

# Контактное взаимодействие упругих тел с начальными напряжениями

О. М. Гузь<sup>1</sup>, С. Ю. Бабич<sup>1</sup>, В. Б. Рудницкий<sup>2</sup>

1 Институт механики Национальной академии наук Украины, Киев, Украина

2 Хмельницкий национальный университет, Хмельницкий, Украина

Статья представляет собой обзор научных работ в области контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями, частично представленный в [1–8]. Исследования выполнены в рамках линеаризованной теории упругости [9–12] для сжимаемых и несжимаемых тел при произвольной структуре упругого потенциала в случае теории больших (конечных) начальных деформаций и различных вариантов теории малых начальных деформаций, а также с использованием конкретной формы упругого потенциала.

**Введение.** Исследование вопросов контактного взаимодействия твердых тел представляется весьма актуальной проблемой в связи с тем, что одним из наиболее распространенных на практике способов передачи внешних усилий является контактное взаимодействие.

В настоящее время по проблемам, относящимся к контактным задачам для упругих, вязкоупругих и пластических тел, в рамках классических постановок получены результаты исследований, охватывающие широкий круг вопросов. Подробный обзор исследований в области контактных задач дан в обзорных статьях Н. А. Кильчевского и Э. Н. Костюка [13], В. Л. Рвачева [14], Г. Я. Попова и Н. А. Ростовцева [15], Б. Л. Абрамяна [16], а также приведен в коллективной монографии под редакцией Л. А. Галина «Развитие теории контактных задач в СССР» [17]. Лев Александрович Галин является одним

из создателей важного направления математической теории упругости — теории контактных задач. Им исследовано большое число плоских и пространственных контактных задач теории упругости. Оригинальные, весьма экономичные методы позволили ему получить точное решение ряда двумерных задач для полуплоскости (в том числе, с учетом анизотропии и сил инерции). Стараясь приблизить постановку задач к реальным условиям контактного взаимодействия тел, Лев Александрович создал новое направление в теории смешанных задач — контактные задачи при учете поверхностной микроструктуры и изнашиваемости взаимодействующих тел плоскости [18].

Одним из важных факторов при контактном взаимодействии является учет начальных (остаточных) напряжений [8–11]. Несмотря на существенное достижение в развитии контактных задач, вопрос учета начальных напряжений при контактном взаимодействии остался почти полностью неразработанным до последнего времени. Как известно, практически во всех элементах конструкции присутствуют начальные напряжения, которые могут быть вызваны, например, технологическими операциями, проводимыми при изготовлении материалов или сборкой конструкции. В случае композиционных материалов начальные напряжения, как правило, соответствуют напряжениям вдоль армирующих элементов. В земной коре они образуются за счет действия гравитационных сил и технических процессов. Их необходимо учитывать при решении задач о деформации грунтов (особенно мерзлых). Кроме этого, в упругопластических телах также могут присутствовать внутренние остаточные напряжения после снятия нагрузок.

Учет начальных напряжений при расчете ответственных элементов конструкций, машин и сооружений позволит при их создании более эффективно учесть прочностные ресурсы материалов путем правильной оценки запасов прочности и существенно снизить их материалоемкость, сохраняя нужные фундаментальные характеристики в целом [1–4].

К настоящему времени в исследованиях контактных задач в телах с начальными напряжениями сложились два подхода. Первый из них связан с исследованиями для тел с конкретной формой упругого потенциала. По-видимому, первой работой в этом направлении явилась работа [19], в которой рассматривается смешанная задача для несжимаемого упругого тела с начальными напряжениями с потенциалом Трелоара (тело неогукковского типа).

Второй подход, который развивался параллельно с первым, как уже упоминалось, связан с исследованиями по контактным задачам для упругих тел с начальными напряжениями при произвольной структуре упругого потенциала [20,21]. Первыми в этом направлении являются работы [9, 10].

## **I. Жесткие штампы**

### **§ 1. Контактные задачи для тел с начальными напряжениями с конкретной формой упругого потенциала**

Одной из первых в этом направлении явилась работа [22], в которой исследована контактная задача для упругой полуплоскости (без учета сил трения) из несжимаемого материала Муни, подвергнутого равномерному одномерному растяжению вдоль границы полуплоскости. С учетом решения задачи о действии нормальной сосредоточенной силы на границу предварительно напряженной полуплоскости получено интегральное уравнение контактной задачи. Показано, что ядро интегрального уравнения для контактной задачи в случае предварительно напряженной полуплоскости отличается от ядра соответствующей классической контактной задачи множителем, зависящим от коэффициента предварительного растяжения. Установлено, что распределение контактного давления под плоским штампом совпадает с классическим. Для прямолинейного наклонного штампа закон распределения контактного давления отличается от классического.

Пространственная контактная задача для полупространства с

начальными напряжениями также для несжимаемого материала (тело неогукковского типа) рассмотрена в [23]. В случае штампа эллиптической формы в плане на основании численных расчетов дан анализ влияния начальных напряжений на распределение контактного давления. Аналогичная контактная задача для полупространства с начальными напряжениями несколько ранее опубликована в [24]. Материал полупространства также считался несжимаемым.

Дальнейшее развитие теории контактных задач для тел с начальными напряжениями для упругих потенциалов конкретной формы получены в работах В. М. Александрова, Н. Х. Арутюняна и их учеников: С. Р. Бруднова, И. В. Воротынцевой, В. С. Порошина, Б. И. Сметанина, Л. Н. Филипповой [25–45]. В работе [25] исследованы плоские контактные задачи для полупространства и слоя конечной глубины, предварительно напряженных действием сил тяжести и однородными усилиями на бесконечности. Предполагается, что материал, указанных деформируемых тел несжимаем, а силы трения в области контакта между штампом и границей тела отсутствуют. Изучены критические значения начальных напряжений. В частности, выявлены случаи потери эллиптичности линеаризованной системы уравнений (внутренняя потеря среды), а также обнаружены явления поверхностной потери устойчивости среды. Для потенциала Муни обнаружены значения начальных напряжений, когда полупространство (слой) начинает работать, как основание Винклера. В работе [31] изучена задача о взаимодействии гладкого жесткого штампа с упругой полуплоскостью из несжимаемого материала при учете начальных напряжений, создаваемых собственным весом полуплоскости (так называемая «тяжелая полуплоскость»). В [26, 27] для конкретных форм упругого потенциала в случае несжимаемого материала, предварительно напряженного действием сил тяжести и однородными усилиями на бесконечности, решены две задачи: контактная задача для полосы с начальными напряжениями и задача о вертикальной трещине конечной длины, выходящей на границу полуплоскости. Работы [30, 43, 44] посвящены контактными задачам для

физически нелинейного упругого слоя с начальными напряжениями (взаимно однозначная связь между деформациями и напряжениями имеет нелинейный характер). В первой работе рассматривается несжимаемая упругая среда. В результате относительно неизвестного контактного давления получено интегральное уравнение, которое отличается от интегрального уравнения контактной задачи для линейно-упругого слоя только видом некоторой функции и значением контактной жесткости. В качестве примера рассмотрен плоский эллиптический в плане штамп. В частности, установлено, что с увеличением начальных напряжений при постоянном внедрении штампа вдавливающая сила уменьшается. В последней работе исследуется контактная задача для слоя, предварительно напряженного равномерно распределенными на бесконечности усилиями, неодинаковыми вдоль двух взаимно перпендикулярных осей и параллельными граням слоя. В первом приближении показана полная аналогия контактной задачи для предварительно напряженного физически нелинейного упругого полупространства и задачи о вдавливании штампа в геометрически нелинейное упругое полупространство с начальными напряжениями. Установлено, что в случае неплоского эллиптического в плане штампа увеличение начальных напряжений вдоль одной из осей приводит к «вытягиванию» эллиптической области контакта в том же направлении. При этом, чем меньше эксцентриситет эллипса (области контакта), тем больше проявляется указанный эффект.

