

## АЛГОРИТМ РІШЕННЯ КОНТАКТНИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ПРИ ЗДІЙСНЕННІ КОНТАКТУ МІЖ ВУЗЛАМИ

Метою роботи є зменшення обсягів обчислень при рішенні контактних задач методом скінчених елементів шляхом зменшення рівнянь рівноваги та кількості ітерацій.

В роботі пропонується спосіб рішення контактних задач методом скінчених елементів, коли контакт здійснюється між вузлами скінчено елементної сітки, а проковзування викликає значні сили тертя. Спосіб відрізняється від відомих тим, що кінематичні контактні умови задовольняються шляхом корегування глобальної матриці жорсткості а сили тертя у вигляді лінійної функції відносного переміщення входять в функціонал роботи зовнішніх і внутрішніх сил. Перевагою цього способу є те, що матриця жорсткості зберігає симетрію при зменшенні загальної кількості рівнянь рівноваги. Результати обчислень з достатньою точністю наближаються до експериментальних.

Ключові слова: метод скінчених елементів, контактні задачі, граничні умови, корегування матриці жорсткості, рівняння рівноваги.

V.L. MARCHENKO

Khmelnitsky National University

### ALGORITHM OF CONTACT PROBLEMS SOLVING BY THE METHOD OF FINITE ELEMENTS IN CONTACT BETWEEN NODES

The aim is to reduce the amount of computation in solving contact problems using finite elements by reduction equilibrium equations and the number of iterations.

Abstract - In work the way of the decision of contact problems a method of the ended elements when slippage causes great strengths of friction is offered, the Way differs from known themes, that cinematic contact conditions are satisfied by a correcting of a global matrix of rigidity and force of friction in the form of linear function of relative moving enter in function works of external and internal forces. Advantage of this way is that the matrix of rigidity keeps symmetry and tape at reduction of total of the equations of balance.

Found calculations with sufficient accuracy approaching experimental.

Keywords: finite element method, contact problems, boundary conditions, adjusting the stiffness matrix, the equation of equilibrium.

### Вступ

Визначення напружено-деформованого стану методом скінчених елементів пов'язано з рішенням системи алгебраїчних рівнянь, кількість яких досягає десятків тисяч. Для окремо взятих об'єктів кількість обчислень можна скоротити врахуванням розташування елементів системи рівнянь рівноваги у вигляді стрічки та симетричності глобальної матриці жорсткості. Однак, при рішенні контактних задач звичайно ці особливості не мають місця. Для врахування граничних умов на контактній поверхні вводяться додаткові невідомі, що зумовлює введення додаткових рівнянь. При цьому глобальна матриця жорсткості стає не стрічковою, що обумовлює значне зростання обсягів обчислень.

Задачею, що поставлена в роботі, є розробка способу врахування граничних умов на контактній поверхні, де відносно проковзування викликає значні сили тертя. при якому матриця жорсткості залишається стрічковою а кількість рівнянь рівноваги зменшується.

Відомо досить багато моделей та алгоритмів рішення контактних задач, які не позбавлені вказаних недоліків [1–6]. Це моделі, засновані на побудові матриці граничної податливості [1]; введені контактного шару чи фіктивних жорсткостей [2, 3]; методи, засновані на окремому розгляді тіл (з використанням методу сил [4, 5]), та сумісному розгляді контактуючих об'єктів [6] та деякі інші. В роботах [7] запропоновано спосіб рішення контактних задач, який засновано на корегуванні глобальної матриці жорсткості. Але при цьому, хоча й кількість рівнянь не збільшується, система рівноваги теж не є стрічковою та симетричною. Окрім того, розглянуто тільки випадок вертикального контакту. В роботі [8] розглянуто інший спосіб корегування матриці жорсткості, коли стрічковість та симетричність зберігаються. Але розглянуто випадок тільки вертикального контакту при відносному проковзуванні без тертя.

### Основна частина.

Спосіб, запропонований в даній роботі, полягає в наступному.

Розглянемо взаємодію двох плоских об'єктів, які контактують по прямолінійній поверхні (рис. 1). Прийmemo, що взаємодія здійснюється тільки у вузлах скінчено-елементної сітки.

