

МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В БАГАТОШАРОВІЙ КУСКОВО-ОДНОРІДНІЙ ПЛАСТИНІ МЕТОДОМ ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є ЗІ СПЕКТРАЛЬНИМ ПАРАМЕТРОМ В КРАЙОВИХ УМОВАХ ТА УМОВАХ СПРЯЖЕННЯ

Методом інтегрального перетворення Фур'є зі спектральним параметром в крайових умовах та умовах спряження побудовано розв'язок задачі теплопровідності для багатошарової кусково-однорідної ізотропної пластини.

The method of integral transformation of Fourier with a spectral parameter in border conditions and conjugating conditions is build the solving of problem of heat conducting for multi-layered cobbled-homogeneous isotropic plate.

Нестаціонарна задача теплопровідності для кільчастої циліндрично-анізотропної багатошарової пластини розглянута в монографії [1]. Методом гібридного інтегрального перетворення Ганкеля 2-го роду – Фур'є – Бесселя – ... – Бесселя – Фур'є побудовано розв'язок задачі в припущенні, що границі пластини та її шарів є жорсткими в сенсі теплопровідності. В даній роботі побудовано розв'язок задачі теплопровідності для багатошарової пластини при наявності похідних по часу в крайових умовах та умовах спряження шарів.

Розглянемо багатошарову кусково-однорідну ізотропну пластинку сталої товщини 2δ , нормаллю до площини теплової симетрії якої служить вісь Oz . Пластина нагрівається неперервно розподіленими тепловими джерелами щільністю $\omega(M, \tau)$ та зовнішнім середовищем, теплообмін через поверхню пластини із яким здійснюється за законом Ньютона. Припускається, що теплофізичні характеристики матеріалу пластинки не залежать від температури. Як показано в [2], температура t_j пластинки в будь-якій точці j -го шару при малих δ таких, що відношення z/δ зберігається сталим, може бути знайдена наближено за формулою:

$$t_j = T_{1j} + T_{2j} \cdot \frac{z}{\delta}, \quad (j = \overline{1, n+1}), \tag{1}$$

де T_{1j} – усереднена температура j -го шару, T_{2j} – температурний вплив сусідніх шарів або зовнішнього середовища (для граничних шарів). У припущенні, що задача теплопровідності симетрична відносно серединної площини $z=0$ пластинки, приходимо до наступної задачі відносно невідомих T_{1j} та T_{2j} ($j = \overline{1, n+1}$): побудувати обмежений на множині

$$D_n^{++} = \{(x, y, \tau) : x \in I_n^+, y \in \mathbf{R}, \tau > 0\}, \quad I_n^+ = \bigcup_{k=1}^{n+1} (l_{k-1}, l_k), \quad l_0 = 0, \quad l_{n+1} = \infty$$

розв'язок сепаратної системи рівнянь в частинних похідних:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \begin{pmatrix} T_{1j} \\ T_{2j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_j^2 & 0 \\ 0 & a_j^2 \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} T_{1j} \\ T_{2j} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha'_{11} & \alpha'_{12} \\ \alpha'_{21} & \alpha'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{1j} \\ T_{2j} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{1j} \\ f_{2j} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

де $l_{j-1} < x < l_j$, $j = \overline{1, n+1}$, $y \in \mathbf{R}$, $\tau > 0$, з початковими умовами:

$$\begin{pmatrix} T_{1j} \\ T_{2j} \end{pmatrix} \Big|_{\tau=0} = \begin{pmatrix} g_{1j} \\ g_{2j} \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in I_n^+ \times \mathbf{R}, \quad (j = \overline{1, n+1}), \tag{3}$$

крайовими умовами:

$$h_{11}^0 \begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{21} \end{pmatrix} + h_{12}^0 \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{21} \end{pmatrix} + h_{13}^0 \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1(y, \tau) \\ \alpha_2(y, \tau) \end{pmatrix}, \quad x = l_0 \tag{4}$$