В работах [28, 37, 38] рассмотрены плоские и осесимметричные контактные задачи для физически нелинейного (геометрически линейного) и геометрически нелинейного (материал с потенциалом геометрического типа) слоя и пространства, предварительно напряженных однородными равномерно распределенными по толщине усилиями. С помощью интегрального преобразования Фурье в случае плоских задач и интегрального преобразования Ханкеля в случае осесимметричных задач рассматриваемые задачи сведены к решению интегральных уравнений первого рода с нерегулярными ядрами. С использованием асимптотических методов «больших и малых  $\lambda$ »

построены решения интегральных уравнений указанных задач, что позволило исследовать влияние начальных напряжений и нелинейных свойств среды на поведение механических характеристик рассмотренных задач. В частности, установлено что:

- а) начальные напряжения не изменяют порядка особенности поля напряжений в углах штампа, но влияют на величину напряжений и деформаций как непосредственно под штампом, так и во всей нелинейно-упругой области;
- б) величина вдавливающей силы при заданной осадке и контактных напряжениях существенно зависит от условий преднапряжения.

В этих же работах получены условия нарушения внутренней устойчивости среды, что тождественно нарушению эллиптичности линеаризованной системы уравнений, в зависимости от начальных напряжений. Для некоторых частных случаев нелинейно-упругих сред построены области допустимых значений начальных напряжений. Найдены критические значения начальных напряжений, при которых происходит потеря поверхностной деформируемости и устойчивости среды.

Осесимметричной задаче о вдавливании жесткого штампа в предварительно напряженное упругопластичное несжимаемое полупространство посвящена работа [29].

В работе [45] рассматривается контактная задача о внедрении симметрично расположенных круговых штампов в торцы кругового цилиндра, изготовленного из нелинейно-упругого изотропного несжимаемого материала при наличии в цилиндре однородного поля начальных напряжений. Предполагается, что трение между штампами и упругим телом отсутствует, а боковая поверхность цилиндра свободна от касательных напряжений и нормальных перемещений. Указанная контактная задача приведена к парному ряду — уравнению, решение которого сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений с сингулярной матрицей. Числовые при-

емы рассмотрены для распространенных моделей резиноподобных материалов (потенциалы Муни и Бартенева–Хазановича). В результате вычислены контактные напряжения и жесткость цилиндра в зависимости от начальных напряжений (боковое сжатие или растяжение), а также геометрических параметров цилиндра. В частности для материала Муни показано, что жесткость системы штамп-цилиндр с увеличением растяжения (сжатия) убывает до некоторого минимального значения, а затем возрастает; для материала Бартенева–Хазановича с увеличением указанного коэффициента жесткость системы монотонно убывает. Отмечается, что для рассматриваемых материалов при стремлении радиуса цилиндра к радиусу штампа жесткость неограниченно возрастает.

Необходимо отметить, что исследование по контактным задачам с начальными напряжениями в случае конкретных форм упругого потенциала развиваются параллельно и за рубежом. Кроме двух упомянутых выше работ [19, 24] следует отметить работы [46, 47], а также [48, 49]. Одна из них [48] посвящена задаче Буссинеска для предварительно напряженного несжимаемого упругого полупространства с потенциалом Трелоара (тело неогуковской силы) в случае штампа произвольной формы. В [49] рассмотрена осесимметричная контактная задача для слоя с начальными напряжениями. Материал слоя также несжимаем, а упругий потенциал соответствует неогуковскому телу.

К названному выше направлению по контактным задачам для тел с начальными напряжениями применительно к упругим потенциалам конкретной формы примыкают исследования вибраций жестких штампов на поверхности предварительно напряженных тел. Им посвящены работы [32, 34, 51, 52]. В других работах [50, 51] с тех же позиций исследуются задачи о вибрации жесткого штампа на поверхности цилиндра и полупространства с начальными напряжениями. Среда предполагается сжимаемой и рассматриваются гармонические колебания штампа. Работы [32–34] посвящены задаче о колебании жесткого штампа на поверхности предварительно напряжен-

ного слоя и задаче о вибрации жесткого банджа на поверхности предварительно напряженного кругового цилиндра. Предполагается неоднородность среды с неоднородными начальными напряжениями (упругие параметры среды и начальные напряжения — некоторые произвольные гладкие функции одной из координат: глубины слоя, радиуса цилиндра). И, наконец, в работах [35, 36] изучены волновые поля в слое с начальными напряжениями из несжимаемого материала, вызванные вибрирующим на его поверхности жестким штампом. Во всех перечисленных работах на основании численных расчетов выявлено влияние интенсивности начальной деформации и выбора формы упругого потенциала на основные характеристики волнового процесса.

## **§ 2. Контактные задачи кручения для упругих тел с начальными напряжениями**

Как уже отмечалось, первыми в этом направлении являются работы [9, 10]. Они относятся к постановке контактных задач в рамках линеаризированной теории упругости соответственно для сжимаемых и несжимаемых тел с начальными напряжениями при произвольной форме упругого потенциала. Рассмотрены методы решения отдельных классов задач. В частности, приведены примеры решения статической контактной задачи кручения для полупространства с начальными напряжениями. Получены простые формулы для определения момента, приложенного к штампу через угол поворота  $\varepsilon$ . Числовой пример рассмотрен для сжимаемого тела с потенциалом гармонического типа. В работе [53] рассмотрены контактные задачи для упругого слоя с начальными напряжениями. С использованием интегрального преобразования Ханкеля данные задачи сводятся к парным интегральным уравнениям, которые, в свою очередь, сводятся к интегральному уравнению Фредгольма II рода. Для решения последнего уравнения используются численные методы. В качестве примера рассмотрим слой из сжимаемого материала, свойства которого описываются упругим потенциалом гармонического типа и

несжимаемого материала с упругим потенциалом типа Бартенева–Хазановича. Анализ представленных данных показывает, что при сжатии материала слоя влияние начальных (остаточных) напряжений более существенно, чем при растяжении. Выполнен предельный переход полупространства с начальными напряжениями и получено выражение для определения момента, совпадающее с результатами работ [9, 10].

### **§ 3. Плоские контактные задачи для упругих тел с начальными напряжениями**

**1. Статические задачи.** Рассмотренные ниже контактные задачи решаются на основании комплексных потенциалов, введенных одним из авторов настоящей статьи в [58–60] в случае плоской статической линеаризированной задачи теории упругости для тел с начальными напряжениями с использованием аппарата теории функции комплексной переменной, методов задачи Римана–Гильберта и интегральных преобразований Фурье.

Общая постановка контактных задач для полуплоскости с начальными напряжениями без учета сил трения применительно к одному штампу в рамках второго подхода выполнена в [11]. Показано, что при действии без трения штампа с плоским основанием на упругую полуплоскость с начальными напряжениями давление под штампом не зависит от начальных напряжений, если корни определяющего уравнения чисто мнимые и различные.

В работе [60] вышеизложенное утверждение получено в общем случае без дополнительных условий, касающихся мнимости корней определяющего уравнения, для равных корней.

В работах [11, 60] отмечено, что задача Римана–Гильберта, к которой приводится контактная задача для полуплоскости с начальными напряжениями, по структуре совпадает с задачей Римана–Гильберта, к которой приводится контактная задача для полуплоскости без начальных напряжений, но с учетом сил трения. Распределение напряженно-деформированного состояния полуплоскости для этих

задач будет различно, так как различны в общем случае комплексные потенциалы. Кроме этого, для штампа, имеющего закругленное основание, показано, что влияние начальных напряжений в рассматриваемых классах задач весьма существенно при больших начальных деформациях.