Використання методу скінчених елементів для розв'язку контактних задач передбачає рішення системи рівнянь рівноваги,

$$[K]\{\delta\} = \{F\}, \quad (1)$$

при врахуванні силових

$$\sigma_1^n + \sigma_2^n = 0, \quad |\sigma_1^r| = \tau; \quad |\sigma_2^r| = \tau; \quad \sigma_1^r = -\sigma_2^r \quad (2)$$

та кінематичних

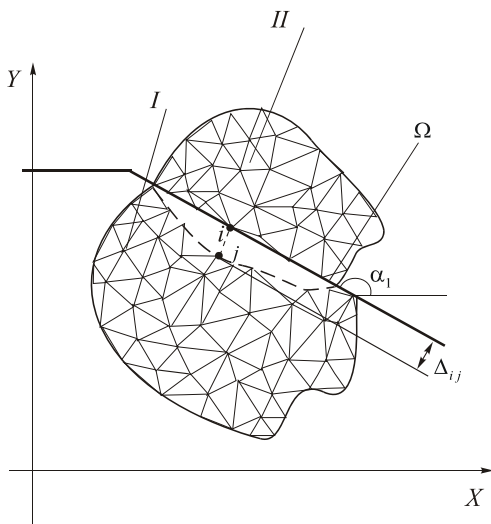


Рис.1. Фрагмент контактної поверхні

$$\delta_1^n + \delta_2^n = -\Delta \tag{3}$$

контактних умов. В співвідношеннях (1-3)  $[K]$  – глобальна матриця жорсткості,  $\{\delta\}, \{F\}$  – вектори вузлових переміщень та сил,  $\sigma_1^r, \sigma_2^r$  – проекції контактних напружень на нормаль  $\eta$  до поверхні контакту,  $\delta_1^n, \delta_2^n$  – нормальні до поверхні переміщення,  $\Delta$  – величина натягу (чи зазору). Індексами 1, 2 позначено перший та другий контактуючий об’єкти. Прийmemo в першому наближенні, що контакт здійснюється по деякій максимально можливій поверхні  $\Omega$ .

Нехай однією парою контактуючих вузлів будуть вузли  $i, j$ , в яких має місце натяг  $\Delta_{i,j}$ . В подальшому для спрощення будемо розглядати тільки цю пару контактуючих вузлів. Позначимо через  $\{F_n\}$  вектор проекцій нормальної до контактної поверхні складової вузлових сил, а вузлові сили тертя  $\tau$  прийmemo у вигляді лінійної функції відносного проковзування

$$\tau_1 = (\delta_{2,x} \sin(\alpha_2 - 90^\circ) + \delta_{2,y} \cos(\alpha_2 - 90^\circ) - (\delta_{1,x} \sin(\alpha_1 - 90^\circ) + \delta_{1,y} \cos(\alpha_1 - 90^\circ))) G \tag{4}$$

$$\tau_2 = (\delta_{1,x} \sin(\alpha_1 - 90^\circ) + \delta_{1,y} \cos(\alpha_1 - 90^\circ) - (\delta_{2,x} \cos(\alpha_2 - 90^\circ) + \delta_{2,y} \sin(\alpha_2 - 90^\circ))) G \tag{5}$$

Коефіцієнт пропорційності  $G$  повинен бути достатньо великим, щоб сили тертя досягали величин сил тертя ковзання  $\tau_k$  при незначному відносному переміщенні.

Запишемо рівняння повної енергії системи

$$\chi = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^E \int_V \{\varepsilon^e\}^T \{\sigma^e\} dv - \left( \sum_{k=1}^K \left( \{F_k\}^T \{\delta_k\} \right) + \sum_{n=1}^N \left( \tau_{1n} \delta_{1n}^r + \tau_{2n} \delta_{2n}^r \right) \right) \tag{6}$$

де  $E, K$  – кількість елементів та вузлів скінчено-елементної моделі,  $N$  – кількість пар вузлів контактної поверхні;  $\delta_n^r$  – проекції вузлових переміщень на дотичну до контактної поверхні. Враховуючи, що

$$\delta_{1n}^r = \delta_{1,x} \sin(\alpha_1 - 90^\circ) + \delta_{1,y} \cos(\alpha_1 - 90^\circ);$$

$$\delta_{2n}^r = \delta_{2,x} \sin(\alpha_2 - 90^\circ) + \delta_{2,y} \cos(\alpha_2 - 90^\circ)$$

