УДК 621.002

А.В. ГОРОШКО, В.П. РОЙЗМАН
Хмельницький національний університет

МЕТОДИ ОБРОБКИ ЕМПІРИЧНИХ ДАНИХ, ЩО ПІДПОРЯДКОВУЮТЬСЯ БАГАТОМОДАЛЬНИМ ЗАКОНАМ РОЗПОДІЛУ

Показано, що в багатьох практичних задачах емпіричні дані підпорядковуються багатомодальним законам розподілу ймовірностей. Запропоновано алгоритм побудови гістограм розподілу емпіричних даних, параметричний метод побудови емпіричних законів розподілу з урахуванням їх багатомодальності та метод визначення обґрунтованих допустимих значень досліджуваних параметрів.

Ключові слова: статистика, багатомодальність, густина розподілу, довірчі інтервали, допуски.

ANDRII VOLODYMYROVYCH GOROSHKO, VULEN PETROVYCH ROYZMAN
Khmelnytskiy National University, Ukraine

PROCESSING METHODOLOGY OF EMPIRICAL DATA, UNDER THE AUTHORITY OF THE LAW MULTIMODAL DISTRIBUTIONS

Abstract - The aim of the work presented in the research was the development of new methods and algorithms of empirical data, multimodal obeys the laws of probability distributions. The authors show examples of practical applications that require determination of the parameters of such laws and their subsequent processing. An algorithm for constructing histograms with a reasonable choice of the histogram step. A method of constructing empirical laws of distribution of random variables, based on the concept of the law of the multimodal probability distribution as a superposition of unimodal distribution laws and its subsequent cleavage. A new method for the appointment of allowed values of the parameter study with a certain reliability, using a function of the standard normal distribution table assignment cumulative distribution function. The method is universal, and as a special case can be applied to a unimodal (eg, normal) distribution law. The developed methods of statistical data used successfully for the splitting of mixture and determine the unknown parameters of the multimodal distribution of the measured functional imbalances compressor rotor aircraft engine AI-20 after the operation.

Keywords: statistics, multimodal, density distribution, confidence intervals, tolerance.

Вступ

Через об'єктивні і суб'єктивні причини виміряні на реальному об'єкті параметри, які характеризують якість роботи приладів, апаратури, властивості матеріалів тощо, як правило, мають розкид значень, тобто можуть набувати довільних значень у деяких числових інтервалах. Ця обставина дозволяє приймати їх за випадкові величини, що підкоряються деяким законам розподілу. Маючи дані про реалізацію цих випадкових величин, можна більш-менш точно оцінити їх істинні значення, наприклад методом довірчих інтервалів.

Так, проблему дослідження законів розподілу доводиться вирішувати при ідентифікації технологічних процесів [1], розробці нормативної документації, контролі якості продукції, що випускається [2, 3], прогнозуванні ресурсу виробів, і в низці інших задач забезпечення якості виробів, де значення контрольованих величин визначають, випробовуючи дослідні зразки з наступною обробкою експериментальних матеріалів методами математичної статистики [4].

Найбільш загальною задачею математичної статистики є вибір статистичної моделі розподілу досліджуваних ознак, що містить оцінку невідомих законів розподілу та їх параметрів, перевірка статистичних гіпотез і т.д. Метою побудови статистичної моделі є представлення даних спостережень шляхом підбору апроксимуючого розподілу. Історично склалося так, що нормальний розподіл вважався майже всеосяжною статистичною моделлю через досить загальні умови його появи [5]. Тому переважна більшість статистичних критеріїв, методів і оцінок розроблені саме для цього випадку.

Між тим, такий стан речей не завжди відповідає дійсності. Так, наприклад, в [6] вказується, що нормальний закон розподілу похибок насправді може бути отриманий тільки при виконанні великої кількості умов: у вибірці представлена одна партія виробів, немає домінуючих причин виникнення похибок, кількість випадкових факторів, які обумовлюють виникнення похибок, незмінно в часі, всі випадкові фактори є взаємонезалежними і т.д.

Проведені авторами вивчення гістограм, побудованих за результатами вимірювань руйнуючого зусилля деякої досить великої кількості однотипних резисторів, показало, що закон розподілу не одномодальний і має чітко виражену багатовершинну гістограму (рис. 1). Тільки вивчивши процес виробництва цих резисторів, стало можливим пояснити причини появи багатомодальності [7]. Виявилося, що резистори одного і того ж типу виготовляються на заводі на декількох однотипних лініях, кожна з яких має специфічні похибки виготовлення. Вироблені на всіх лініях деталі сортують за радіотехнічними ознаками. При цьому в одну партію резисторів, відібраних за однаковою радіотехнічною надійністю, потрапляють деталі, виготовлені на різних лініях, і вони при механічних випробуваннях утворюють стільки однотипних за механічними властивостями груп, скільки різноманітних ліній брали участь у їх виготовленні. Дослідження резисторів з однієї партії показали чітко виражений одномодальний розподіл.

