1}(x, y, z). \end{aligned}$$

Аналогічно отримаємо диференціальне рівняння на породжуючу функцію

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} = (u + v + w)G.$$

Можна показати, що розв'язок цього рівняння має вигляд

$$G = C(x - y, x - z, u, v, w)e^{xu+yv+zw}.$$

Достатність доводиться аналогічно доведенню достатності в Теоремі 3. \square

Виникає природне питання — чи існують сім'ї многочленів, які є квазі-мономіальними одночасно відносно групи масштабування і відносно групи паралельних перенесень? Породжуюча функція для таких многочленів мала би бути одночасним розв'язком систем диференціальних рівнянь (2) і (4). Можна показати, що єдиним розв'язком цих систем рівнянь, з точністю до сталого множника, є функція $e^{xu+yv+zw}$. Але вона є експоненціальною породжуючою функцією стандартних мономів $x^m y^n z^k$ і ми не отримуємо ніяких нових сімей многочленів.

4. Висновки. У статті досліджено квазі-мономіальні сім'ї многочленів від трьох змінних, які є інваріантними відносно підгруп масштабування та паралельних перенесень афінної групи простору $\text{Aff}(3)$. Встановлено необхідні і достатні умови, щоб сім'я многочленів була квазі-мономіальною відносно цих підгруп. Ми також розглянули умови, за яких нормування квазі-мономів зберігає властивість квазі-мономіальності. Хоча отримані результати містять самостійний математичний інтерес, вони можуть бути використані для розвитку алгоритмів машинного навчання для розпізнавання та класифікації зображень, що залишаються інваріантними при геометричних перетвореннях площини або простору. В майбутньому можна провести дослідження властивостей квазі-мономіальних сімей многочленів відносно інших підгруп афінної групи простору.

Список використаної літератури

1. Flusser J., Suk T., Zitová B. 2D and 3D Image Analysis by Moments. John Wiley and Sons, 2017.
2. Hu M. K. Visual pattern recognition by moment invariants. *IRE Transactions on Information Theory*. 1962. Vol. 8, No. 2. P. 179–187.

3. Chong C.-W., Raveendran P., Mukundan R. Translation and scale invariants of Legendre moments. *Pattern Recognition*. 2004. Vol. 37, No. 1. P. 119–129.
4. Yang B., Li G., Zhang H., Dai M. Rotation and translation invariants of Gaussian-Hermite moments. *Pattern Recognition Letters*. 2011. Vol. 32, No. 2. P. 1283–1298.
5. Bedratyuk L., Flusser J., Suk T., Kostkova J., Kautsky J. Non-separable rotation moment invariants. *Pattern Recognition*. 2022. Vol. 127. P. 108–607.
6. Samaruk N. M. Quasi-monomials with respect to subgroups of the plane affine group. *Matematychni Studii*. 2022. Vol. 59, No. 1. P. 3–11.
7. Flusser J., Suk T., Bedratyuk L., Karella T. Non-separable moments in 3D. In: *20th International Conference on Computer Analysis of Images and Patterns (CAIP)*, Limassol, Cyprus, September 25–30, 2023.
8. Kamke E. *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen: II. Partielle Differentialgleichungen Erster Ordnung für eine Gesuchte Funktion* : Teubner Verlag, 1979.

Samaruk N. M. Quasi-monomials with respect to subgroups of the space affine group.

Let H be a subgroup of the space affine group $\text{Aff}(3)$ considered with the natural action on the real vector space of three variable polynomials. The polynomial family $\{B_{m,n,k}(x,y,z)\}$ is called quasi-monomial with respect to H if the group operators in two different bases $\{x^m y^n z^k\}$ and $\{B_{m,n,k}(x,y,z)\}$ have *identical* matrices. We obtain a criterion of quasi-monomiality for the case when the group H is generated by scaling and translations in terms of exponential generating function for the polynomial family $\{B_{m,n,k}(x,y,z)\}$.

Keywords: quasi-monomials, space affine group, scaling group, translation group, exponential generating function.

References

1. Flusser, J., Suk, T., & Zitová, B. (2017). *2D and 3D Image Analysis by Moments*. John Wiley and Sons.
2. Hu, M. K. (1962). Visual pattern recognition by moment invariants. *IRE Trans. Inform. Theory*, 8(2), 179–187.
3. Chong, C. W., Raveendran, P., & Mukundan, R. (2004). Translation and scale invariants of Legendre moments. *Pattern Recognition*, 37(1), 119–129.
4. Yang, B., Li, G., Zhang, H., & Dai, M. (2011). Rotation and translation invariants of Gaussian-Hermite moments. *Pattern Recognition Letters*, 32(2), 1283–1298.
5. Bedratyuk, L., Flusser, J., Suk, T., Kostkova, J. & Kautsky, J. (2022). Non-separable rotation moment invariants. *Pattern Recognition*, 127, 108–607.
6. Samaruk, N. M. (2022). Quasi-monomials with respect to subgroups of the plane affine group. *Matematychni Studii*, 59(1), 3–11.
7. Flusser, J., Suk, T., Bedratyuk, L., & Karella, T. (2023). Non-separable moments in 3D. In: *20th International Conference on Computer Analysis of Images and Patterns (CAIP)*, Limassol, Cyprus.
8. Kamke, E. (1979). *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen: II. Partielle Differentialgleichungen Erster Ordnung für eine Gesuchte Funktion*. Teubner Verlag.

Одержано 30.04.2023

Збірник наукових праць

**НАУКОВИЙ ВІСНИК
УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Том 42 №1

2023

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

М. М. Маляр (головний редактор), Г. І. Сливка-Тилищак (заст. головн. редактора),
Ю. В. Андрашко (відповідальний секретар), І. М. Порохнавець (технічний
секретар), С. Ю. Бабич, В. А. Бовді, В. М. Бондаренко, М. Ю. Бортош, Ф. Е. Гече,
Л. Ф. Гуляницький, Ю. П. Зайченко, О. А. Капустян, Н. Е. Кондрук, І. І. Король,
В. В. Маринець, К. В. Маринець, М. П. Моклячук, П. П. Мулеса, В. В. Поліщук,
О. К. Рейтій, А. М. Ронто, Н. В. Семенова, О. О. Синявська, В. Є. Снитюк,
О. А. Тилищак, М. М. Шаркаді, Н. М. Щобак.

Адреса редакційної колегії: 88000, м. Ужгород, вул. Університетська, 14,
деканат ФМЦТ: редакція збірника наукових праць «Науковий вісник Ужгородського
університету».

Серія «Математика і інформатика».

Тел. +380 (312) 642725

E-mail: visnyk-math@uzhnu.edu.ua