та умовами ідеального контакту:

$$\begin{pmatrix} T_{1j} \\ T_{2j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{1, j+1} \\ T_{2, j+1} \end{pmatrix}, \quad x = l_j, \quad (j = \overline{1, n}), \tag{5}$$

$$\lambda_j \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} T_{1j} \\ T_{2j} \end{pmatrix} = \lambda_{j+1} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} T_{1, j+1} \\ T_{2, j+1} \end{pmatrix}, \quad x = l_j, \quad (j = \overline{1, n}).$$

Для розв'язання задачі (2) – (5) застосуємо перетворення Фур'є на дійсній осі по змінній y . Тоді в образах Фур'є маємо задачу: побудувати обмежений на множині $I_n^+ \times (0, \infty)$ розв'язок сепаратної системи рівнянь в частинних похідних:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \begin{pmatrix} T_{1j}^* \\ T_{2j}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_j^2 & 0 \\ 0 & a_j^2 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{pmatrix} T_{1j}^* \\ T_{2j}^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha'_{11} + a_j^2 \sigma^2 & \alpha'_{12} \\ \alpha'_{21} & \alpha'_{22} + a_j^2 \sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{1j}^* \\ T_{2j}^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{1j}^* \\ f_{2j}^* \end{pmatrix}, \tag{6}$$

де $l_{j-1} < x < l_j$, $j = \overline{1, n}$, $y \in \mathbf{R}$, $\tau > 0$, з початковими умовами:

$$\begin{pmatrix} T_{1j}^* \\ T_{2j}^* \end{pmatrix} \Big|_{\tau=0} = \begin{pmatrix} g_{1j}^* \\ g_{2j}^* \end{pmatrix}, \quad x \in I_n^+, \quad (j = \overline{1, n+1}), \quad (7)$$

крайовими умовами:

$$h_{11}^0 \begin{pmatrix} T_{11}^* \\ T_{21}^* \end{pmatrix} + h_{12}^0 \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} T_{11}^* \\ T_{21}^* \end{pmatrix} + h_{13}^0 \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{pmatrix} T_{11}^* \\ T_{21}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^*(\tau) \\ \alpha_2^*(\tau) \end{pmatrix}, \quad x = l_0 \quad (8)$$

та умовами ідеального контакту:

$$\begin{pmatrix} T_{1j}^* \\ T_{2j}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{1j+1}^* \\ T_{2j+1}^* \end{pmatrix}, \quad x = l_j, \quad (j = \overline{1, n}), \quad (9)$$

$$\lambda_j \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} T_{1j}^* \\ T_{2j}^* \end{pmatrix} = \lambda_{j+1} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} T_{1j+1}^* \\ T_{2j+1}^* \end{pmatrix}, \quad x = l_j, \quad (j = \overline{1, n}).$$

Використовуючи рівняння (6), крайову умову (8) можемо записати у вигляді:

$$\begin{pmatrix} h_{11}^0 - h_{13}^0 \begin{pmatrix} \alpha'_{11} + a_j^2 \sigma^2 & \alpha'_{12} \\ \alpha'_{21} & \alpha'_{22} + a_j^2 \sigma^2 \end{pmatrix} \\ \alpha_1^*(\tau) \\ \alpha_2^*(\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11}^* \\ T_{21}^* \end{pmatrix} + h_{12}^0 \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} T_{11}^* \\ T_{21}^* \end{pmatrix} + h_{13}^0 \begin{pmatrix} a_1^2 & 0 \\ 0 & a_1^2 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{pmatrix} T_{11}^* \\ T_{21}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^*(\tau) \\ \alpha_2^*(\tau) \end{pmatrix} - h_{13}^0 \begin{pmatrix} f_{1j}^* \\ f_{2j}^* \end{pmatrix}, \quad x = l_0. \quad (10)$$

Далі для розв'язування задачі (6), (7), (10) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій півосі з n точками поділу із спектральним параметром в крайових умовах, породжене такою задачею Штурма – Ліувілля:

$$\left(A_j^2 \frac{d^2}{dx^2} + (\lambda^2 E + \Gamma_j^2) \right) V_j(x, \lambda) = 0, \quad (j = \overline{1, n+1}), \quad (11)$$

