

ВСТАНОВЛЕННЯ АНАЛІТИЧНИХ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ПРУЖНИХ ЦИЛІНДРА, ШАРУ ТА ОСНОВИ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

Ярецька Н.О.

*Кандидат фізико-математичних наук, доцент
Хмельницького національного університету,
Україна, м. Хмельницький*

SETTING ANALYTICAL DEPENDENCES OF CONTACT INTERACTION OF ELASTIC CYLINDER, LAYER AND BASES WITH INITIAL TENSION

Yaretska N.

*Ph.D., Associate Professor,
Khmelnysky National University,
Khmelnysky, Ukraine*

Анотація

У статті досліджено вплив початкових напружень у пружному шарі та пружному циліндричному штампі на розподіл контактних напружень та переміщень в області контакту без врахування сил тертя. Дослідження виконано у рамках лінеаризованої теорії пружності в загальному вигляді для стисливих та нестисливих тіл як для теорії великих початкових деформацій, так і для двох варіантів теорії малих початкових деформацій у випадку довільної структури пружного потенціалу.

Abstract

The article has been studied the effect of the initial stress in the elastic layer and an elastic cylindrical die on the distribution of contact stresses and displacements in the contact area excluding friction forces. In general, the research was carried out for the theory of initial deformations and two variants of the theory of small initial deformations within the framework of linearized theory of elasticity with the elastic potential having arbitrary structure.

Ключові слова: контактна взаємодія, пружний циліндричний штамп, пружний шар, початкові напруження, лінеаризована теорія пружності.

Keywords: contact interaction, elastic cylindrical die, elastic layer, initial stresses, linearized theory of elasticity.

Вступ. Оскільки один із аспектів сучасної проблеми передачі навантаження пов'язаний із врахуванням початкових напружень у тілах на закон розподілу тиску в місцях їх контакту, то розрахунок важливих елементів конструкцій, дозволить більш ефективно враховувати міцність матеріалів шляхом її правильної оцінки. Виникати вони можуть в результаті таких деформацій як: пластичність, повзучість, структурних змін в матеріалі тощо. І викликають собою деформації, руйнування, збільшення тенденції до втрати стійкості і внутрішнього тертя, прискорення фазових переходів, корозію та інше.

Дослідження впливу початкових напружень на закон розподілу контактних характеристик у пружних півплощині й півпросторі при їх контактній взаємодії з пружними штампами представлено у статтях [1, 2]. У цих роботах подано загальний метод розв'язку контактних задач для півплощини та півпростору з початковими напруженнями, що взаємодіють з пружними тілами. Задача про тиск жорсткого штампа на пружний шар з початковими напруженнями розглянута в [3], а для часткового виду пружного потенціалу нестисливих тіл у [4]. В [5] розглядається загальний підхід до розв'язку задач контактної взаємодії пружних тіл з початковими напруженнями у рамках лінеаризованої

теорії пружності. Існує також ряд інших публікацій, що повністю або частково пов'язані з тематикою даної статті [6 – 8].

Постановка задачі. Розрізнятимемо три стани тіл з початковими напруженнями: природний, коли у всіх тілах відсутні напруження; початковий стан, та збурений стан, всі величини якого складаються з суми відповідних величин початкового стану та збурень. Вважаючи збурення набагато меншими відповідних величин початкового стану, дослідження проводимо в рамках лінеаризованої теорії пружності [9].

Розглянемо пружний циліндричний штамп (рис.1.) радіуса R і висотою H з початковими напруженнями, що втискається у пружний шар під дією сили P після виникнення там початкового деформованого стану. Будемо рахувати, що зовнішнє навантаження прикладено тільки до вільного торця пружного штампа, під дією якого всі точки штампа переміщуються у напрямку осі симетрії y_3 на одну і ту ж саму величину ε . Вважатимемо, що поверхні поза ділянкою контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил, а в зоні контакту переміщення та напруження – неперервні. Розглянемо випадок, коли шар з початковими напруженнями лежить на жорсткій основі без тертя.