Аналогічно, проведені авторами вивчення гістограм, побудованих за результатами вимірювань дисбалансів досить великої кількості однотипних роторів авіадвигунів після виготовлення або після експлуатації, показали, що густина розподілу ймовірностей (надалі ГР) добре наближається одновершинною кривою лише після виготовлення і складання в ідентичних умовах, а експлуатаційних – в однакових умовах експлуатації. Дисбаланси ж однотипних роторів, викликані, наприклад, різними виробничими чи експлуатаційними причинами, мають чітко виражені багатовершинні гістограми (рис. 2). Причини багатомодальності розподілу виміряних дисбалансів у наведеному прикладі детально викладені у [7]. Наприклад, одні авіадвигуни з досліджуваної партії працювали на літаках в умовах Крайньої Півночі, інші – в умовах польових, погано обладнаних аеродромів Півдня, треті – в умовах великих перепадів температур при перельотах з Північної півкулі у Південну, четверті – у морських, корозійних умовах і т.п. Тому поява експлуатаційних дисбалансів роторів першого типу викликано в основному попаданням у двигун мілких частинок льоду і снігу, у роторів другого типу – попаданням мілких камінців та інших твердих частинок, третій тип дисбалансу викликаний в основному температурними процесами, четвертий – корозійними і т.п. таким чином, однорідна у вихідному стані вибірка роторів в процесі експлуатації розпадається на декілька підвибірок, кожна із яких об’єднана типом домінуючої причини, яка викликає появу експлуатаційного дисбалансу, і, потрапляючи на завод, наприклад, для між ресурсного ремонту, ці ротори утворюють партії з багатомодальними законами розподілу дисбалансів. З цієї ж причини гістограми розподілу границі втоми лопаток таких авіадвигунів теж багатомодальні.

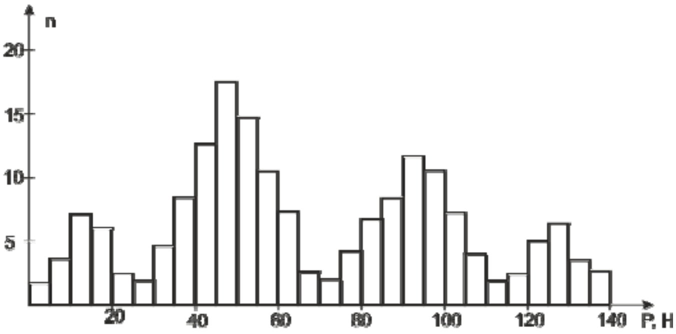

Рис. 1. Гістограма руйнуючих зусиль кераміки резисторів ОМЛТ

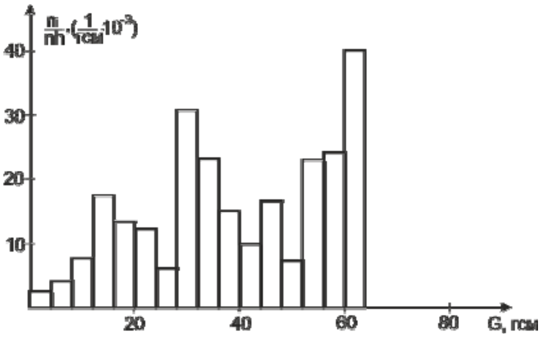

Рис. 2. Розподіл дисбалансів ротора компресора при низькочастотному балансуванні для лівої опори, побудована за вибіркою з 252 роторів

Зауважимо, що далеко не завжди причини, що викликають розкид значень досліджуваного параметра, очевидні і можуть бути знайдені. Тому виникає проблема пошуку методів обробки таких багатомодальних емпіричних законів розподілу.

Математично багатомодальні закони розподілу, які називають сумішами функцій розподілу, можна описати наступним чином [8]. Нехай у наведеному вище прикладі розподілу дисбалансів роторів компресорів авіадвигунів кількість умов експлуатації, які формують домінуючі причини появи підвибірок, дорівнює N, імовірність того, що авіадвигун експлуатувався у i-й експлуатаційній умові дорівнює ρ_i ($i=1,2,...,N$; $\sum_{i=1}^{N}\rho_i=1$), дисбаланс авіадвигуна є випадковою величиною з ГР $f_i\left(x, M_i, S_i\right),\ x\in\mathbb{R}$, де M_i і S_i – математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення i-ї підвибірки. Маємо випадкову величину X; про умови досліду, в результаті якого вона набуває певне значення, можна утворити N взаємовиключних гіпотез: $H_1, H_2, ..., H_N$. Імовірності гіпотез відомі:

$$P(H_i)=\rho_i \qquad (i=1,2,...,N;\ \sum_{i=1}^{N}\rho_i=1). \tag{1}$$

Якщо має місце гіпотеза H_i, функція розподілу X дорівнює $F_i(x)$. Знайдемо повну («усереднену») функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X з врахуванням випадковості її закону розподілу.