Γ_j^2 – додатно визначена матриця; $j = \overline{1, n+1}$,

$$\begin{pmatrix} (\alpha_{11}^0 + \gamma_{11}^0 \lambda^2) + (\beta_{11}^0 + \delta_{11}^0 \lambda^2) \frac{d}{dx} \\ V_{n+1}(x, \lambda) \Big|_{x=l_0} = 0, \\ V_{n+1}(x, \lambda) \Big|_{x=\infty} < \infty, \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{j1}^k + \beta_{j1}^k \frac{d}{dx} \\ V_k(x, \lambda) - \left(\alpha_{j2}^k + \beta_{j2}^k \frac{d}{dx} \right) V_{k+1}(x, \lambda) = 0, \\ x = l_k, \quad k = \overline{1, n}, \quad j = 1, 2. \end{pmatrix} \quad (13)$$

Визначимо пряме F_n^* та обернене F_n^{-1} перетворення Фур'є $(n+1)$ -шарового напівпростору із спектральним параметром в крайових умовах і в умовах спряження наступним чином:

$$F_n^*[f](\lambda) = \int_{l_0}^{\infty} U^*(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi + (\gamma_{11}^0 f_1(l_0) + \delta_{11}^0 f_1'(l_0)) \equiv \hat{f}(\lambda), \quad (14)$$

$$F_n^{-1}[\hat{f}](x) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} \lambda U(x, \lambda) \hat{f}(\lambda) d\lambda \equiv f(x). \quad (15)$$

Тут

$$U = \sum_{j=1}^n \Theta(x-l_{j-1}) \Theta(l_j-x) U_j + \Theta(x-l_n) U_{n+1},$$

$$U^* = \sum_{j=1}^n \Theta(x-l_{j-1}) \Theta(l_j-x) U_j^* + \Theta(x-l_n) U_{n+1}^*$$

$$f(\xi) = \sum_{j=1}^n \Theta(x-l_{j-1}) \Theta(l_j-x) f_j(\xi) + \Theta(x-l_n) f_{n+1}(\xi),$$

$$A_j^2 = \begin{pmatrix} a_j^{-2} & 0 \\ 0 & a_j^2 \end{pmatrix}, \quad U_j = \varphi_j \cdot \tilde{\varphi}_1^{-1} - \psi_j \cdot \tilde{\psi}_1^{-1}, \quad (j = \overline{1, n+1}),$$

$$\tilde{U}_k = (\tilde{\varphi}_1 \quad \tilde{\psi}_1) \Omega_k^{-1} \begin{pmatrix} O \\ E \end{pmatrix} A_k^{-2}, \quad (k = \overline{1, n+1}),$$

$\Theta(x)$ – одинична функція Гевісайда [3]

При цьому

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1}(x, \lambda) &= \exp(q_{n+1} x), \\ \psi_{n+1}(x, \lambda) &= \exp(-q_{n+1} x), \end{aligned}$$

де

$$q_j = \sqrt{A_j^2(\lambda^2 E + \Gamma_j^2)}, \quad (j = \overline{1, n+1}),$$

причому під квадратним коренем із матриці $A_j^2(\lambda^2 E + \Gamma_j^2)$ беремо ту гілку кореня, яка для діагональної матриці дає значення

$$\sqrt{\begin{pmatrix} \mu_1^2 & 0 \\ 0 & \mu_2^2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$$

Інші пари $\varphi_n, \psi_n, \dots, \varphi_1, \psi_1$ визначаються по індукції умовами спряження (12) Крім того,

$$\Omega_n = \begin{pmatrix} \Phi_k & \Psi_k \\ \Phi'_k & \Psi'_k \end{pmatrix}, \quad (k = \overline{1, n+1}),$$

$$\tilde{\varphi}_1 = \left((\alpha_{11}^0 + \lambda^2 \gamma_{11}^0) \frac{d}{dx} + (\beta_{11}^0 + \lambda^2 \delta_{11}^0) \right) \varphi_1(x, \lambda) \Big|_{x=l_1},$$

$$\tilde{\varphi}_1 = \left((\alpha_{11}^0 + \lambda^2 \gamma_{11}^0) \frac{d}{dx} + (\beta_{11}^0 + \lambda^2 \delta_{11}^0) \right) \psi_1(x, \lambda) \Big|_{x=l_1},$$

$$M_{k1} = \begin{pmatrix} \beta_{11}^k & \alpha_{11}^k \\ \beta_{21}^k & \alpha_{21}^k \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1, n+1}$$