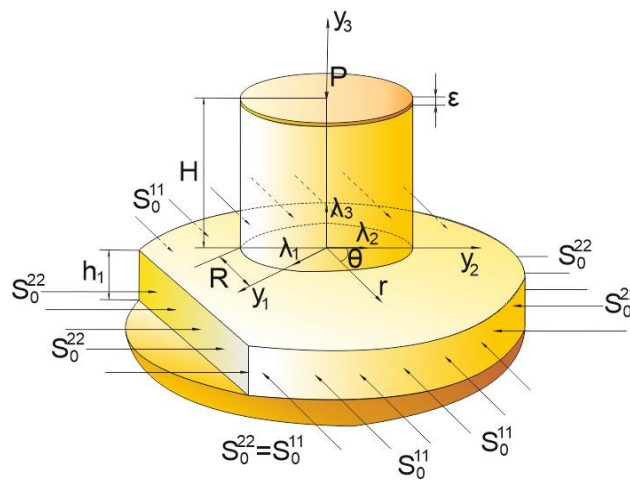


Рисунок 1. Циліндрический штамп и слой с начальными напряжениями.

Вважаємо, що початкові напружено-деформовані стани в шарі, штампі та основі є однорідними та рівними. А в зоні контакту циліндра та шару відсутнє тертя, тобто дотичні напруження на межі контакту рівні нулеві.

Для дослідження введемо лагранжеві координати (x_1, x_2, x_3) , які в початковому стані співпадають з декартовими координатами (y_1, y_2, y_3) . Причому, вони пов'язані співвідношеннями: $y_i = \lambda_i x_i$, $(i = \overline{1, 3})$, де λ_i , $(i = \overline{1, 3})$ – коефіцієнти видовження, що визначають переміщення початкового стану, $\lambda_i = \text{const}$. Вісь y_3 спрямовано по нормалі до межі контакту. Матеріали штампа, шару та основи вважаються ізотропними стисливими або нестисливими з довільною структурою пружного потенціалу. У випадку ортотропних матеріалів приймається, що пружно-еквівалентні напрямки співпадають з напрямками осей координат. Всі величини, які відносяться до пружного циліндра позначатимемо верхнім індексом «(1)», шару – «(2)», а основи – «(3)».

Розглянемо основні співвідношення. Припустимо, що початковий стан тіл – однорідний, і виконуються співвідношення

$$y_m = x_m + U_m^0, U_m^0 = \delta_{mi} (\lambda_m - 1) \lambda_i^{-1} y_i, (i, m = \overline{1, 3})$$

Тоді основне рівняння в переміщеннях для стисливих тіл має вигляд формул

$$L'_{m\alpha}U_\alpha = 0, L'_{m\alpha} = \omega'_{ij\alpha\beta} \partial^2 / \partial y_i \partial y_\beta, \quad (i, m, \alpha, \beta = \overline{1,3}) \quad (1)$$

а для нестисливих тіл разом із умовою нестисливості

$$L'_{m\alpha}U_\alpha + q'_{\alpha m} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} p' = 0, q'_{\alpha m} \frac{\partial U_\alpha}{\partial y_m} = 0, q'_{\alpha m} = \lambda_\alpha q_{\alpha m}, L'_{m\alpha} = \kappa'_{im\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_\beta}, \quad (2)$$

Вирази для визначення складових тензора напружень для стисливих і нестисливих тіл запишемо у вигляді

$$Q'_{ij} = \omega'_{ij\alpha\beta} \partial U_\alpha / \partial y_\beta, Q'_{ij} = \kappa'_{ij\alpha\beta} \partial U_\alpha / \partial y_\beta + q'_{ij} p, \quad (3)$$

$$\omega'_{ij\alpha\beta} = \lambda_i \lambda_\beta / \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \omega_{ij\alpha\beta}, \kappa'_{ij\alpha\beta} = \lambda_i \lambda_\beta / \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \kappa_{ij\alpha\beta},$$

де $\omega'_{im\alpha\beta}, \kappa'_{im\alpha\beta}$ – складові тензора модулів пружності четвертого порядку.