підставимо в рівняння (6) співвідношення (4), (5), а також відомі вирази (8) для рівнянь Коші  $\{\varepsilon^e\} = [B^e] \{\delta^e\}$  і закону Гука  $\{\sigma^e\} = [D][B^e] \{\delta^e\}$ . В результаті одержимо:

$$\begin{aligned} \chi = & \frac{1}{2} \sum_{e=1}^E \{\delta^e\}^T \int_V [B^e]^T [D][B^e] dv \{\delta^e\} - \left( \sum_{k=1}^K \left( \{F_k\}^T \{\delta_k\} \right) + \right. \\ & + \frac{1}{2} (\delta_{2n}^x \sin(\alpha_2 - 90^\circ) + \delta_{2n}^y \cos(\alpha_2 - 90^\circ) - (\delta_{1n}^x \sin(\alpha_1 - 90^\circ) + \\ & + \delta_{1n}^y \cos(\alpha_1 - 90^\circ))) G (\delta_{1n}^x \sin(\alpha_1 - 90^\circ) + \delta_{1n}^y \cos(\alpha_1 - 90^\circ) + (\delta_{1n}^x \sin(\alpha_1 - 90^\circ) + \\ & + \delta_{1n}^y \cos(\alpha_1 - 90^\circ)) - (\delta_{2n}^x \sin(\alpha_2 - 90^\circ) + \delta_{2n}^y \cos(\alpha_2 - 90^\circ))) G (\delta_{2n}^x \sin(\alpha_2 - 90^\circ) + \\ & + \delta_{2n}^y \cos(\alpha_2 - 90^\circ))) = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^E \{\delta^e\}^T \int_V [B^e]^T [D][B^e] dv \{\delta^e\} - \\ & - \left( \sum_{k=1}^K \left( \{F_k\}^T \{\delta_k\} \right) + \frac{1}{2} (\delta_{2n}^x \sin(\alpha_2 - 90^\circ) + \delta_{2n}^y \cos(\alpha_2 - 90^\circ) - \right. \\ & \left. - (\delta_{1n}^x \sin(\alpha_1 - 90^\circ) + \delta_{1n}^y \cos(\alpha_1 - 90^\circ))^2 G \right) \end{aligned}$$

Умовою мінімуму енергії системи є

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{\delta\}} = 0.$$

В розрахунковому вигляді вона зводиться до рівнянь:

$$\sum_{e=1}^E [K^e] \{\delta_e\} + \sum_n^N [K^n] \{\delta_n\} = (\{F\} + \{F_n\}),$$

де  $[K^e] = \int_V [B^e]^T [D] [B^e] dv$  – матриця жорсткості елемента скінчено - елементної моделі,  $[K^n]$

назвемо матрицею тангенційної жорсткості пари контактних вузлів,

$$[K^n] = 2G \begin{bmatrix} (\sin(\alpha_1^n))^2 \dots \cos(\alpha_1^n) (\sin(\alpha_1^n)) \dots - (\sin(\alpha_2^n))^2 \dots - \cos(\alpha_2^n) (\sin(\alpha_1^n)) \\ \sin(\alpha_1^n) \cos(\alpha_1^n) \dots (\cos(\alpha_1^n))^2 \dots - \sin(\alpha_2^n) \cos(\alpha_1^n) \dots - (\cos(\alpha_1^n))^2 \\ -(\sin(\alpha_2^n))^2 \dots - \cos(\alpha_1^n) \sin(\alpha_2^n) \dots (\sin(\alpha_2^n))^2 \dots \cos(\alpha_2^n) \sin(\alpha_2^n) \\ -\sin(\alpha_1^n) \cos(\alpha_2^n) \dots - (\cos(\alpha_2^n))^2 \dots \sin(\alpha_2^n) \cos(\alpha_2^n) \dots (\cos(\alpha_2^n))^2 \end{bmatrix},$$

$$\{\delta_n\} - \text{вектор вузлових переміщень пари контактних вузлів} \quad \{\delta_n\} = \begin{Bmatrix} \delta_{1n}^x \\ \delta_{1n}^y \\ \delta_{2n}^x \\ \delta_{2n}^y \end{Bmatrix}.$$

Через  $(\alpha_1^n)$ ,  $(\alpha_2^n)$  позначено кути  $(\alpha_1 - 90^0)$  та  $(\alpha_2 - 90^0)$  відповідно.