Визначимо оператор В рівністю

$$B = \sum_{j=1}^n \Theta(x-l_{j-1}) \Theta(l_j - x) B_j + \Theta(x-l_n) B_{n+1},$$

$$B_j = A_j^2 \frac{d^2}{dx^2} + \Gamma_j^2, \quad (j = \overline{1, n+1})$$

Основна тотожність інтегрального перетворення диференціального оператора В має вигляд

$$\begin{aligned} F_{n+1}[B(f)](\lambda) &= -\lambda^2 \hat{f}(\lambda) - (\beta_{11}^0 f_1(l_0) + \alpha_{11}^0 f_1'(l_0) + \delta_{11}^0 A_1^2 f_1''(l_0) + \gamma_{11}^0 A_1^2 f_1''(l_0)) - \\ &- \sum_{k=1}^n (\tilde{\varphi}_1 \quad \tilde{\psi}_1) \Omega_k^{-1}(l_k, \lambda) M_{k1} \left(\begin{pmatrix} \beta_{21}^k & \alpha_{21}^k \\ \beta_{22}^k & \alpha_{22}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{k+1}(l_k) \\ f'_{k+1}(l_k) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta_{11}^k & \alpha_{11}^k \\ \beta_{12}^k & \alpha_{12}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_k(l_k) \\ f'_k(l_k) \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

Доведення основної тотожності інтегрального перетворення диференціального оператора (16) проводиться за методикою, запропонованою в роботі [4]

Виберемо параметри спектральної задачі Штурма – Ліувілля (11) – (13) наступним чином

$$A_j^2 = \begin{pmatrix} a_j^2 & 0 \\ 0 & a_j^2 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_j^2 = \begin{pmatrix} \alpha'_{11} + a_j^2 \sigma^2 & \alpha'_{12} \\ \alpha'_{21} & \alpha'_{22} + a_j^2 \sigma^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha''_{11} + a_{n+1}^2 \sigma^2 & \alpha''_{12} \\ \alpha''_{21} & \alpha''_{22} + a_{n+1}^2 \sigma^2 \end{pmatrix},$$

вважаючи, що власні числа матриць $\Gamma_j^2, j = \overline{1, n}$, невід'ємні

Параметри в крайових умовах (12) обрані таким чином

$$\alpha_{11}^0 = h_2^0 E, \quad \beta_{11}^0 = h_1^0 E, \quad \gamma_{11}^0 = -h_3^0 E, \quad \delta_{11}^0 = 0, \quad (17)$$

а параметри в умовах контакту (10) визначені умовами

$$\begin{aligned} \alpha_{11}^k &= 0, \quad \beta_{11}^k = E, \quad \alpha_{12}^k = 0, \quad \beta_{12}^k = E, \\ \alpha_{21}^k &= \lambda_k E, \quad \beta_{21}^k = 0, \quad \alpha_{22}^k = \lambda_{k+1} E, \quad \beta_{22}^k = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

E – одинична матриця 2-го порядку

В образах Фур'є задача (6), (7), (10) набуває вигляду

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \hat{T}_1^* \\ \hat{T}_2^* \end{pmatrix} = -(\lambda^2 + A_{n+1}(\sigma^2)) \begin{pmatrix} \hat{T}_1^* \\ \hat{T}_2^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1^* \\ f_2^* \end{pmatrix} + h_{13} \begin{pmatrix} f_1^* \\ f_2^* \end{pmatrix} (l_0) - \begin{pmatrix} \alpha_1^*(\tau) \\ \alpha_2^*(\tau) \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{T}_1^* \\ \hat{T}_2^* \end{pmatrix} \Big|_{x=0} = \begin{pmatrix} \hat{g}_1^* \\ \hat{g}_2^* \end{pmatrix}, \quad (20)$$