В работах [11, 60] и [54–56, 61, 62] рассмотрены и получены точные решения контактной задачи для полуплоскости с начальными напряжениями с учетом сил трения в случае одного штампа и при давлении системы абсолютно жестких штампов с трением и без трения. В последнем случае решение контактной задачи приводится в общей форме для связанных и несвязанных штампов с использованием формулы Келдыша–Седова. Для конкретных упругих потенциалов приведены графики зависимости основных параметров контактного взаимодействия от частного значения начальных напряжений. Наиболее характерные графики распределения контактного давления в зависимости от численных значений начальных напряжений применительно к одному штампу с учетом трения приведены на рис. 1, 2, причем рисунок 1 соответствует сжимаемому телу с потенциалом гармонического типа, а рисунок 2 потенциалу Бартенева–Хазановича для несжимаемого тела [56]. В указанных работах установлено, что распределение давления под штампами (для одного, двух штампов с прямолинейными основаниями) без учета сил трения не зависит от начальных напряжений, однако распределение напряжений и перемещений в полуплоскости зависит от начальных напряжений. Давление под штампами с прямолинейными основаниями с учетом сил трения зависит от начальных напряжений, причем, эта зависимость существенная для несжимаемых тел при больших начальных деформациях. Давление под штампами с закругленными основаниями даже в случае отсутствия трения также существенно зависит от начальных напряжений.

Общими выводами инженерного характера для всех указанных в данном параграфе работ являются:

- 1) С увеличением коэффициента трения контактирующих поверх-

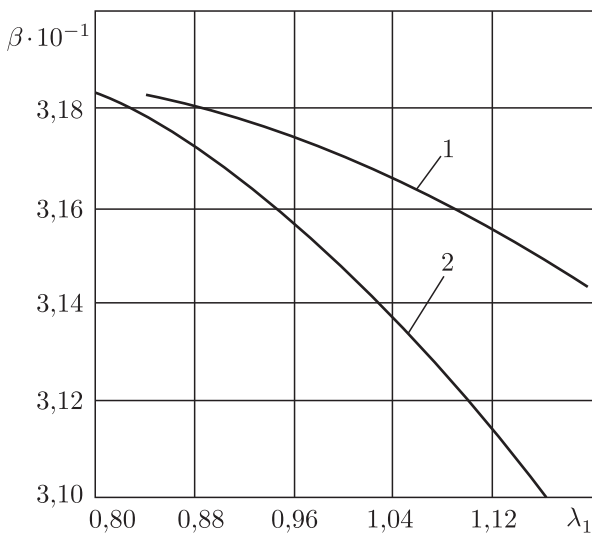


Рис. 1. Контактное давление, зависящее от величины начальных напряжений под штампом, с учетом трения для гармонического потенциала, где  $\beta$  — контактное давление,  $\lambda_1$  — удлинение, определяющее начальное напряжение

ностей происходит существенное увеличение влияния начальных напряжений на распределение контактного давления, при этом в случае отсутствия трения (для плоского штампа) начальные напряжения не оказывают влияния. Таким образом, если с точки зрения инженерной практики необходимо уменьшить влияние начальных напряжений, то следует уменьшить коэффициент трения между контактирующими поверхностями.

- 2) При достижении начальным состоянием значений, соответствующих поверхностной неустойчивости полуплоскости, давление под штампом оказывается равным нулю, а перемещение существенно увеличивается, то есть для малых смещений штампа (в рамках линеаризованной теории) почти не нужно прилагать усилий. Поэтому с инженерной точки зрения является весьма нежелательным возникновение начальных напряжений, по ве-

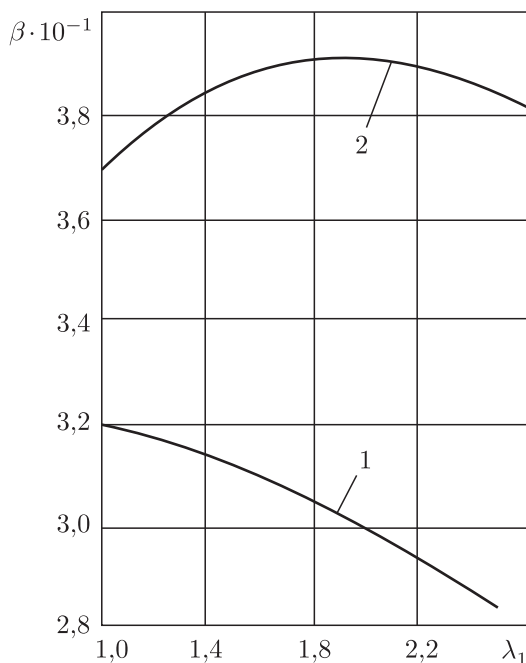


Рис. 2. Контактное давление, зависящее от величины начальных напряжений под штампом, с учетом трения для потенциала Бартенева – Хазановича, где  $\beta$  – контактное давление,  $\lambda_1$  – удлинение, определяющее начальное напряжение

личине близких к тем, при которых имеет место поверхностная неустойчивость.

В работах [63, 64] на основании общих решений плоских статических линейаризованных задач теории упругости для тел с начальными напряжениями [8] рассматривается контактная задача для полосы с начальными напряжениями, лежащей на жестком основании и на упругой полуплоскости с начальными напряжениями. В первом случае [63] исследуется действие жесткого штампа без трения на упругую предварительно напряженную полосу, лежащую на жестком основании. Во втором случае [64] предполагается, что полоса

с начальными напряжениями и полуплоскость находятся в условиях скользящего контакта. Указанные контактные задачи с использованием интегрального преобразования Фурье сведены к парным интегральным уравнениям. В последней работе также рассмотрим предельный случай, соответствующий двум полуплоскостям с начальными напряжениями для сколь угодно толстой полосы.

**2. Динамические задачи.** В работах [65–68] рассмотрены плоские динамические задачи для упругих сжимаемых и несжимаемых тел с начальными напряжениями, когда исходные динамические задачи допускают преобразование к стационарным задачам в подвижной системе координат, движущейся прямолинейно с постоянной скоростью. В результате, для напряжений и перемещений выведены формулы через комплексные потенциалы. Отметим, что представления напряжений и перемещений через комплексные потенциалы выражаются формулами одинаковой структуры как для статических, так и для динамических задач.

Введенные соотношения через комплексные потенциалы содержат следующие предельные случаи. При отсутствии начальных напряжений комплексные потенциалы переходят в известные комплексные представления динамических задач линейной упругости в форме Л. А. Галина. При скорости движения нагрузок и штампов, равной нулю, также без начальных напряжений комплексные потенциалы в случае равных корней определяющего уравнения переходят в комплексные потенциалы Колосова–Мухелишвили для изотропного тела и в случае неравных корней — в комплексные потенциалы С. Г. Лехницкого для ортотропного тела. И, наконец, при скорости движения, равной нулю, с учетом начальных напряжений комплексные потенциалы переходят в комплексные потенциалы статических линеаризованных плоских задач в форме, предложенной в работах [12, 58–60]. В качестве одного из примеров применения вышеизложенного аппарата (комплексных потенциалов) в [68] рассмотрена задача о распространении поверхностных волн Релея в полуплоскости с начальными напряжениями.