При однорідних початкових напруженнях $S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0; S_0^{33} = 0; \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ розв'язок рівнянь (1), (2) представимо через циліндричні координати у вигляді

$$(\Delta_1 + \xi_2^2 \partial^2 / \partial y_2^2)(\Delta_1 + \xi_3^2 \partial^2 / \partial y_3^2) \tilde{\chi} = 0, \quad (4)$$

$$\text{де } \Delta_1 = \partial^2 / \partial r^2 + r^{-1} \partial / \partial r.$$

У системі циліндричних координат (r, θ, z_i) ($i = \overline{1,2}$) такій постановці відповідають граничні умови: 1) на торці пружного штампa $z_i = H v_i^{-1}$, де $v_i = \sqrt{n_i}$, ($i = \overline{1,2}$):

$$u_3^{(1)} = -\varepsilon, Q_{3r}^{(1)} = 0, \quad (0 \leq r \leq R); \quad (5)$$

2) на межі пружного шару в ділянці контакту $z_i = 0$, ($i = \overline{1,2}$):

$$u_3^{(1)} = u_3^{(2)}, Q_{33}^{(1)} = Q_{33}^{(2)}, Q_{3r}^{(1)} = Q_{3r}^{(2)} = 0, \quad (0 \leq r \leq R); \quad (6)$$

3) на межі пружного шару поза ділянкою контакту $z_i = 0$, ($i = \overline{1,2}$)

$$Q_{33}^{(2)} = 0, Q_{3r}^{(2)} = 0, \quad (R \leq r < \infty); \quad (7)$$

4) на боковій поверхні пружного штампa $r=R$:

$$Q_{rr}^{(1)} = 0, Q_{3r}^{(1)} = 0, \quad (0 \leq z_i \leq H v_i^{-1}); \quad (8)$$

5) на нижній поверхні шару, $z_i = -\lambda_3 h_2 v_i^{-1} = -H v_i^{-1}$, ($i = \overline{1,2}$):

$$u_3^{(2)} = 0, Q_{3r}^{(2)} = 0, \quad (0 \leq r < \infty). \quad (9)$$

А умова рівноваги, що встановлює зв'язок між осіданням і рівнодіючої навантаження:

$$P = -2\pi R^2 \int_0^R \rho Q_{33}^{(2)}(0, \rho) d\rho$$

закриває постановку просторової лінеаризованої задачі про контактну взаємодію попередньо напруженого скінченного циліндричного штампa із пружним шаром та основою (півпростором) з початковими напруженнями.

Методика розв'язання поставленої задачі Розв'язок для циліндра з початковими напруженнями шукатимемо методом Фур'є з (4). Для рівних коренів визначального рівняння (4) вони мають вигляд

$$\tilde{\chi} = (1 + \nu_1 z_1) \left[A_0 z_1 + C_0 z_1 (3r^2 - 2z_1^2) \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(A_k + \nu_1 z_1 B_k) I_0(\gamma_k \nu_1 r) S_1(\gamma_k z_1 \nu_1) + J_0(\alpha_k r) (S_2(\alpha_k z_1) + \nu_1 z_1 S_3(\alpha_k z_1)) \right],$$

де власні значення задачі Штурма-Ліувілля: $\alpha_k = \mu_k R^{-1}$,
 $\gamma_k = 2\pi k H^{-1}$, ($k = 0, 1, 2, \dots$); $S_1 = C_k \sin(\gamma_k \nu_1 z_1) + D_k \cos(\gamma_k \nu_1 z_1)$,
 $S_2 = E_k \operatorname{sh}(\alpha_k z_1) + F_k \operatorname{ch}(\alpha_k z_1)$, A_0, B_0, C_0, A_k, B_k – невідомі коефіцієнти,
 $S_3 = N_k \operatorname{sh}(\alpha_k z_1) + M_k \operatorname{ch}(\alpha_k z_1)$.

