

**ЗМІШАНА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИХ СПІВВІСНИХ
ЦИЛІНДРІВ ТА ШАРУ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ.**

¹ *Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка
національної академії наук України,
вул. П. Нестерова, 3, 03057, Київ-57, Україна;*

² *Хмельницький національний університет,
вул. Інститутська, 11, 29016, Хмельницький, Україна;
e-mail: massacrane2@ukr.net, yaretskano@khnmu.edu.ua*

В умовах стрімкого розвитку наукових та технічних досягнень вивчення впливу початкових напружень на контактну взаємодію пружних тіл є актуальною проблемою як для фундаментальних досліджень з механіки деформівного твердого тіла, так і для практичного використання у різних галузях промислового комплексу. Особливо це стосується розрахунку важких фундаментних плит і будівельних перекриттів, що знаходяться в межах дії гравітаційних сил, а також при розрахунках важливих характеристик для димових труб, градирень, водонапірних веж та інших висотних споруд. Тому одним із важливих факторів при дослідженні контактної взаємодії пружних тіл є вивчення впливу початкових напружень, які практично завжди присутні в реальних конструкціях. Отже, розробка ефективних методів розрахунку напружено-деформованого стану з врахуванням початкових деформацій є безсумнівно важливою науково-технічною проблемою.

Метою роботи є дослідження передачі вісесиметричного навантаження від попередньо напружених скінченних співвісних пружних циліндричних штампів до пружного шару з початковими напруженнями та представлення розв'язку відповідної статичної контактної задачі без врахування сил тертя у межах лінеаризованої теорії пружності. Дослідження виконано у випадку рівних коренів визначального рівняння [2] в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу.

Припустимо, що два пружні співвісні циліндричні штампів контактено взаємодіють із пружним шаром. Будемо вважати, що поверхні поза межею контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил, а на межі контакту переміщення та напруження – неперервні.

Дослідження виконано в координатах початкового деформованого стану Oy_i , ($i=1,2,3$), що пов'язані з лагранжевими координатами: $y_i = \lambda_i x_i$ ($i=1,2,3$), де λ_i – коефіцієнти видовження, що визначають переміщення початкового стану.

Прийнято, що початкові стани у циліндрах та шарі – однорідні та рівні, а пружні потенціали – двічі неперервно-диференційовані функції алгебраїчних інваріантів тензора деформації Гріна [2]. Крім того, дія штампів викликає у півпросторі мале збурення основного напружено-деформованого стану.

Також, у даному дослідженні будемо розглядати три стани тіл з початковими напруженнями: 1) природний, коли у тілах відсутні напруження; 2) початковий стан та 3) збурений стан, всі величини якого складаються із суми відповідних величин початкового стану та збурень. Відзначимо, що збурення при цьому є набагато меншими відповідних величин початкового стану [1].

Розглянемо пружний попередньо-напружений шар, у який втискаються два скінченних співвісних пружних циліндричних штампів з початковими напруженнями. Позначимо товщину шару після виникнення в ньому початкового напруженого стану через $2h = 2\lambda_1 \tilde{h}$, де \tilde{h} – товщина шару у природному стані; $R^{(i)}, H^{(i)}$ ($i = 1,2$) – радіус та висоти пружних штампів, відповідно. Будемо вважати, що зовнішні навантаження прикладені тільки до вільних торців пружних штампів так, що їх точки зміщуються в напрямку осі Oy_3 на сталі величини $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}$, відносно площини $y_3 = 0$, а поверхні поза ділянкою контакту залишаються вільними від впливу зовнішнього навантаження, дія сил тертя в зоні контакту відсутня.

Постановка задачі враховує контактну взаємодію пружних стисливих та нестисливих ізотропних тіл із довільною структурою пружного потенціалу. А у випадку ортотропних матеріалів будемо вважати, що пружно еквівалентні напрямки будуть співпадати із напрямками осей координат.

Введемо лагранжеві координати (x_1, x_2, x_3) , які в початковому стані співпадають з декартовими (y_1, y_2, y_3) . Тому даній постановці відповідають наступні граничні умови:

1) на торцях пружних штампів

$$u_3^{(i)} = (-1)^i \varepsilon^{(i)}; \quad Q_{3r}^{(i)} = 0; \quad \forall r \in [0, R^{(i)}], \quad y_3 = (-1)^{i+1} h + (-1)^{i+1} H^{(i)}, \quad (i = \overline{1,2}) \quad (1)$$

2) на бічній поверхні пружних штампів

$$Q_{rr}^{(i)} = 0; \quad Q_{3r}^{(i)} = 0; \quad \forall y_3 \in [0, H^{(i)}], \quad r = R^{(i)}, \quad (i = \overline{1,2}) \quad (2)$$