За визначенням

$$F(x)=P\left\{X<x\right\}. \tag{2}$$

Знайдемо цю імовірність за формулою повної імовірності з гіпотезами $H_1, H_2, ..., H_N$:

$$F(x)=\sum_{i=1}^{N}P(H_i)F_i(x)=\sum_{i=1}^{N}\rho_i F_i(x),\ \ x\in\mathbb{R}, \tag{3}$$

де функції розподілу $F_i(x)$ називають компонентами суміші, а ρ_i – вагами відповідних компонент.

Дискретній суміші розподілів $F(x)$ відповідає дискретна ГР

$$f\left(x\right)=\sum_{i=1}^{N}\rho_i f_i\left(x,M_i,S_i\right),\quad x\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

У роботах [6, 9–11] представлені види багатомодальних розподілів і розв’язується задача визначення виду і параметрів результуючої кривої за заданими видами і параметрами складових законів розподілу. Однак при побудові статистичних моделей розподілу важливішою є зворотна задача – операція розділення (розщеплення) сумішей, оскільки структура отриманих при вибіркових спостереженнях даних, як правило, невідома. Це задача визначення кількості, частки і параметрів кожної із підвибірок (партій, що змішуються) в загальній виборці (змішаному розподілі). Проведений авторами огляд [7] відомих підходів до вирішення таких задач показав їх недоліки і, незважаючи на високу теоретичні цінність, при вирішенні практичних завдань їх важко застосувати, оскільки суміші ГР, як правило, задаються не графіками, а деякими кінцевими вибірками реалізацій випадкової величини, які подаються в зручному для обробки вигляді, наприклад, у вигляді гістограми. Сама по собі гістограма дає можливість прогнозувати величину досліджуваного параметра лише на обмеженому інтервалі. Для побудови статистичної моделі розподілу і обґрунтованого прогнозування в області малих імовірностей необхідно наблизити її деякою аналітичною функцією з продовженням останньої на числову вісь. Отже, вибір статистичної моделі розподілу визначається видом гістограми, який, у свою чергу, залежить від способу її побудови, і, особливо, від обраного кроку інтервалу значень.

Рекомендації щодо вибору кроку розбиття інтервалу значень досліджуваної випадкової величини, які є в літературі з теорії ймовірностей і математичної статистики, носять чисто емпіричний характер (наприклад, правило Штюргеса) [8, 12].

Постановка завдання

Проведений авторами аналіз показав, що існуючі підходи та методи вирішення задачі обробки статистичних даних, які підкоряються багатомодальним законам розподілу, мають суттєві недоліки, що обмежує їх застосування в задачах обробки емпіричних даних. У зв'язку з цим вимагають розробки методи обробки таких даних. Поряд з вирішенням проблеми розділення сумішей розподілів випадкових величин потребують вирішення й інші завдання, зокрема забезпечення стійкості рішень, створення методів побудови гістограм.

Результати досліджень

Суть запропонованого авторами імовірнісного методу обробки експериментальних даних, що підкоряються багатомодальним законам розподілу, полягає у наступному. Нехай деякий параметр об'єкта розглядається як випадкова величина X, кожна вибірка реалізацій якої може бути представлена у вигляді об'єднання N підвибірок. При цьому кожна підвибірка є вибіркою x_i із генеральної сукупності реалізацій випадкової величини з ГР $f_i\left(x,M_i,\sigma_i\right)$, де M_i і S_i - математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення i-ї підвибірки.