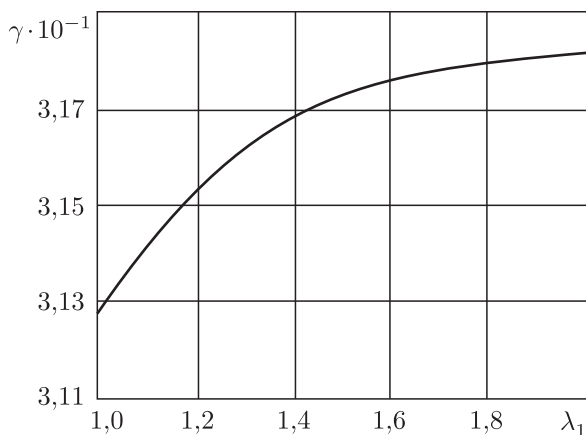


Рис. 3. Влияние начальных напряжений на распределение контактного давления под плоским штампом, где  $\gamma$  — контактное давление

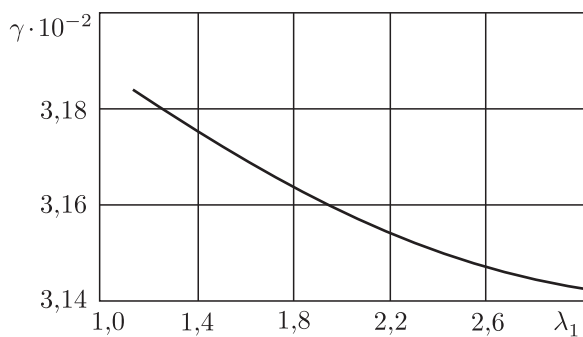


Рис. 4. Влияние начальных напряжений на распределение контактного давления под штампом с закругленным основанием, где  $\gamma$  — контактное давление

С использованием введенных комплексных потенциалов [57, 69, 70] исследована плоская задача о штампе, движущемся вдоль границы упругой полуплоскости с начальными напряжениями при наличии трения между штампом и полуплоскостью. Указанная контактная задача сведена к задаче Римана–Гильберта, допускающей точное

решение. На основании численных расчетов в [57] исследовано влияние начальных напряжений на распределение контактного давления для плоского штампа и штампа с закругленным основанием (рис. 3, 4 [57]). Также установлено, что при приближении скорости движения штампов к скоростям поверхностных волн Релея вдоль плоской границы в телах с начальными напряжениями возникают своеобразные явления «резонансного характера», связанные с безграничным возрастанием напряжений в упругом теле. Аналогичные явления возникают и в классической механике для тел без начальных напряжений, когда скорость движения приближается к скорости волн Релея в материале без начальных напряжений, однако в этом случае скорость волн Релея — величина постоянная для данного материала, и, следовательно, имеет одно критическое значение скорости движения. В линеаризованной теории упругости для тел с начальными напряжениями получаем критическое значение скорости движения, равное скорости волн Релея в материале с начальными напряжениями. Так как скорость поверхностных волн непрерывно зависит от начальных напряжений [21, 70], получаем непрерывный спектр критических скоростей движений. В связи с этим за счет начальных напряжений можно управлять критической скоростью движения штампов. К перечисленным выше работам примыкают работы [71–75], в которых рассматривается плоская задача о взаимодействии подвижной нагрузки на границу сжимаемого слоистого полупространства с начальными напряжениями, состоящего из слоя и подстилающего его полупространства. Предполагается, что динамическое поведение слоя может быть описано с помощью теории пластин, в которой учитывается сдвиг и инерция вращения. Материал полупространства подвергнут статической деформации и является изотропным в естественном состоянии. Рассмотрены два случая контакта — жесткий и нежесткий — между пластиной и полупространством. Указанные задачи решаются на основании соотношений линеаризованной теории упругости для тел с начальными напряжениями с использованием интегральных преобразований Фурье. Наиболее характерные

зависимости влияния начальных напряжений, следуя [71, 76], приведены на рис. 5–8. Из анализа полученных численных результатов следует, что количество критических скоростей движения нагрузки существенно зависит от начальных напряжений в полупространстве, механических характеристик пластины, полупространства и условий их сопряжения. Влияние начальных напряжений на значения критических скоростей более существенно для сравнительно мягких пластин и для нежесткого контакта. Эта же задача для случая неравных корней определяющего уравнения рассмотрена в [76] методом комплексных потенциалов, введенных в работах [65, 66]. Показано совпадение результатов, полученных методом интегральных преобразований Фурье и методом комплексных потенциалов. Для конкретных упругих потенциалов исследовано влияние при различных начальных напряжениях, скоростях движения нагрузки и условиях контакта на значение основных характеристик напряженно-деформированного состояния двухслойного полупространства.

#### **§ 4. Пространственные контактные задачи в телах с начальными напряжениями**

В работах [77–81] рассмотрены контактные задачи для упругого полупространства с начальными напряжениями без учета сил трения. Первая работа посвящена исследованию влияния предварительной однородной деформации упругого полупространства на напряженно-деформированное состояние, вызванное действием штампов на границу полупространства. Для произвольной области контакта, согласно [12], задачи сведены к смешанной задаче для гармонического потенциала, совпадающей при указанной замене постоянных с соответствующей задачей, к которой приводятся контактные задачи классической линейной теории упругости. Указанная аналогия позволила обосновать и для рассматриваемого в данной работе класса контактных задач ранее высказанные (применительно к плоским задачам) утверждения о пропорциональности контактных давлений, рассчитанных с учетом и без учета начальных напряжений, и

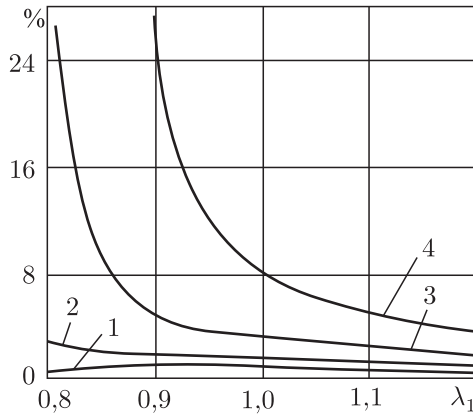


Рис. 5. Влияние учета инерции вращения на значение составляющей напряжения  $\tilde{Q}_{22}$  при нежестком контакте для сжимаемого материала с гармоническим потенциалом. (Кривые 1, 2, 3 и 4 соответствуют значениям скорости  $v^2 = 0,1c_s^2$ ,  $v^2 = 0,2c_s^2$ ,  $v^2 = 0,3c_s^2$  и  $v^2 = 0,4c_s^2$ , где  $c_s$  — скорость сдвиговых волн в слое. Напряжение определяется в точке  $y_1 = -\lambda_1 h$ ;  $y_2 = -2h/\lambda_2$ .  $\lambda_i$  — начальные удлинения,  $h$  — толщина слоя.)

утверждение о существовании критического коэффициента предварительного нагружения, отвечающего наступлению поверхностной неустойчивости.

В [80], наряду с вопросами, рассмотренными также в [77, 78], исследуется контактная задача для полупространства с начальными напряжениями в случае плоского и неплоского эллиптического штампа. В последнем случае линия действия прижимающей штамп силы совпадает с его осью.

В качестве примера сведения смешанной задачи с начальными напряжениями к классической смешанной задаче теории потенциала в [77, 81] рассмотрена осесимметричная контактная задача для полупространства с начальными напряжениями. Отмечается, что хотя смешанная задача для потенциала, к которой приводится контактная задача в случае упругого полупространства с начальными напряжениями, совпадает с соответствующей смешанной задачей для полу-

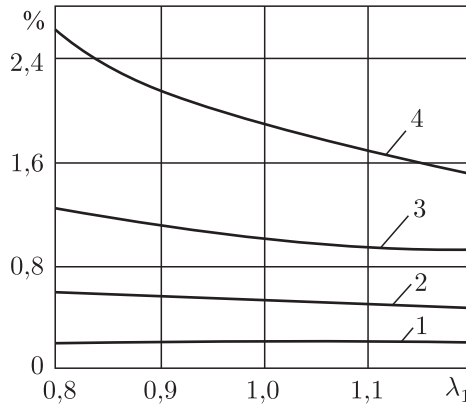


Рис. 6. Влияние учета инерции вращения на значение составляющей напряжения  $\tilde{Q}_{22}$  при жестком контакте для сжимаемого материала с гармоническим потенциалом. (Кривые 1, 2, 3 и 4 соответствуют значениям скорости  $v^2 = 0,1c_s^2$ ,  $v^2 = 0,2c_s^2$ ,  $v^2 = 0,3c_s^2$  и  $v^2 = 0,4c_s^2$ , где  $c_s$  — скорость сдвиговых волн в слое. Напряжение определяется в точке  $y_1 = -\lambda_1 h$ ;  $y_2 = -2h/\lambda_2$ .  $\lambda_i$  — начальные удлинения,  $h$  — толщина слоя.)