Напружено-деформований стан у пружному шарі з початковими напруженнями представлений формулами через гармонійні функції у вигляді інтегралів Ханкеля

$$u_3^{(2)} = \theta_3 \left(\int_0^{\infty} \frac{F(\eta)}{\eta} J_0(\eta \rho) d\eta - \int_0^{\infty} \frac{F(\eta)}{\eta} G(\eta h) J_0(\eta \rho) d\eta \right),$$

$$Q_{33}^{(2)} = \theta_1 \int_0^{\infty} F(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta; \quad Q_{3r}^{(2)} = 0,$$

де $h = h_1 / R$, $\theta_1 = C_{44} l_1 (1 + m_1) \kappa$, $\theta_3 = m_1 (s_1 - s_0) \nu_1^{-1}$, $F(\eta)$ – невідома функція для якої введено позначення:
 $F(\eta) = \eta^3 B_2 R^{-3} (1 - G(\eta))^{-1}$.

Введемо нові змінні

$$\int_0^{\infty} F(\eta) \eta^{-1} J_1(\eta) d\eta = -8\varepsilon E (\kappa \theta_2 l R)^{-1} \chi_0, \quad \chi_k = -\mu_k N_k (\varepsilon R)^{-1}$$

та виразимо через них невідомі коефіцієнти, що залежать від вигляду пружного потенціалу

$$A_0 = \varepsilon \nu_1 (1 - m_2)^{-1} (\chi_0 - 1), \quad C_0 = -2\varepsilon \nu_1 E (3H\theta_2)^{-1} \chi_0, \quad E_k = \varepsilon R \mu_k^{-1} E^{(k)} \chi_k,$$

$$M_k = -\frac{\varepsilon R}{\mu_k} M^{(k)} \chi_k, \quad A_k = \frac{\varepsilon R^2}{2\gamma_k} \left(1 + \frac{s_0 (1 - I_0(\gamma_k \nu_1 R))}{\gamma_k \nu_1 R I_1(\gamma_k \nu_1 R)} \right) H b_1^{(k)} \chi_k,$$

$$B_k = \varepsilon R^2 (2\gamma_k)^{-1} b_1^{(k)} \chi_k, \quad N_k = -\varepsilon R \mu_k^{-1} \chi_k, \quad F_k = \varepsilon R^2 s_0 \mu_k^{-2} \chi_k$$

де $\theta_2 = E \left(8 \frac{m_1}{n_1} (1 + H) - 4 \frac{H}{\nu_1} + (1 - m_2) \frac{R^2}{H} \right)$, $b_1^{(k)}, M^{(k)}, E^{(k)}$ – виражаються з (5)–(9).

З умов неперервності напружень та переміщень в зоні контакту та поза нею (6), (7) випишемо парні інтегральні рівняння відносно функції $F(\eta)$ для рівних коренів.

$$\int_0^{\infty} F(\eta) \eta^{-1} J_0(\eta \rho) d\eta = f(\rho), \quad (\rho < 1), \quad \int_0^{\infty} F(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = 0, \quad (\rho > 1)$$

де $J_0(\mu_k \rho)$, $I_0(\gamma_k \nu_1 \rho)$ – функції Бесселя, $\theta_4 = n_1^{-1} (\nu_1 (m_2 - 1) - m_1 s_0)$,

$$f(\rho) = \frac{\varepsilon}{\theta_3} \left(\chi_0^{-1} + \frac{2(m_2-1)R^2}{\theta_2} \chi_0^{\rho-\theta_4} \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k J_0(\mu_k \rho) - \frac{(m_2-1)R^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_1^{(k)} \chi_k I_0(\gamma_k \nu_1 R \rho) \right) + \int_0^{\infty} \frac{F(\eta) G(\eta h) J_1(\eta \rho)}{\eta} d\eta$$