3) на межі пружного шару в області контакту

$$U_3 = U_3^{(i)}; \quad Q_{33} = Q_{33}^{(i)}; \quad Q_{3r} = Q_{3r}^{(i)} \quad \forall r \in [0, R^{(i)}], \quad y_3 = (-1)^i h, \quad (i = \overline{1,2}) \quad (3)$$

4) на межі пружного шару поза областю контакту

$$Q_{33} = Q_{3r} = 0, \quad \forall r \in [r, +\infty], \quad y_3 = \pm h \quad (4)$$

Умови рівноваги мають вигляд:

$$\int_0^{R^{(1)}} \rho[Q_{33}]_{y_3=h} d\rho - \int_0^{R^{(2)}} \rho[Q_{33}]_{y_3=-h} d\rho = 0 \quad (5)$$

А рівнодіюча зовнішніх сил визначаються рівністю:

$$P = -2\pi \int_0^{R^{(1)}} \rho[Q_{33}]_{y_3=h} d\rho = -2\pi \int_0^{R^{(2)}} \rho[Q_{33}]_{y_3=-h} d\rho \quad (6)$$

Для розв'язку поставленої змішаної контактної задачі отримані нескінченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь, обчислення яких ускладнюється квадратурами, що до них входять. Тому користуємось наближеними методами обчислення. Для цього розкладаємо коефіцієнти систем лінійних алгебраїчних рівнянь в ряди за степенями $h^{(i)}$ ($i = \overline{1,2}$) та, обчислимо їх методом редукції. В результаті одержимо розв'язки для попередньо напружених співвісних циліндричних штампів та шару з початковими напруженнями.

На основі проведених числових обчислень для потенціалів конкретної структури можна зробити наступні узагальнюючі висновки: початкові напруження у шарі та скінченних пружних циліндрах приводять до зменшення контактних напружень у випадку стиску. У випадку розтягу – до їх зростання, а для переміщень при ідентичних початкових і залишкових напруженнях відмічається ефект “резонансного характеру” не тільки в шарі, але і в пружних штампах.

Отже, отримано розв'язок змішаної контактної задачі для двох пружних співвісних скінченних циліндрів з початковими напруженнями із попередньо напруженим шаром без врахування сил тертя у випадку рівних коренів характеристичного рівняння. На основі числового аналізу якого можна зробити висновок, що початкові напруження мають суттєвий вплив на контактні напруження та переміщення в тілах, що знаходяться у взаємодії.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: лінеаризована теорія пружності, початкові (залишкові) напруження, контактна задача, циліндричний штамп, півпростір.

1. *Babych S.Y., Yarets'ka N.O.* Contact Problem for an Elastic Ring Punch and a Half-Space with Initial (Residual) Stresses. // *Int. Appl. Mech.* – 2021. – **57**, №3. – Pp. 297–305. <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01081-7>
2. *Yaretska N.O.* Mathematical model and solution of spatial contact problem for prestressed cylindrical punch and elastic layer./ *Innovative paradigm of the development of modern physical-mathematical sciences: Collective monograph.* - Riga, Latvia : “Baltija Publishing”, 2022. – Pp. 261-295. <https://doi.org/10.30525/978-9934-26-200-5-10>

¹Babich. S. Yu. ²Yarets'ka N.O.

THE MIXED CONTACT PROBLEM FOR PRESTRESSED CONSTANT CYLINDERS AND A LAYER WITH INITIAL STRESSES

¹*Institute of Mechanics S.P. Tymoshenko
National Academy of Sciences of Ukraine,
st. P. Nesterova, 3, 03057, Kiev-57, Ukraine;
e-mail: babich_sy@ukr.net*

²*Khmelnytsky National University,
Institutska str., 11, 29016, Khmelnytsky, Ukraine
e-mail: massacrane2@ukr.net, yaretskano@khnmu.edu.ua*

Abstract. In the case of an equal root of the characteristic equation, the mixed contact problem is solved for two elastic coaxial finite cylinders with initial stresses and a prestressed layer without taking into account frictional forces. The study was performed in a general form for the theory of large initial (final) deformations and two variants of the theory of small initial deformations within the framework of the linearized theory of elasticity with an arbitrary structure of the elastic potential. To solve the problem, fundamental results such as Hankel transformation, pair integral equations, orthogonal polynomials and other methods of the theory of contact problems of the linearized theory of elasticity were used.

Key words: linearized theory of elasticity, initial (residual) stresses, contact problem, cylindrical stamp, half-space.