Для врахування контактних умов шляхом корегування матриці жорсткості запишемо співвідношення (2), (3) в дещо іншому вигляді, а напруження замінимо вузловими силами скінчено-елементної сітки

$$F_{1,x} \cos(\alpha_1 - 90^0) + F_{1,y} \sin(\alpha_1 - 90^0) + F_{2,x} \cos(\alpha_2 - 90^0) + F_{2,y} \sin(\alpha_2 - 90^0) = 0;$$

$$\delta_{1,x} \cos(\alpha_1 - 90^0) + \delta_{1,y} \sin(\alpha_1 - 90^0) + \delta_{2,x} \cos(\alpha_2 - 90^0) + \delta_{2,y} \sin(\alpha_2 - 90^0) = -\Delta_{1,2}.$$

Для вузлів  $i, j$  останні співвідношення набудуть вигляду

$$\begin{aligned} F_{i,x} \cos(\alpha_1 - 90^0) + F_{i,y} \sin(\alpha_1 - 90^0) + F_{j,x} \cos(\alpha_2 - 90^0) + F_{j,y} \sin(\alpha_2 - 90^0) = \\ = -F_{i,x} \tan(\alpha_1 - 90^0) - F_{i,y} + F_{j,x} \tan(\alpha_1 - 90^0) + F_{j,y} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\delta_{i,x} \cos(\alpha_1 - 90^0) + \delta_{i,y} \sin(\alpha_1 - 90^0) + \delta_{j,x} \cos(\alpha_2 - 90^0) + \delta_{j,y} \sin(\alpha_2 - 90^0) = -\Delta_{i,j}. \quad (8)$$

Співвідношення (7) записано для випадків, коли кут нахилу контактної поверхні не дорівнює  $0^0$  чи  $90^0$ . В другому випадку ( $90^0$ ) рівняння (7) повинно мати наступний вигляд

$$F_{i,x} + F_{j,x} = 0.$$

Враховуючи, що кожне рівняння системи (1) є рівнянням рівноваги і обидві його частини дорівнюють вузловій силі, контактні умови (7, 8) можуть бути враховані корегуванням матриці жорсткості наступним чином

$$K_{2i-1,n} = -K_{2i-1,n} c \tan(\alpha_1 - 90^0) - K_{2i,n} + K_{2j-1,n} c \tan(\alpha_1 - 90^0) + K_{2j,n}, \quad n = 1, N \quad (9)$$

де  $N$  – ширина стрічки матриці жорсткості.

Для врахування кінематичних контактних умов визначимо з рівняння (8) переміщення  $\delta_{j,y}$ .

$$\begin{aligned} \delta_{j,y} = -\frac{\Delta_{ij}}{\sin(\alpha_2 - 90^0)} - \frac{\delta_{i,x} \cos(\alpha_1 - 90^0)}{\sin(\alpha_2 - 90^0)} - \frac{\delta_{i,y} \sin(\alpha_1 - 90^0)}{\sin(\alpha_2 - 90^0)} - \frac{\delta_{j,x} \cos(\alpha_2 - 90^0)}{\sin(\alpha_2 - 90^0)} = \\ = -\frac{\Delta_{ij}}{\sin(\alpha_2 - 90^0)} + \delta_{i,x} c \tan(\alpha_1 - 90^0) + \delta_{i,y} - \delta_{i,x} c \tan(\alpha_1 - 90^0) \end{aligned} \quad (10)$$

Необхідно відмітити, що в окремих випадках вертикальних та горизонтальних поверхонь рівняння (10) має інший вигляд.

Підставляючи співвідношення (10) в систему рівнянь (1) та зводячи подібні члени глобальну матрицю жорсткості можна скорегувати наступним чином

$$\begin{aligned} K_{n,2i-1} &= K_{n,2i-1} + K_{n,2j} c \tan(\alpha_1 - 90^0), \\ K_{n,2i} &= K_{n,2i} + K_{n,2j}, \\ K_{n,2j-1} &= K_{n,2j-1} - K_{n,2j} c \tan(\alpha_1 - 90^0), \quad n = 1, N1 \end{aligned} \quad (11)$$

де  $N1$  – кількість рівнянь рівноваги.

Граничні умови доповнюються врахуванням силових умов на контактній поверхні в тангенційному напрямку. Для цього сили в вузлах  $i, j$  проєктуються на контактну поверхню і прирівнюються до сил тертя, обчислених за співвідношеннями (4), (5). Це здійснюється перемноженням елементів матриці жорсткості на спрямовуючі косинуси. Отримання співвідношення записуються в рівняння  $2i$  та  $2j-1$ .