Використовуючи формулу звернення, матимемо інтегральні рівняння типу Фредгольма 2-го роду відносно функції $F(\eta)$, які представлені співвідношеннями

$$\frac{F(\eta)}{\eta} = -\frac{2\varepsilon}{\pi\theta_3} \left((1-\chi_0)\psi_0(\eta, 0) - 2(m_2-1)\frac{R^2}{\theta_2} \chi_0\psi_1(\eta, 0) + \theta_4 \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \psi_0(\eta, \mu_k) + 0,5(m_2-1)R^2 \sum_{k=1}^{\infty} b_1^{(k)} \chi_k \psi_0(\eta, i\gamma_k \nu_1 R) \right) + 2\pi^{-1} \int_0^{\infty} u^{-1} F(u) G(uh) \psi_0(\eta, u) du$$

$$\psi_n(x, y) = \int_0^1 t^n \cos xt \cos ytdt$$

де

Розв'язки (10) будемо шукати методом послідовних наближень, взявши за нульові та наступні наближення функції представлені формулою

$$F(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} F^{(k)}(\eta) \quad (11)$$

$$\frac{F^{(0)}(\eta)}{\eta} = \frac{2\varepsilon}{\pi\theta_3} \left((\chi_0-1)\psi_0(\eta, 0) + \frac{2(m_2-1)R^2}{\theta_2} \chi_0\psi_1(\eta, 0) - \theta_4 \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \psi_0(\eta, \mu_k) - \frac{(m_2-1)R^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_1^{(k)} \chi_k \psi_0(\eta, i\gamma_k \nu_1 R) \right), \quad \frac{F^{(k)}(\eta)}{\eta} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{F^{(k-1)}(u)}{u} G(uh) \psi_0(\eta, u) du$$

Відмітимо, що процес послідовних наближень (11) збіжний при $h > 1$ та $\lambda_1 > \lambda_{kp}$, враховуючи дослідження проведені [5].

Для визначення сталих χ_i ($i=0, 1, 2, \dots$) з врахуванням ортогональності бesselевих функцій $J_0(\mu_k \rho)$ отримаємо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь [9]

$$\vartheta_k \chi_k + \sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_{kn} \chi_n = \varpi_k \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (12)$$

Враховуючи асимптотичні представлення для функцій Бесселя, величин μ_k та обмеженість інтегралів $\psi(\mu_k, \mu_n)$, система (12) квазірегулярна, якщо $\lambda_1 > \lambda_{kp}$.

Вирази для визначення напружено-деформованого стану в попередньо напружених шарі, штампі та основі мають вигляд формул

$$u_r^{(1)} = \varepsilon [\hat{T}_0^5(1; 0; 0; 0) \chi_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \hat{T}_k^5(1; 0; 0; 0) \chi_k], \quad Q_{33}^{(1)} = \varepsilon [\hat{T}_0^5(0; 1; 0; 0) \chi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{T}_k^5(0; 1; 0; 0) \chi_k]$$

$$u_r^{(2)} = \varepsilon (\pi\theta_3)^{-1} \tilde{T}^1(\Omega_+^1; S_1^1; N_0^1; K_0^1; 1; 1-s_0)$$

$$Q_{33}^{(2)} = \frac{(1+m_1)\varepsilon l_1 C_{44}}{\pi\theta_3 R} \tilde{T}^1(\Omega_+^1; S_2^0; N_1^0; K_1^0; s; s-s_0)$$

$$u_r^{(3)} = \frac{\varepsilon}{\pi\theta_3} A_0 \tilde{T}^1 \left(\Omega_+^1; S_2^1; N_1^1; K_1^1; 1; (\lambda + \mu)\mu^{-1} \right)$$