Якщо імовірність того, що X приймає значення, яке належить x_i, дорівнює ρ_i, то для наступної обробки статистичних даних пропонується ГР X представляти лінійною комбінацією виду (4), в якій ГР f_i – одномодальні, а $\rho_i\ge 0$, $i=1,2,...,N$ і пов’язані умовою $\sum_{i=1}^{N}\rho_i=1$. Як частинний випадок, припустимо, що гістограма наближається лінійною комбінацією Гаусових функцій ГР з ваговими коефіцієнтами ρ_i виду

$$f\left(x,M_1,M_2,...,M_N;S_1,S_2,...,S_N;\rho_1,\rho_2,...,\rho_N\right)=\sum_{i=1}^{N}\frac{\rho_i}{\sigma_i\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\left(x-M_i\right)^2}{2\sigma_i^2}\right). \tag{5}$$

Для подальшої обробки результатів експерименту, перш за все, необхідно визначити невідомі параметри, застосувавши, наприклад, інтерполяцію на деякій точковій множині, згідно з якою невідомі параметри необхідно шукати з умови збігу значень функції (5) у деяких точках (наприклад вершинах і западинах) зі значеннями наближаючої функції, графік якої плавною кривою огинає побудовану гістограму. Ясно, що для однозначного визначення $3N$ невідомих параметрів кількість точок в множині повинна бути не менше, ніж $3N-1$ (оскільки коефіцієнти ρ_i завжди пов’язані рівнянням $\sum_{i=1}^{N}\rho_i=1$). Таким чином, для знаходження невідомих M_i, S_i и ρ_i необхідно скласти і розв’язати систему рівнянь виду

$$\begin{cases} F(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(x,M_1,M_2,\ldots,M_N;S_1,S_2,\ldots,S_N;\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_N\right)=\sum\limits_{i=1}^{N}\dfrac{\rho_i}{S_i\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}\exp\left(-\dfrac{\left(x_j-M_i\right)^2}{2S_i^2}\right)dx, \\ j=1,2,\ldots,3N-1, \\ \sum\limits_{i=1}^{N}\rho_i=1. \end{cases}, \tag{6}$$

де M_i, S_i, ρ_i – постійні, але невідомі параметри розподілу i-ї підвибірки і її ваговий коефіцієнт. Очевидно, що розв'язок системи (6) після підстановки у функцію (5) тим точніше буде наближати реальність, чим менші ділянки розбиття при побудові гістограми, т. б. чим точніше гістограма і огинаюча її плавна крива.

Пошук описаних параметрів можна здійснити і способом найменших квадратів [13], записавши функцію (7) і прирівнявши до нуля її частинні похідні по кожному з параметрів, де $g\left(x_j\right)$ – значення огинаючої функції у вибраних точках.

$$V=\sum_{j=1}^{3N-1}\left[g\left(x_j\right)-\sum_{i=1}^{N}\frac{\rho_i}{S_i\sqrt{2\pi}}\left\{\exp\left(-\frac{\left(x_j-M_i\right)^2}{2S_j^2}\right)\right\}\right]^2 . \quad (7)$$

При розв'язанні аналогічної задачі можна використовувати і метод моментів, але оскільки підрахунок емпіричних моментів високих порядків призводить до значних похибок, то такий спосіб пропонується застосовувати для попередніх оцінок шуканих величин. Уточнення цих оцінок слід здійснювати, максимізуючи функцію максимальної правдоподібності [16].

$$W=\prod_{j=1}^{3N-1}\sum_{i=1}^{N}\frac{\rho_i}{S_i\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\left(x_j-\mu_i\right)^2}{2S_i^2}\right), \quad (8)$$

прирівнюючи до нуля її частинні похідні по шуканих параметрах. У будь-якому випадку задача зводиться до розв'язання системи трансцендентних рівнянь, яка повинна виконуватись на ЕОМ.

При обробці результатів експерименту виникають певні труднощі. Перш за все, перед дослідниками постає питання, яким повинен бути крок розбиття при побудові гістограм. Для вибору оптимального кроку авторами запропонований наступний ітераційний метод. Крок має бути мінімальним, але не менше за точність вимірювання параметра, а число N в (4) має дорівнювати кількості отриманих при побудові вершин. Далі одним із запропонованих раніше методів необхідно визначити невідомі параметри M_i, S_i і ρ_i. Якщо в результаті розрахунків один або декілька вагових коефіцієнтів ρ_i виявляться менше деякої наперед заданої величини β, то відповідними членами у лінійній комбінації (5) можна знехтувати. Дійсно, інтегральна функція розподілу з ГР (5) має вигляд

$$F(x)=\sum_{i=1}^{N}\frac{\rho_i}{S_i\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{\left(x-M_i\right)^2}{2S_i^2}\right)dx . \quad (9)$$

Нехай, наприклад, $\rho_i<\beta$. Тоді після відкидання першого доданку в лінійній комбінації (5) нова інтегральна функція розподілу може бути записана у вигляді

$$\bar{F}(x)=\sum_{i=2}^{N}\frac{\rho_i}{S_i\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{\left(x-M_i\right)^2}{2S_i^2}\right)dx .$$

Оцінимо різницю

$$\left|F(x)-\bar{F}(x)\right|=\frac{\rho_1}{S_1\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{\left(x-M_1\right)^2}{2S_1^2}\right)dx\le\frac{\rho_1}{S_1\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\left(x-M_1\right)^2}{2S_1^2}\right)dx\le\beta .$$

Причому, отримана оцінка справедлива для довільного x.