Здійснюючи корегування за співвідношеннями (11) необхідно враховувати, що елементи матриці жорсткості були змінені при врахуванні силових контактних умов.

Права частина кожного з рівнянь у відповідності з (10) дорівнює

$$\{F_n\} = \{F_n\} + K_{n,2j-1} \frac{\Delta_{ij}}{\sin(\alpha_2 - 90^\circ)}, \quad n = 1, N1$$

Врахування кінематичних контактних умов наведеним способом призводить до зменшення невідомих та, відповідно, кількості рівнянь і стовпців. В даному випадку необхідно вилучити рядок та стовпчик з індексом  $2j$ .

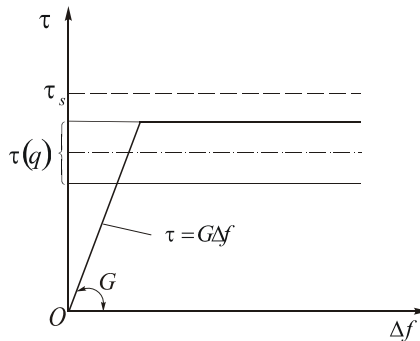


Рис.2. Залежність сил тертя від відносного проковзування

Аналогічні перетворення належить виконати для кожної пари контактуючих вузлів. При цьому необхідно враховувати, що в вектор вузлових переміщень, які отримують при рішенні системи рівнянь рівноваги, не увійдуть виключенні при корегуванні переміщення половини контактуючих вузлів. Тому їх нумерацію необхідно відповідним чином змінити. Однак перед обчисленням напружень вектор переміщень повинен бути визначений для всіх вузлів.

В загальному випадку отримане рішення повинно перевірятися на відсутність напружень розтягу на контактних поверхнях.

Рішення системи рівнянь (1), скорегованої наведеним способом, дає поле напружень та вузлових переміщень, використовуючи які визначаються сили тертя за співвідношеннями (4, 5).

Сили тертя нелінійно зв'язані з переміщеннями. Тому система (1) є нелінійною навіть при рішенні пружних задач. Ітераційна процедура розв'язку може бути аналогічна методу змінної жорсткості.

За аналогією з функцією текучості в теорії пластичності для сил тертя можна записати

$$f f = |\tau(f)| - \tau(q) \leq 0, \tag{12}$$

де  $\tau(\Delta f)$ ,  $\tau(q)$  – величина обчислених сил тертя та визначених з прийнятої моделі тертя, наприклад за законом Кулона,  $\Delta f$  – величина відносного проковзування.

Характер залежності сил тертя від переміщень можна продемонструвати графіками, зображеними на рис. 2.

Похили ділянки графіків відповідають силам тертя спокою, горизонтальні – ковзання. Кожному значенню нормального навантаження  $q$  відповідає своя величина сил тертя ковзання  $\tau(q)$  і своя горизонтальна пряма. Найбільша величина сил тертя для пластичних матеріалів не може перевищувати границі текучості  $\tau_s$ . Тому всі горизонтальні прямі на графіку будуть проходити нижче граничної прямої, що показано на рисунку пунктиром.

В процедурі змінної жорсткості на кожній ітерації призначається величина коефіцієнта жорсткості  $G$ , що відповідає напружено-деформованому стану.

Ознакою закінчення розрахунків є:

$$|\tau(\Delta f)| - \tau(q) \leq \xi,$$

де  $\xi$  – точність обчислень.

Для перевірки достовірності результатів розрахунку наведеним способом визначено напружено-деформований стан циліндрів різної висоти, посаджених з натягом. Розміри внутрішнього циліндру: висота  $H_1=0,67$  м, зовнішнього та внутрішнього діаметрів  $D_1=0,067$  м,  $d_1=0,035$ ; зовнішнього:  $h_2=0,035$ ,  $D_2=0,035$  м,  $d_2=0,035$  м, величина натягу прийнята рівною 0,0002 м. Зовнішній циліндр розташовувався симетрично серединного перерізу. Розраховані переміщення точок внутрішньої поверхні внутрішнього циліндру порівнювались з експериментальними. Відповідні графіки наведено на рис. 3. Як виходить з порівняння обчислених результати досить близькі до експериментальних, особливо в середній частині циліндрів.