пространства без начальных напряжений, однако напряженно-деформированные состояния в полупространстве для указанных задач будут различными. Последнее связано с тем, что для данных задач различным образом представляются перемещения и напряжения через гармонические функции своих аргументов. На рис. 9 и 10 (кривая 1;  $\nu = 0,1$ ) для сжимаемого полупространства в случае гармонического потенциала согласно [81] приведены кривые распределения контактного давления в зависимости от коэффициента удлинения  $\lambda_1$ .  $\tilde{Q}_{33}$ ,  $Q_{33}^0$  — это, соответственно, напряжения с учетом и без учета начальных напряжений. При этом кривые 1–4 построены соответственно для коэффициента Пуассона  $\nu = 0,2; 0,3; 0,4; 0,5$  и  $\lambda_1^{kp} = (1 + \nu)(2 + \nu)^{-1}$ . На рис. 10 эта же зависимость построена для несжимаемого полупространства в случае потенциалов Бартенева–Хазановича (кривая 2) и Трелоара (кривая 3). По этим графикам можно заключить, что влияние начальных напряжений на распределение

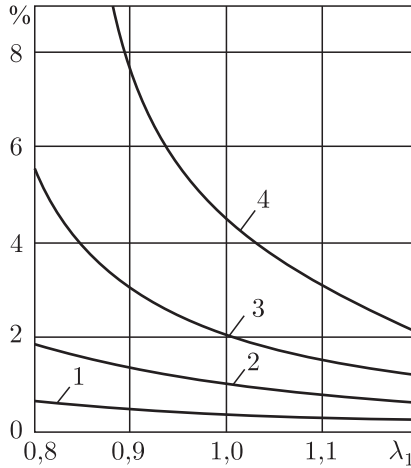


Рис. 7. Влияние учета инерции вращения на значение составляющей напряжения  $\tilde{Q}_{22}$  при нежестком контакте для несжимаемого материала с потенциалом Бартенева–Хазановича. (Кривые 1, 2, 3 и 4 соответствуют значениям скорости  $v^2 = 0,1c_s^2$ ,  $v^2 = 0,2c_s^2$ ,  $v^2 = 0,3c_s^2$  и  $v^2 = 0,4c_s^2$ , где  $c_s$  — скорость сдвиговых волн в слое. Напряжение определяется в точке  $y_1 = -\lambda_1 h$ ;  $y_2 = -2\lambda_1 h$ .  $\lambda_i$  — начальные удлинения,  $h$  — толщина слоя.)

контактного давления в случае несжимаемых (высокоэластических) тел довольно существенное.

Вопросам вдавливания без трения жесткого кругового штампа в слой с начальными напряжениями посвящены работы [82–87]. Используются общие решения пространственных статических линейризованных задач (осесимметричный случай). В [82, 85] рассматривается слой, находящийся на жестком основании. В [83] исследуется контактная задача для кругового штампа, действующего на упругий слой с начальными напряжениями, лежащий на упругом полупространстве с начальными напряжениями. В последнем случае предполагается, что слой и полупространство в естественном, без начальных напряжений, состоянии не соединены между собой и, таким образом, в них могут возникать различные напряженно-деформирован-

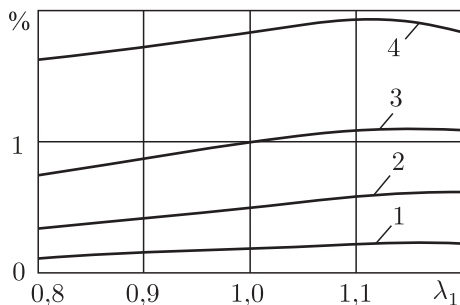


Рис. 8. Влияние учета инерции вращения на значение составляющей напряжения  $\tilde{Q}_{22}$  при жестком контакте для несжимаемого материала с потенциалом Бартенева–Хазановича. (Кривые 1, 2, 3 и 4 соответствуют значениям скорости  $v^2 = 0,1c_s^2$ ,  $v^2 = 0,2c_s^2$ ,  $v^2 = 0,3c_s^2$  и  $v^2 = 0,4c_s^2$ , где  $c_s$  – скорость сдвиговых волн в слое. Напряжение определяется в точке  $y_1 = -\lambda_1 h$ ;  $y_2 = -2\lambda_1 h$ .  $\lambda_i$  – начальные удлинения,  $h$  – толщина слоя.)

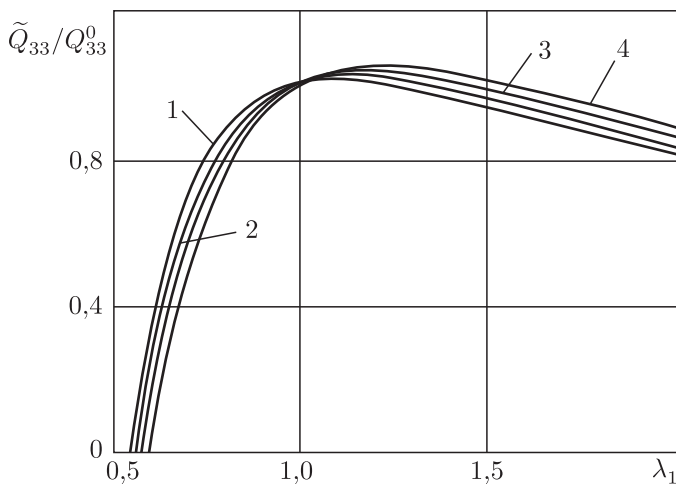


Рис. 9. Распределение контактного давления под штампом в зависимости от коэффициента удлинения в случае гармонического потенциала, где  $\tilde{Q}_{33}/Q_{33}^0$  – отношение напряжений с учетом и без начальных напряжений. Здесь и далее  $\lambda_1$  – удлинение, определяющее начальное напряжение

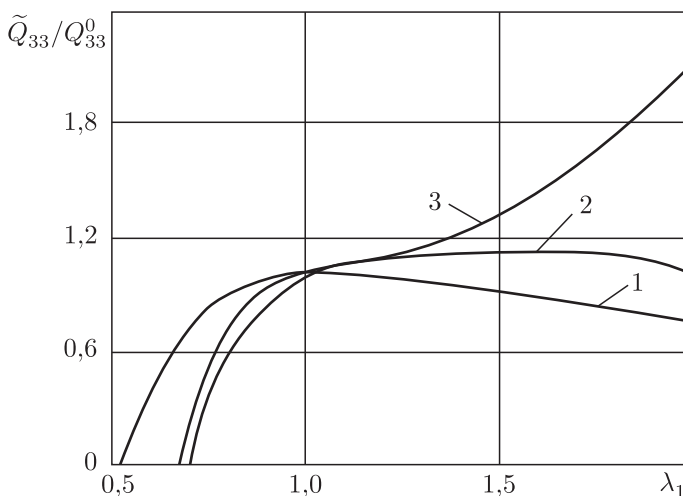


Рис. 10. Распределение контактного давления под штампом в зависимости от коэффициента удлинения в случае потенциала Бартенева–Хазановича (кривая 2) и Трелоара (кривая 3), где  $\tilde{Q}_{33}/Q_{33}^0$  — отношение напряжений с учетом и без начальных напряжений. Здесь и далее  $\lambda_1$  — удлинение, определяющее начальное напряжение

ные состояния. После начального деформирования слой и полупространство соединяются между собой, и к указанной связанной системе прикладывается жесткий штамп. В [84] на основании численного решения интегрального уравнения Фредгольма получены результаты, характеризующие влияние начальных напряжений на основные характеристики контактного взаимодействия. В частности, установлено, что при значениях начальных напряжений, близких к критическим, напряжения под штампом незначительны, однако перемещения существенно увеличиваются. С увеличением сжимающих напряжений компоненты напряженно-деформированного состояния значительно возрастают, чем при увеличении растягивающих начальных напряжений. Таким образом, при контактном взаимодействии (в рассмотренном случае) сжимающие начальные напряжения являются более опасными по сравнению с растягивающими. Кроме этого, в

этой задаче наблюдается существенное влияние начальных напряжений при подходе к краям штампа. В случае упругого основания [83] предполагается, что трение между штампом и слоем отсутствует, а слой и полупространство находятся в условиях полного сцепления. Указанная контактная задача, как и в случае жесткого основания, может быть приведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода для тех значений коэффициентов удлинений, при которых не возникает поверхностная неустойчивость. Также рассмотрены некоторые предельные случаи. В частности, для сколь угодно толстого слоя получены характеристические уравнения, которые соответствуют поверхностной неустойчивости двух полупространств с начальными напряжениями при полном их сцеплении.