Наприклад, якщо функція розподілу імовірностей повинна вимірюватись з точністю до 0,01, то значення β достатньо взяти 0,005. Далі крок гістограми можна збільшувати до тих пір, поки кількість вершин не стане дорівнювати кількості членів в лінійній комбінації (5) після відкидання її малих членів. Знову застосовуючи той же метод розв'язку, але вже для меншої кількості невідомих, можна визначити їх уточнене значення і відкинути малі члени. Такий процес слід продовжувати до тих пір, поки всі ρ_i не стануть порівнювані з вибраною точністю β. Отриманий при цьому крок може бути взятий за оптимальний. Фізично цей процес означає, що підвибірки з малим ρ_i вносять вельми незначний внесок у загальну вибірку і тому їх можна об'єднати з однією із підвибірок виробів з близькими величинами досліджуваного параметра.

Наступна складність, яка виникає при вирішенні подібних задач, носить чисто обчислювальний характер. Справа в тому, що збіжність розв'язку системи трансцендентних рівнянь на ЕОМ будь-яким ітераційним методом вимагає знання досить «гарних» початкових наближень, а вони в більшості випадків невідомі. Застосування методу моментів саме по собі пов'язане з обчислювальними труднощами. Тому як один із шляхів вирішення такого завдання може бути запропонований наступний. На початковому етапі вирішення слід застосовувати градієнтний метод [14], який при відносно невисокій точності може застосовуватися при «грубих» початкових наближеннях. Отриманий цим методом розв'язок може бути прийнятий за початкове наближення для застосування більш точного методу, наприклад, методу Ньютона.

Одержання закону розподілу імовірності досліджуваного параметра у вигляді (5) дозволяє перейти до вирішення однієї із важливих практичних задач - призначення допустимого значення цього параметра з певною надійністю. Як відомо, допустиме значення параметра, який характеризує властивості або якість роботи нових виробів і матеріалів, які не мають вивчених аналогів, встановлюється шляхом випробувань однієї партії. При цьому для виробів (матеріалів) створюються критичні, найбільш несприятливі для їх роботи ситуації, за яких ці вироби (матеріали) ще здатні виконувати покладені на них функції, і визначають значення досліджуваного параметра. Наприклад, при дослідженні механічної міцності резисторів їх піддають випробуванням шляхом прикладання різного виду навантажень, таких як деформації розтягу або згину, і вимірюють величини тих навантажень, які призводять до руйнування тіла резисторів.

Як відомо, розсіювання значень досліджуваного параметра залежить від прийнятого способу виготовлення виробу. Межі інтервалів розсіювання визначаються законами розподілу параметра, який розглядається як випадкова величина, що є сумою випадкових величин, кожна з яких викликається одним з нездоланних чинників. Якщо кількість доданків у сумі досить велике, то може виникнути два варіанти при призначенні функції розподілу параметра.

У разі, коли величина кожної зі складових у описаної раніше сумі мала в порівнянні з її величиною, за центральною граничною теоремою [13] розподіл суми близький до нормального. Фізично це умова малості кожного доданка означає, що жоден з факторів, що обумовили появу відповідної випадкової величини, не має переважаючого значення.

Якщо ж серед зазначених факторів з'являються один або кілька домінуючих, то відповідні доданки мають переважне значення в сумі і закон розподілу суми стає багатомодальним.

У разі нормального закону розподілу параметра, його допустиме значення встановлюється на основі отриманих його реалізацій з таких міркувань.

Відомо, що для імовірності P існує співвідношення

$$P\left\{\left|x-x_{cp}\right|\le t_{\gamma}\frac{S}{\sqrt{n}}\right\}=\gamma\,, \tag{10}$$

де x – істинне значення випадкової величини, $x_{cp}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j$, $S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_{cp}-x_j)^2}$, t_{γ} – квантиль розподілу Ст'юдента, взятий із таблиці для заданої довірчої імовірності γ і числа ступенів вільності $n-1$, n – обсяг вибірки.