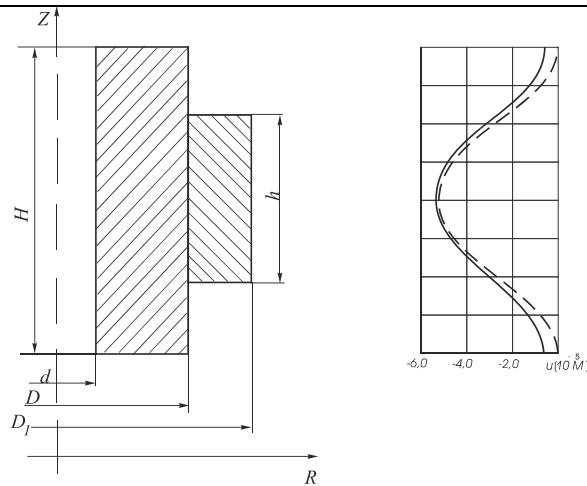


Рис.3. Результати обчислення переміщень точок поверхні двошарового циліндра

### Висновки

Запропонований спосіб врахування контактних умов є найбільш економічним серед відомих і забезпечує достатню точність. Найбільш доцільно його використовувати при обчисленні моделей з великими ділянками контактних поверхонь.

### Література

1. Sachdeva T.D., Ramakrishnan C.V. A finite element solution for two-dimensional elastic contact problems with friction. // Int. Journal Num. Meth. Engng. - 1981. - V. 17. - №8. - P. 1257 - 1271.
2. Паутов А.Н., Солюянова А.И. Метод фиктивных жесткостей в численном решении контактных задач. // Прикладные проблемы прочности и пластичности. - 1978, №9, С.49 - 54.
3. Фурунжиев Р.И. Контактные конечные элементы в расчетах конструкций с учетом податливости узловых связей. // В сб. Строит. Конструкций. - Минск. - 1978, №20, с.16 - 18.
4. Гольник Э.Р., Радченко И.Г. Дискретное моделирование упругих тел, контактно взаимодействующих при произвольных статических нагрузках, зазорах, натягах. // Изв. Вузов. – Машиностроение – 1987 - №12 - С.11 - 13.
5. Иосилевич Г.Б., Осипова Г.В. Решение конструкционно-контактных задач численными методами. - Машиностроение, №4, 1976, с.69 - 72.
6. Шевченко Ю.А. Применение метода конечных элементов к решению контактной задачи теории упругости с переменной зоной контакта без трения. // Ученые записки ЦАГИ – 1976 - т.7 - №6 - С.109 - 147.
7. Марченко В.Л. Разработка конструкций и методик проектирования осесимметричного инструмента для холодной объемной штамповки: Автореф. дисс.... канд. техн. наук. – М. – 1984. - 25 с.
8. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике. - М.: Мир. - 1975, с.541.

### References

1. Sachdeva T.D., Ramakrishnan C.V. A finite element solution for two-dimensional elastic contact problems with friction. // Int. Journal Num. Meth. Engng. - 1981. - V. 17. - №8. - P. 1257 - 1271.
2. Pautov A.N. AI Soluyanova The method of fictitious stiffness in the numerical solution of contact problems. // Applied problems of strength and ductility. - 1978, №9, P.49 - 54.
3. Furunzhiev R.I. Contact finite element structural analysis taking into account the compliance of the nodal connections. // In Sat Builds. Structures. - Minsk. - 1978, №20, p.16 - 18.
4. Golnik E.R., Radchenko I.G. Discrete modeling of elastic bodies, contact interaction with arbitrary static loads, clearances, interference. // Math. Universities. - Machinery - 1987 - №12 - p.11 - 13.
5. Iosilevich G.B., Osipov G.V. Solution construction- contact problems numerically. - Machinery, №4, 1976, p.69 - 72.
6. Yuri Shevchenko Application of finite element method to the solution of the contact problem of elasticity theory with variable contact area without friction. // Proceedings of TsAGI - 1976 - Volume 7 - №6 - P.109 - 147.
7. Marchenko V.L. Development of designs and design methodologies osesimetrichnogo tool for cold stamping ob'emnoy : Author. diss .... Candidate. tehn. Sciences. - M. - 1984. - 25.
8. Zenkevich D.C. The finite element method in the art. - New York: Wiley. - 1975, s.541.

Рецензія/Peer review : 18.1.2014 р.

Надрукована/Printed :7.2.2014 р.

Статтю представляє: д.т.н. Марченко В.Л.