Таким образом, в этом разделе приведены исследования контактных задач для предварительно напряженных тел лишь применительно к жестким штампам. По мнению авторов, дальнейший прогресс в развитии механики контактного взаимодействия предварительно напряженных тел (как в случае жестких, так и упругих штампов) определяется исследованием более сложных классов задач (для упругих, вязкоупругих и пластических тел), а также проведением экспериментальных исследований степени влияния начальных напряжений на основные характеристики контактного взаимодействия конструкционных материалов.

## **II. Упругие штампы**

### **§ 1. Постановка задач и общий метод решения**

Несмотря на обширную литературу по контактной задаче линейризованной теории упругости [5–7], исследования по проблемам упругого контактного взаимодействия тел с начальными напряжениями в нашей стране и за рубежом появились лишь в последнее время [7]. Последнее обстоятельство приобретает особый интерес в связи с внедрением в практику новых искусственных материалов, которые могут выдерживать большие начальные деформации. Ино-

гда целесообразно преднамеренно создавать начальные напряжения, остаточные и технологические, для компенсации и регулировки тех напряжений, которые возникают в элементах конструкций, а также для повышения прочностных характеристик, на что еще ранее (в рамках классической теории упругости) обратил внимание Л. А. Галин. Он со своими сотрудниками предложили теорию самоподдерживающегося разрушения, которая описывает динамику процесса разрушения за счет остаточных напряжений преднапряженных высокопрочных стекол. Это в основном связано с тем, что при исследовании задач о контактном взаимодействии упругих тел с начальными напряжениями линейная теория упругости не учитывает влияния этих напряжений. Их можно учесть в рамках линеаризованной теории упругости [3–9, 88]. Учет начальных напряжений в рамках линеаризованной теории упругости приводит к новым постановкам задач взаимодействия деформированных тел, существенно отличающимся от постановок классических задач теории упругости. И хотя при решении этих задач системы основных дифференциальных уравнений, выражения для определения составляющих тензора напряжений и структура граничных условий отличается от соответствующих систем уравнений и выражений тензора напряжений теории упругости, они по своей природе и структуре родственны обычным контактными смешанным задачам [17, 18].

В первой работе [89], посвященной контактному взаимодействию упругих тел с начальными напряжениями, рассматривается общая пространственная статическая задача о давлении упругого штампа произвольного поперечного сечения на упругое полупространство без учета сил трения (рис. 11). В этой работе дана постановка и общий метод решения задачи в случае упругих потенциалов произвольной формы в общем виде для теорий больших (конечных) начальных деформаций и различных вариантов теории малых начальных деформаций. При постановке указанных задач во всех реферируемых работах принимаются четыре предположения, которые

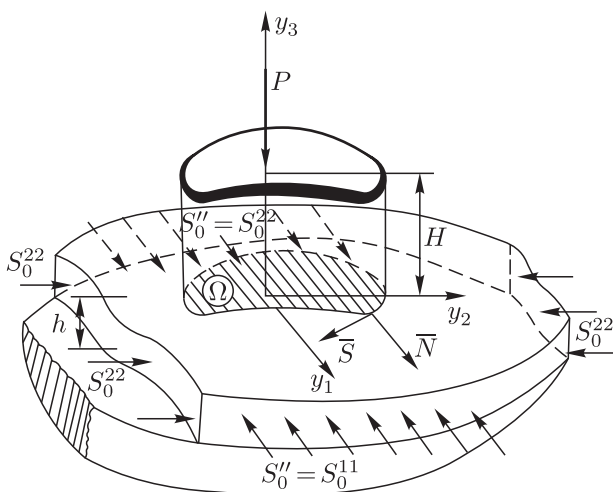


Рис. 11. Схема распределения приложенных внешних и внутренних сил

являются основными в рассматриваемой теории контактного взаимодействия тел с начальными напряжениями и упругих штампов:

- 1) контактное взаимодействие упругого штампа без начальных напряжений с предварительно напряженным упругим телом осуществляется после возникновения в последнем начального напряженного состояния;
- 2) действующие на упругий штамп внешние нагрузки вызывают в предварительно напряженном теле возмущения напряженно-деформированного состояния по величине значительно меньшие соответствующих величин начального напряженного состояния;
- 3) начальное напряженное состояние одного из взаимодействующих тел имеет такую структуру, что в области их взаимодействия можно (приближенно, с достаточной степенью точности) считать начальное напряженное состояние однородным;
- 4) решение линеаризованных задач теории упругости о контакт-

ном взаимодействии предварительно напряженных тел и упругих штампов — единственное.

Отметим, что три последних допущения адекватны допущениям, сформулированным в теории хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями [12]. Первое допущение предполагает контакт взаимодействующих тел после возникновения в одном из них начальных напряжений. Второе допущение дает возможность применять линеаризованную теорию упругости [3–9] для исследования дополнительного к начальному напряженно-деформированного состояния. Третье допущение дает возможность с учетом второго допущения с достаточной для инженерных расчетов точностью общее начальное напряженное состояние аппроксимировать однородным начальным напряженным состоянием. Четвертое допущение обеспечивает единственность решения полученной таким образом линеаризованной задачи о взаимодействии упругого штампа произвольного поперечного сечения с предварительно напряженным упругим полупространством. В работах [14–38, 89–91] отмечается, что исследование линеаризованных задач контактного взаимодействия упругих штампов с предварительно напряженными телами без выполнения четвертого условия лишено всякого смысла, так как в этом случае может возникнуть потеря внутренней устойчивости (терминология [88]), которая в рамках плоской и пространственной линеаризованных задач достаточно подробно исследована в [12, 20, 21, 92–96]. Как отмечено в [89–91, 96–104], появление внутренней потери устойчивости привело бы к нарушению условия единственности решений. Отмечено также [89–91], что второе допущение при рассматриваемом подходе нарушается в окрестности точек изменения граничных условий. В этих точках возмущения напряжений (напряжение линеаризованной теории упругости) неограниченно возрастают. Подобная ситуация возникает и в контактных задачах линейной теории упругости. В теории контактных задач (классическая теория упругости) по этому вопросу проведено подробное обсуждение (обзор по этим работам приведен в [17, 18]). Вывод из указанного обсуждения для тео-

рии контактных задач линейной теории упругости заключается в следующем: в решениях контактных задач (плоской и пространственной) для жестких и упругих штампов возникают особенности степенного порядка  $O(\rho_k^{1-\gamma})$ , где  $\rho_k$  — расстояние от любой точки контакта тела до ее границы,  $\gamma$  — параметр, определяемый из некоторого трансцендентного уравнения и зависящий от упругих постоянных контактирующих тел и их конфигурации. Эти особенности возникают в точках изменения граничных условий. В этих точках контактные напряжения принимают «бесконечные» значения и, безусловно, не имеют физического смысла. Однако, на вычисление интегральных характеристик, (осадка и т. д.) в контактных задачах для жестких и упругих штампов эти особенности влияния не оказывают. Изложенный выше вывод полностью относится и к задачам контактного взаимодействия предварительно напряженных тел [1, 89–91, 105–120] с одним лишь замечанием: параметр теперь существенно зависит еще и от структуры упругого потенциала [12, 20, 21, 92–95].