Тоді із довірчою імовірністю γ можна стверджувати, що допустиме значення параметра знаходиться у межах

$$x_{cp}-t_{\gamma}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\le x\le x_{cp}+t_{\gamma}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}} \tag{11}$$

За допустиме значення параметра доцільно взяти лівий кінець довірчого інтервалу (12), тобто

$$\left[X\right]=x_{cp}-t_{\gamma}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}} \tag{12}$$

Зауважимо, що у разі ненормальності результатів спостережень слід застосовувати непараметричний підхід, згідно чого у (11) замість квантилі розподілу Ст'юдента слід підставляти число $U(p)$, задане рівністю $\Phi(U(p))=(1+p)/2$, де $\Phi(x)$ – функція стандартного нормального розподілу з математичним сподіванням 0 і дисперсією 1. При цьому отримані довірчі інтервали будуть дещо вужчими [12].

У разі, якщо отримана гістограма описується багатомодальним законом розподілу, подальші дії з призначення допустимого значення досліджуваного параметра можуть здійснюватись двома шляхами.

1. Розглядається підвибірка з мінімальним значенням M_i. Очевидно, що допустиме значення параметра виробів цієї підгрупи мінімально, тобто ці вироби скоріше інших вийдуть із ладу в експлуатаційних умовах. Призначене допустиме значення параметра для таких виробів може бути прийнято і для всієї партії. У цьому випадку подальша обробка експериментальних даних може відбуватися тільки для зазначеної нормально розподіленої підвибірки значень з параметрами розподілу M_i, S_i, як описано вище.

Якщо є можливість розділити вихідну вибірку виробів на підвибірки, об'єднані однією з домінуючих причин появи розкиду значень, то аналогічні операції з обробки експериментальних даних слід проводити для кожної підвибірки.

2. Визначені параметри дозволяють записати інтегральну функцію розподілу (9), яку, як і Гаусову випадкову величину, за допомогою ЕОМ можна задати таблицею наступним чином. Для кожного значення величини X, яке змінюється з певним числовим інтервалом, наприклад, 0,1, за таблицею функції розподілу

нормованого нормального розподілу $\Phi^x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{x^2}{2} \right) dx$ можна визначити імовірність

$\gamma_i = \frac{1}{S_i \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{\left(x - M_i\right)^2}{2S_i^2} \right) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(x-M_i)/S_i} \exp\left(-\frac{x^2}{2} \right) dx$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n$ і далі значення

інтегральної функції $F^x(x) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \gamma_i$.

Це означає, що функція $F^x(x)$ буде задана таблицею. Отримана таблиця дозволяє не тільки за значеннями x визначати величину функції $F^x(x)$, але і навпаки – за заданими значеннями функції визначати величину аргументу. Таким чином, для заданої довірчої імовірності можна визначити шукане допустиме значення параметра $\left[X\right]$ із співвідношення виду

$\gamma = P\left\{X < \left[X\right]\right\} = F^x(\left[X\right]) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\rho_i}{S_i \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{[X]} \exp\left(-\frac{\left(x - M_i\right)^2}{2S_i^2} \right) dx$, складеного на основі визначення

інтегральної функції розподілу випадкової величини параметра з ГР (5).

Необхідно відзначити, що, по-перше, другий шлях більш точний, оскільки він враховує функції розподілу всіх підвибірок, а по-друге, більш універсальний, адже з його допомогою можна вирішувати поставлену задачу у випадку довільного розподілу, якщо попередньо скласти для нього таблицю залежності довірчої ймовірності і аргументу інтегральної функції розподілу досліджуваної величини.

Також необхідно відзначити, що другий спосіб призначення допусків при багатомодальному розподілі параметра поширюється як частинний випадок і на унімодальний закон.

Більше того, призначення допуску за допомогою інтегральної функції розподілу в цьому окремому випадку може слугувати навіть доповненням і уточненням способу розв'язання аналогічної задачі при унімодальних законах розподілу параметра, описаного раніше в припущенні, що істинне значення вимірюваної величини збігається з її математичним очікуванням.

Щоб не вимагати виконання останньої умови і отримувати значення допустимої величини параметра менше і в цьому сенсі більш надійне, ніж розраховане із зазначеним припущенням, слід прийняти лівий кінець довірчого інтервалу для S за середнє квадратичне відхилення і застосувати призначення допуску за допомогою інтегральної функції розподілу для одномодальних законів з отриманим зазначеним раніше чином математичним очікуванням і дисперсією.

Ефективність розробленого методу була перевірена при визначенні початкових дисбалансів роторів компресорів [15]. Для відшукання параметрів доданків законів розподілу дисбалансів був застосований спосіб інтерполяції. У таблиці 1 наведені результати зазначених розрахунків для кожної з вибірок для трьох вузлів інтерполяції.