де прийнято позначення

$$A_{n+1}(\sigma^2) = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{n+1} + a_{n+1}^2 \sigma^2 & \alpha_{12}^{n+1} \\ \alpha_{21}^{n+1} & \alpha_{22}^{n+1} + a_j^{n+1} \sigma^2 \end{pmatrix}.$$

Для спрощення викладок, неоднорідність правої частини системи (19) позначимо через $\begin{pmatrix} h_1(\tau, \lambda, \sigma) \\ h_2(\tau, \lambda, \sigma) \end{pmatrix}$ Для розв'язання системи (19), (20) знайдемо зображення:

$$\begin{pmatrix} \hat{T}_1^* \\ \hat{T}_2^* \end{pmatrix} = \exp(-(\lambda^2 + A_{n+1}(\sigma^2))\tau) \cdot \begin{pmatrix} \hat{g}_1^* \\ \hat{g}_2^* \end{pmatrix} + \int_0^\tau \exp(-(\lambda^2 + A_{n+1}(\sigma^2))(\tau - \xi)) \begin{pmatrix} h_1(\xi, \lambda, \sigma) \\ h_2(\xi, \lambda, \sigma) \end{pmatrix} d\xi. \quad (21)$$

Застосовуючи до знайденого розв'язку \hat{T}^* обернене перетворення Фур'є по x і обернене перетворення Фур'є по y на всій дійсній осі, знаходимо для вектора $\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n \Theta(x - l_{j-1}) \Theta(l_j - x) \begin{pmatrix} T_{1j} \\ T_{2j} \end{pmatrix} + \Theta(x - l_n) \begin{pmatrix} T_{1n+1} \\ T_{2n+1} \end{pmatrix}$$

представлення

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} &= \int_{l_0}^\infty \int_{-\infty}^\infty H(\xi, x, y, \eta, \tau) A^{-2} g(\xi, \eta) d\xi d\eta + \int_{-\infty}^\infty H^0(x, y, \eta, \tau) \gamma_{11}^0 g_1(l_0, \eta) d\eta + \\ &+ \int_0^\tau \int_{l_0}^\infty \int_{-\infty}^\infty H(\xi, x, y, \eta, \tau - \zeta) A^{-2} f(\xi, \eta, \zeta) d\zeta d\xi d\eta + \\ &+ \int_0^\tau \int_{-\infty}^\infty H^0(x, y, \eta, \tau - \zeta) (\gamma_{11}^0 f_1(l_0, \eta, \zeta) - a_0(\eta, \zeta)) d\zeta d\eta, \end{aligned} \quad (22)$$

$$H(\xi, x, y, \eta, \tau) = \frac{1}{2\pi^2 l} \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty e^{-i\sigma(y-\eta)} U(x, \lambda) e^{-(\lambda^2 + A_{n+1}(\sigma^2)\tau)} U^*(\xi, \lambda) d\sigma d\lambda,$$

$$H^0(x, y, \eta, \tau) = \frac{1}{2\pi^2 l} \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty e^{-i\sigma(y-\eta)} U(x, \lambda) e^{-(\lambda^2 + A_{n+1}(\sigma^2)\tau)} d\sigma d\lambda.$$

Таким чином, температурне поле пластинки можна знайти за формулою (1), яку поширюємо на всі шари пластинки, а температурні впливи визначаємо за формулою (22).

Список використаних джерел

1. Комаров Г. М. Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку / Комаров Г. М., Ленюк М. П., Мороз В. В. – Чернівці : Прут, 2001. – 228 с.
2. Котенко Н. В. О динамической задаче термоупругости / Н. В. Котенко, М. П. Ленюк // Прикладная математика. – 1974. – Вып. 3. – С. 43 – 51.
3. Шилов Г. Е. Математический анализ Второй специальный курс / Шилов Г. Е. – М. : Наука, 1965. – 398 с.
4. Ленюк М. П. Побудова скінченного гібридного інтегрального перетворення при наявності спектрального параметра в крайових умовах та умовах спряження / М. П. Ленюк, В. В. Мороз // Науковий вісник Чернівецького університету. – Чернівці : Рута, 2006. – Вип 314 – 315. Математика – С. 105 – 113.