В [89] на основании четвертого предположения в случае пространственных задач контактного взаимодействия однородное состояние принимается в виде  $S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0$ ;  $S_0^{33} = 0$ ;  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ , здесь  $\lambda_i$  — коэффициенты удлинения, определяющие перемещения начального состояния.

При таких предположениях в [89] рассматривается контактное взаимодействие упругого штампа произвольного поперечного сечения с предварительно напряженным полупространством (рис. 11).

В работе [89] сформулирован общий метод решения указанных задач линеаризованной теории упругости, который дает возможность построить точные решения задачи контактного взаимодействия тел с начальными напряжениями, для которых построены решения соответствующих задач в случае линейно упругого тела без начальных напряжений (рис. 1).

Сравнивая перемещения в соответствующих линейных задачах [18] с результатами задач для тел с начальными напряжениями [89, 96, 98, 103, 108, 110, 112, 117, 122] для равных и неравных

корней [89], находим, что перемещение под упругим штампом, взаимодействующим с полупространством с начальными напряжениями, можно представить в виде  $U_3(y_1, y_2, 0) = kU_3^0(y_1, y_2, 0)$ , где  $k$  — коэффициент, характеризующий влияние начальных напряжений;  $U_3$  и  $U_3^0$  — соответственно вертикальные перемещения под штампом в полупространстве с начальными напряжениями и без них. Коэффициент  $k$  не зависит от поперечного сечения и формы штампа [89, 96, 107, 108, 110, 122].

Заметим, что коэффициент  $k$  обращается в бесконечность при выполнении условий:  $\lambda_1 = \lambda_{kp} = 0,69336$  — для потенциала Бартенава–Хазановича;  $\lambda_1 = \lambda_{kp} = 0,667$  — для потенциала Трелоара. Значение  $\lambda_1 = \lambda_{kp}$  соответствует начальному удлинению, при значении которого наступает поверхностная неустойчивость полупространства при равномерном двухосном сжатии [93–95]. Таким образом, при стремлении начальных напряжений к величинам, соответствующим поверхностной неустойчивости полупространства, проявляются эффекты «резонансного» характера, т. е. новый механический эффект, соответствующий аналогичным явлениям для задач механики хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями [12] и для контактных задач в рамках линеаризованной теории упругости [8, 20, 21, 92–95] в случае жестких штампов [1]. На рис. 12 показана графическая зависимость коэффициента удлинения  $\lambda_1$ , полученная в [89, 96, 107, 108, 110, 121, 122] в случае растяжения ( $\lambda_1 > 1$ ) и сжатия ( $\lambda_1 < 1$ ). Влияние начальных напряжений на перемещения под штампом проявляется в следующем: при сжатии перемещения под штампом как для сжимаемых, так и для несжимаемых тел увеличиваются, при растяжении это увеличение незначительно.

Отметим, что предложенный общий метод решения линеаризованных контактных задач [89] использован для решения аналогичных задач в случае плоского начального напряженного состояния [90, 91, 96, 97, 104–106, 111, 113, 118, 123, 124].

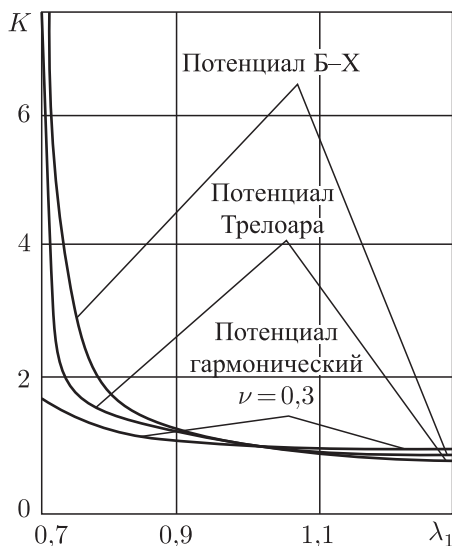


Рис. 12. Влияние начальных напряжений на перемещения под упругим штампом, характеризуемое коэффициентом  $k$

## § 2. Полупространство с начальными напряжениями под действием упругого конечного штампа

Рассмотрены следующие контактные задачи: а) давление упругого конечного цилиндрического штампа на полупространство с начальными напряжениями [89, 98, 107, 108, 110, 112, 122], а также случай, когда полупространство и упругий штамп предварительно напряжены [119]; б) взаимодействие двух предварительно напряженных полупространств с упругим конечным цилиндрическим штампом [103, 104].

Предполагается, что упругий штамп — изотропное тело, а полупространство с начальными напряжениями может быть изготовлено из сжимаемых или несжимаемых изотропных, композиционных, высокоэластичных материалов. Система упругий штамп – полупространство с начальными напряжениями подвержена осесимметрич-

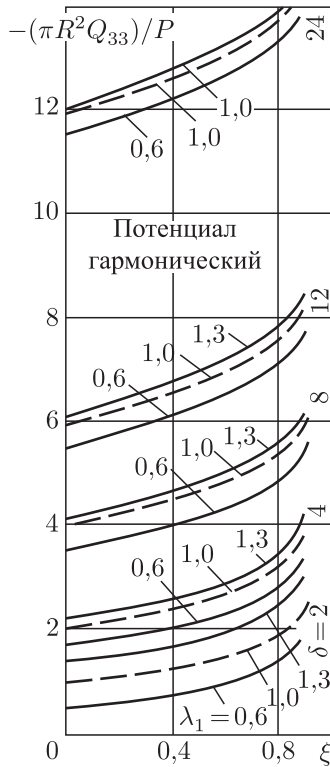


Рис. 13. Распределение безразмерных контактных напряжений  $-\pi R^2 \tilde{Q}_{33}/P$  под упругим штампом, который сдавливается двумя упругими полупространствами с начальными напряжениями,  $\xi$  — безразмерный радиус упругого штампа

ной нагрузке, приложенной к свободному торцу упругого штампа, под действием которой все его точки деформируются в направлении оси  $Oy_3$  на одинаковую величину  $\varepsilon$  (рис. 11). Кроме того, все поверхности вне области контакта считаются свободными от внешних усилий, а трение между упругим штампом и полупространством с начальными напряжениями игнорируем.

Для определения напряженно-деформированного состояния упру-

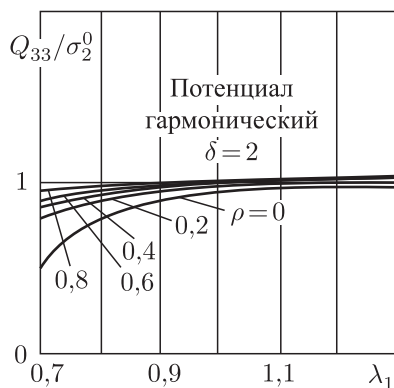


Рис. 14. Количественная и качественная оценка влияния начальных напряжений в полупространстве на закон распределения нормальных напряжений в упругом цилиндре,  $\tilde{Q}_{33}/\sigma_z^0$  — отношение нормальных контактных напряжений после и до приложения начальных напряжений

гих штампов используем уравнение Ламе, решение которого ищется с помощью конечных интегральных преобразований Фурье и Ханкеля.