Таблиця 1

Параметри	M_1	M_2	M_3	σ_1	σ_2	σ_3	ρ_1	ρ_2
1	24,0019	31,0057	42,0104	16,0003	18,0033	15,0061	0,0647	0,2014
2	26,0083	31,0107	38,0114	24,9916	20,9876	18,9859	0,4413	0,0205
3	31,021	34,1365	41,9877	25,9485	21,9617	23,0295	0,4030	0,2000

На початковому етапі розв’язку був застосований градієнтний метод. Отриманий цим методом розв’язок був прийнятий за початкове наближення, а далі застосовувався більш точний метод Ньютона.

Висновки

Запропонована методологія статистичної обробки даних експериментів із виміряними параметрами технічних об'єктів, властивостей і т.п. дозволяє, по-перше, розкрити внутрішню структуру даних з урахуванням можливої багатомодальності законів їх розподілу, і, по-друге, дає правила роботи з такими статистичними матеріалами, зокрема, методи визначення обґрунтованих допустимих значень досліджуваних параметрів.

Зауважимо, що досліджуване питання має й самостійне значення, оскільки статистичні матеріали необхідно обробляти і при вивченні виробничих похибок виготовлення об'єктів, і при ідентифікації технологічних процесів, і при складанні нормативної документації, а також в низці інших важливих випадків у практиці проектування та виробництва технічних об'єктів [1].

Література

1. V. Royzman, A. Goroshko. Multiple inverse problem. / V. Royzman, A. Goroshko. // Journal of Vibroengineering. September 2012. Volume 14, ISSUE 3. ISSN 1392-8716. – С. 1417–1424.

2. Лопухин В.А. Обеспечение точности электронной аппаратуры: Конструкторско-технологические методы / В.А. Лопухин. – Л. : Машиностроение. Ленинградское отд-ие, 1980. – 269 с.

3. Кофанов Ю.Н. Методы системного анализа вибрационной прочности изделий : монография / Ю.Н. Кофанов, В.П. Ройзман. – М. : Радио и связь, 2007, 178 с.

4. Горошко А.В. Стан проблеми забезпечення якісного проектування структурно-складних технічних виробів та технологічних процесів їх виготовлення / А.В. Горошко, В.П. Ройзман // Вісник Хмельницького національного університету. – 2012. – № 5. – С. 59–68.

5. Плескунин В.И. Теоретические основы организации и анализа выборочных данных в эксперименте / В.И. Плескунин, Е.Д. Воронина ; Под. ред. Башарина А.В. - Л.: Изд-во ЛГУ, 1979. – 232 с.

6. Гусев В.П. Расчет электрических допусков радиоэлектронной аппаратуры / Под ред. В.П. Гусева и А.В. Фомина. М. : Сов. Радио, 1963. – 367 с.

7. Горошко А.В. Про задачу обробки статистичних матеріалів, що не підкоряються одномодальним законам розподілу / А.В. Горошко, В.П. Ройзман // Современные достижения в науке и образовании : сб. тр. VII междунар. Науч. Конф., посвящ. 50-летию Хмельниц. Нац. Ун-та, 25 авг.-1 сент.2012 г., г. Опатия (Хорватия). – Хмельницкий : ХНУ; ФОП Сторожук О.В. – 2012. – 107 с. (укр., рус., анг.). ISBN 966-96180-35-43. С. 58–66.

8. Вентцель Е.С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения : [учеб. пособие для втузов] / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров // 2-е узд., стер. – М. : Высш шк., 2000. – 480с.

9. Райнкше К. Модели надежности и чувствительности систем / К. Райнкше ; [пер. с нем.]. – М. : Мир, 1979. – 452 с.

10. Захарова Т.Н. К вопросу о статистической природе усталостной повреждаемости сталей и сплавов / Т.Н. Захарова // Проблемы прочности. – М. – 1974. – № 4.

11. Королев В.Ю. Вероятностно-статистический анализ хаотических процессов с помощью смешанных гауссовых моделей. Декомпозиция волатильности финансовых индексов и турбулентной плазмы / В.Ю. Королев – М. : ИПИ РАН, 2007. – 363 с.

12. Орлов А.И. Прикладная статистика : учебник / А.И. Орлов. – М. : Издательство «Экзамен», 2004. – 656 с.

13. Вентцель Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – М. : Наука, 1969. – 576 с.

14. Бахвалов Н.С. Численные методы: Анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М. : Наука, 1973. – 631 с.

15. Горошко А.В. Об одном параметрическом методе обработки экспериментальных данных / А.В. Горошко, В.П. Ройзман // Современные достижения в науке и образовании : сб. тр. VIII междунар. нау.-метод. конференции, 28 апреля – 5 мая 2013 г., г. Париж (Франция). – Хмельницкий : ХНУ, 2013. – С. 42–45. ISBN 978-966-330-173-0

References

1. V. Royzman, A. Goroshko. Multiple inverse problem. / V. Royzman, A. Goroshko. // Journal of Vibroengineering. September 2012. Volume 14, ISSUE 3. ISSN 1392-8716. – С. 1417–1424.