$$Q_{33}^{(3)} = \frac{2\varepsilon(\mu + \lambda)}{\pi R \theta_3} A_0 \tilde{T}^1 \left(\Omega_-^1; S_3^0; N_2^0; K_2^0; 1; 1 \right)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{T}^1(\Omega_{\pm}^l; S_{m_1}^n; N_{m_2}^n; K_{m_3}^n; k; a) = & (1 + a_0) \left\langle (1 - \chi_0) \Omega_{\pm}^l(S_{m_1}^n; 0; k; a; 0) - \frac{\theta_3}{\varepsilon} \sum_{j=0}^{\infty} C_j^{**} \Omega_{\pm}^l(S_{j+m_1}^n; 0; k; a; 0) - \right. \\ & \left. - \frac{2(m_2 - 1)R^2}{\theta_2} \chi_0 \Omega_{\pm}^l(N_{m_2}^n; 0; k; a; 0) + \theta_4 \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \Omega_{\pm}^l(K_{m_3}^n; \mu_k; k; a; 0) + \frac{(m_2 - 1)R^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_1^{(k)} \chi_k \Omega_{\pm}^l(K_{m_3}^n; i\gamma_k v_1 R; k; a; 0) \right\rangle + \\ & + \sum_{\tau=1}^{\infty} a_{\tau} \left\langle (1 - \chi_0) \Omega_{\pm}^l(S_{m_1}^n; 0; k; a; v_1 \tau) - \frac{\theta_3}{\varepsilon} \sum_{j=0}^{\infty} C_j^{**} \Omega_{\pm}^l(S_{j+m_1}^n; 0; k; a; v_1 \tau) - \frac{2(m_2 - 1)R^2}{\theta_2} \chi_0 \Omega_{\pm}^l(N_{m_2}^n; 0; k; a; v_1 \tau) + \right. \\ & \left. + \theta_4 \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \Omega_{\pm}^l(K_{m_3}^n; \mu_k; k; a; v_1 \tau) + \frac{(m_2 - 1)R^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_1^{(k)} \chi_k \Omega_{\pm}^l(K_{m_3}^n; i\gamma_k v_1 R; k; a; v_1 \tau) \right\rangle \\ S_n^m(\rho; z) = & \int_0^{\infty} \eta^{n-2} \sin \eta e^{-z \cdot \eta} J_m(\eta \rho) d\eta, \quad K_n^m(\rho; \mu_k; z) = \int_0^{\infty} \eta^n \psi_0(\eta, \mu_k) e^{z \cdot \eta} J_m(\eta \rho) d\eta \\ N_n^m(\rho; z) = & \int_0^{\infty} \eta^n \psi_1(\eta, 0) e^{z \cdot \eta} J_m(\eta \rho) d\eta \end{aligned}$$

Чисельний розв'язок. Система (12) була розв'язана методом редукції при наступних значеннях параметрів: $k=32, 16, E=3.92, \sigma=0.47, \nu=0.5$. Вплив початкових напружень на закон розподілу контактних зусиль для задачі про тиск пружного циліндричного штампа на шар у випадку потенціала Бартенева-Хазановича, представлений на рис. 2. – рис. 3.

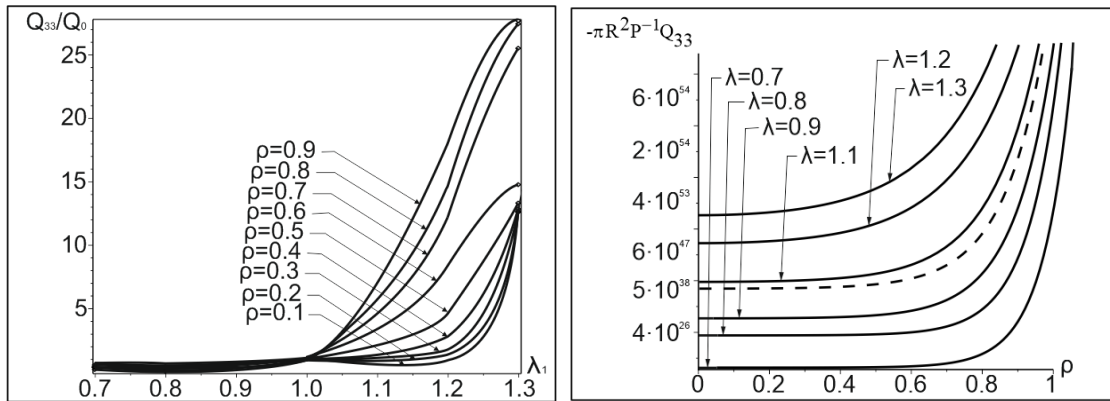


Рисунок 2. Вплив початкових напружень на нормальний закон розподілу пружному циліндрі

Рисунок 3. Контактне напруження у

Висновок. Отже, встановлено аналітичні залежності, які дозволяють досліджувати поведінку напружень та переміщень у зоні контакту для пружного циліндричного штампа, пружного шару та основи з початковими напруженнями без врахування сил тертя у випадках, коли: шар лежить на жорсткій основі. А вплив початкових напружень на напружено-деформований стан пружних штампа та шару полягає у наступному: 1) початкові напруження при стисканні призводять до зменшення сили напружень, а при розтягненні – до їх збільшення; 2) для переміщень все відбувається навпаки; 3) найбільший

вплив початкових напружень відзначений на бічній поверхні штампа; 4) у пружному шарі на характер дії початкових напружень його товщина не впливає, а впливає лише на їхнє значення; 5) більш суттєво, у кількісному плані, початкові напруження діють у високоеластичних матеріалах у порівнянні із більш жорсткими, але якісно їхній вплив зберігається; 6) виявлено механічний ефект аналогічний раніше проведеним дослідженням [5], який полягає в тому, що коли $\lambda_1 \rightarrow \lambda_{кр}$, то виникають явища резонансного характеру як у шарі, так і у штампі. Вони полягають у тому, що напруження та переміщення у тілах, різко змінюють свої значення.

Литература

1. Гузь А.Н. Контактные задачи для упругих тел с начальными напряжениями применительно к жестким и упругим штампам / А. Н. Гузь, В. Б. Рудницкий // Прикл. механика – 2004. – 40, № 7. – С.41– 69.
2. Гузь А. Н. Контактная задача о давлении упругого штампа на упругое полупространство с начальными напряжениями / А. Н. Гузь, В. Б. Рудницкий // Прикл. механика. – 1984. – 20, № 8. – с. 3 - 11.
3. Бабич С. Ю. Контактная задача теории упругости для слоя с начальными напряжениями/С.Ю. Бабич//Прикл. мех.–1984.–20, №6.–с. 34-40.
4. Александров В. М. Контактная задача для предварительно напряженного физически нелинейного упругого слоя / В. М. Александров, В. С. Порошин//Инж. журн. «Механика твердого тела».–1984. - № 6. – с. 79 – 85.
5. Гузь А. Н. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями / А. Н. Гузь, В. Б. Рудницкий. - Хмельницкий, изд. ПП Мельник, 2006. – 710 с.
6. Gao X.-L., Mao J.C.L. Solution of the Contact Problem of a Rigid Conical Frustum Indenting a Transversely Isotropic Elastic Half-Space // Appl. Mech. – 2014. – 81, N 4. – P. 107-119.
7. Gaskins John, Scott Barker N., Matthew R. Begley. Comprehensive Solutions for the Response of Freestanding Beams With Tensile Residual Stress Subject to Point-Loading // J. Appl. Mech. – 2014. – 81, N 3. – P. 318-324.
8. Vasilikis D., Karamanos S. Discussion: Mechanics of Confined Thin-Walled Cylinders Subjected to External Pressure. // Appl. Mech. Reviews. – 2014. – 66, N 1. – P. 312-321.
9. Ярецька Н. О. Тиск пружного циліндричного штампа на пружний шар з початковими (залишковими) напруженнями. [Текст] : автореф. дис. к. ф.-м. наук : 01.02.04 / Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України. — К., 2014. — 20 с.