2. Lopukhin V.A. Obespecheniye tochnosti elektronnoy apparatury: Konstruktorsko-tekhnologicheskiye metody / V.A. Lopukhin – L: Mashinostroyeniye.. Leningradskoye otd-iye, 1980. – 269 s.

3. Kofanov YU.N. Metody sistemnogo analiza vibratsionnoy prochnosti izdeliy / YU.N. Kofanov, V.P. Royzman. Monografiya – Moskva: izd. Radio i svyaz', 2007, 178 s.

4. A.V. Goroshko, V.P. Royzman. Stan problemi zabezpechennya yakísnogo proyektuvannya strukturno-skladnikh tekhníchnikh virobív ta tekhnologíchnikh protsesív íkh vigotovlennya. Vísnik Khmel'nits'kogo natsíonal'nogo uníversitetu. Technical (Economical) science. Khmelnitsky. 2012. Issue 5. – pp. 59–68.

5. Pleskunin V.I. Teoreticheskiye osnovy organizatsii i analiza vyborochnykh dannykh v eksperimente / V.I. Pleskunin, Ye.D. Voronina. Pod. red. Basharina A.V. - L: Izd-vo LGU, 1979.. 232s.

6. Gusev V.P. i dr. Raschet elektricheskikh dopuskov radioelektronnoy apparatury / Pod red. V.P. Guseva i A.V. Fomina. M:. Sov. Radio, 1963. 367s.

7. Goroshko A.V. Pro zadachu obrobki statistichnikh materíalív, shcho ne pídkoryayut'sya odnomodal'nim zakonam rozpodílu. / A.V. Goroshko, V.P. Royzman / / Sovremennyye dostizheniya v nauke i obrazovanii: sb. tr. VII mezhdunar. Nauch. Konf., Posvyashch. 50-letiyu Khmel'nits. Nats. Un-ta, 25 avg.-1 sent.2012 g., G. Opatiya (Khorvatiya). - Khmel'nitskiy: KHNU; FOP Storozhuk O.V. – 2012. – 107 s. (Ukr., rus., Ang.). ISBN 966-96180-35-43. S. 58–66.

8. Venttsel' Ye.S. Teoriya veroyatnostey i yeye inzhenernyye prilozheniya. Ucheb. posobiye dlya vtuzov. / Ye.S. Venttsel', L.A. Ovcharov // 2-ye uzd, ster.-M.:... Vyssh shk, 2000. – 480 s: il.

9. Raynkshe K. Modeli nadezhnosti i chuvstvitel'nosti sistem / K. Raynkshe; [per. s nem.]. – M. : Mir, 1979. – 452 s.

10. Zakharova T.N. K voprosu o statisticheskoy prirode ustalostnoy povrezhdayemosti staley i splavov / Zakharova T.N. / / Problemy prochnosti. – M. 1974. – № 4.

11. Korolev V.YU. Veroyatnostno-statisticheskiy analiz khaoticheskikh protsessov s pomoshch'yu smeshannykh gaussovykh modeley. Dekompozitsiya volatil'nosti finansovykh indeksov i turbulentnoy plazmy / V.YU. Korolev - M:. IPI RAN, 2007. – 363 s.

12. Orlov A.I. Prikladnaya statistika. Uchebnik. / A.I.Orlov - M:.. Izdatel'stvo «Ekzamen», 2004. - 656 s.

13. Venttsel' Ye.S. Teoriya veroyatnostey / Ye.S. Venttsel' - M: Nauka, 1969. – 576 s.

14. Bakhvalov N.S. Chislennyye metody: Analiz, algebra, obyknovennyye differentsial'nyye uravneniya / N.S. Bakhvalov, N.P. Zhidkov, G.M. Kobel'kov – M. : Nauka, 1973. – 631 s.

15. Goroshko A.V. Ob odnom parametricheskom metode obrabotki eksperimental'nykh dannykh / A.V. Goroshko, V.P. Royzman / / Sovremennyye dostizheniya v nauke i obrazovanii: sb. tr. VIII mezhdunar. nau.-metod. konferentsii, 28 aprelya – 5 maya 2013 g, g.. Paris (France). – Khmel'nitskiy: KHNU, 2013. – S. 42–45. ISBN 978-966-330-173-0

Рецензія/Peer review : 15.5.2013 р. Надрукована/Printed :19.6.2013 р.
Рецензент: В.П. Ройзман