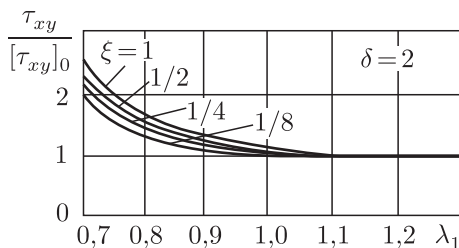


Рис. 15. Количественная и качественная оценка влияния начальных напряжений на распределение тангенциальных напряжений в упругом штампе,  $\tilde{Q}_{33}/\sigma_3^0$  и  $\sigma_\rho/[\sigma_\rho]_0$  — отношение нормальных и радиальных напряжений после и до приложения начальных напряжений,  $\sigma_\rho$  — радиальные напряжения в упругом штампе

Аналитические решения в [89,96,107,108,110,122] представлены

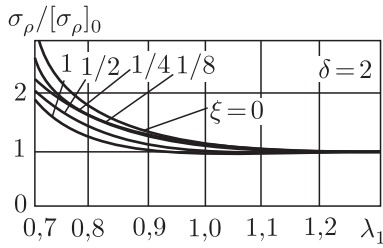


Рис. 16. Количественная и качественная оценка влияния начальных напряжений на распределение радиальных напряжений в упругом штампе,  $\bar{Q}_{33}/\sigma_3^0$  и  $\sigma_\rho/[\sigma_\rho]_0$  — отношение нормальных и радиальных напряжений после и до приложения начальных напряжений,  $\sigma_\rho$  — радиальные напряжения в упругом штампе

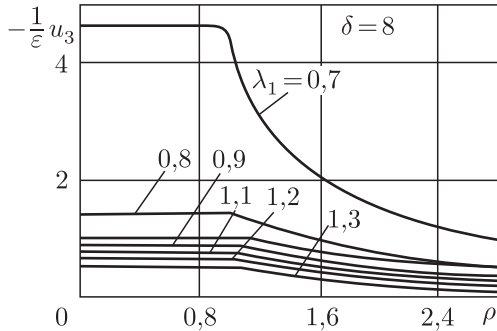


Рис. 17. Перемещения под штампом  $-u_3/\varepsilon$ ,  $\rho$  — безразмерная координата

в виде хорошо сходящихся функциональных рядов и сведены к определению произвольных постоянных  $\chi_k$  из вполне регулярных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений [89], коэффициенты которых существенным образом зависят от геометрических и физических постоянных упругого штампа и полупространства.

В работах [89, 96, 98, 103, 104, 107, 108, 110, 112, 122] найдены числовые значения напряженно-деформированного состояния для задач о давлении упругого конечного цилиндрического штампа на полупространство с начальными напряжениями и взаимодействии двух

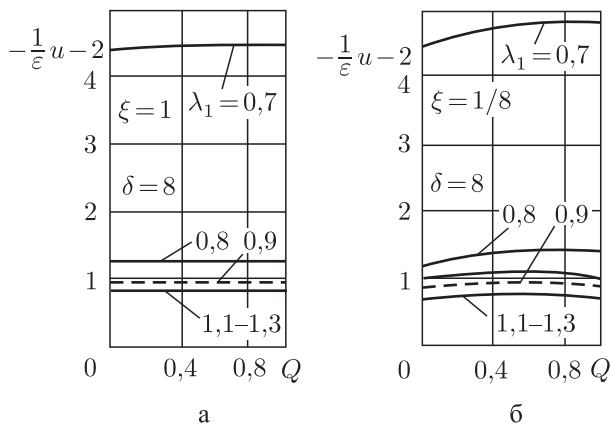


Рис. 18. Перемещения в упругом штампе, сдавливаемом двумя упругими полупространствами,  $-u_2/\varepsilon, \rho$  – безразмерная координата

предварительно напряженных полупространств с упругим конечным цилиндрическим штампом, которые представлены в виде графиков (рис. 18–19а, б).

Графическое изображение представлено в безразмерных величинах: контактное напряжение под штампом  $-\frac{\pi R^2}{P} \tilde{Q}_{33}$ ; перемещения на границе упругого полупространства с начальными напряжениями  $-\frac{1}{\varepsilon} U_3, \frac{1}{\varepsilon} U_\rho$ ; перемещения в упругом штампе  $-\frac{1}{\varepsilon} U_z$ ; контактные напряжения под штампом и в упругом штампе отнесенные к аналогичным напряжениям линейной задачи (без начальных напряжений).

На основании аналитического и численного анализа решений задач [89, 98, 100, 104, 107, 108, 110, 122] сделаны выводы о характере и величине влияния начальных напряжений в полупространстве на напряженно-деформированное состояние системы упругий штамп – полупространство с начальными напряжениями в сравнении с аналогичными линейными задачами (полупространство без начальных напряжений). Ниже приведены некоторые из них.

Наличие начальных напряжений в полупространстве приводит к весьма существенному изменению величин и характера распределе-

ния напряжений и перемещений в упругом штампе. При этом наиболее существенное их влияние оказывается на величину напряжений в точках, близких к боковой поверхности штампа; наибольшее влияние начальных напряжений отмечено вблизи подошвы и значительное — только в зоне для штампов рассмотренной геометрии.

Начальные напряжения в упругом полупространстве оказывают очень существенное влияние на закон распределения контактных усилий и перемещений. Это влияние приводит к уменьшению контактных напряжений в случае сжатия и увеличению в случае растяжения. На границе области контакта нормальные напряжения имеют особенность вида  $(1 - \rho^2)^{-1/2+\gamma}$ , где  $\gamma$  — параметр, определяемый из трансцендентных уравнений и зависящий от структуры упругого потенциала и величины  $\delta$  ( $\delta = E/E_1$  — для сжимаемых тел;  $\delta = E/C_{10}$  — для несжимаемых тел). Результат влияния начальных напряжений на величину и характер напряженно-деформированного состояния системы упругий штамп – полупространства (два идентичных полупространства) с начальными напряжениями в значительной степени зависит от вида упругого потенциала. Более существенное влияние количественного характера начальные напряжения оказывают в высокоэластических материалах; качественное влияние имеет идентичный характер.

При стремлении начальных напряжений к величинам, соответствующим поверхностной неустойчивости полупространства, проявляются эффекты «резонансного» характера: напряжения в упругом штампе равны нулю, перемещение резко возрастает и штамп перемещается как жесткое целое; контактные напряжения также стремятся к нулю, а перемещения под штампом совпадают с перемещениями его торца. Указанный эффект обнаружен в рамках линеаризованной теории упругости и является следствием того, что в рассматриваемом случае система (штамп + основание) находится в состоянии нейтрального равновесия.

### § 3. Упругий слой с начальными напряжениями под действием упругого цилиндрического штампа

Метод построения решения задач, рассмотренных в § 2, развивается применительно к задачам для слоя с начальными напряжениями [1, 99, 101, 102, 104, 107–110, 115–117, 119, 121], а при исследовании задачи [121] применен численный метод. Слой находится под давлением, вызванным действием упругого конечного штампа (рис. 11) или двух соосных конечных упругих штампов. Рассмотрены случаи: а) слой лежит без трения на жестком основании; б) слой скреплен с жестким основанием; в) слой покоится на упругом основании с начальными напряжениями и без них.

Рассмотрены различные случаи деформации бесконечного упругого слоя с начальными напряжениями, причем во всех задачах применяется представление перемещений и напряжений через интегралы Ханкеля в общем виде как для сжимаемых, так и несжимаемых тел. Рассматриваемые задачи сведены к регулярным бесконечным системам алгебраических уравнений относительно некоторых постоянных  $\chi_k$ , через которые выражены напряжения и перемещения в слое с начальными напряжениями и упругом штампе.

Слой рассматривается как упругое сжимаемое или несжимаемое тело при больших (конечных) деформациях. На рис. 19–26 приведены значения напряжений и перемещений в упругом штампе, а также в области контакта, причем штриховые кривые соответствуют слою без начальных напряжений [17, 18].

Влияние начальных напряжений на закон распределения контактных напряжений для разных толщин слоя в случае гармонического потенциала иллюстрируются на рис. 22, потенциала Бартенева–Хазановича — рис. 24, потенциала Трелоара — рис. 25. На этих графиках изображены кривые, которые соответствуют значениям  $\lambda_1 = 0,7; 0,8; 0,9; 1; 1,1; 1,2$  по возрастанию  $\lambda_1$ .

Из результатов, представленных на рис. 22–24, следует, что в случае сжатия ( $\lambda_1 < 1$ ) наличие начальных напряжений в слое приводит к уменьшению величины контактных напряжений, в случае

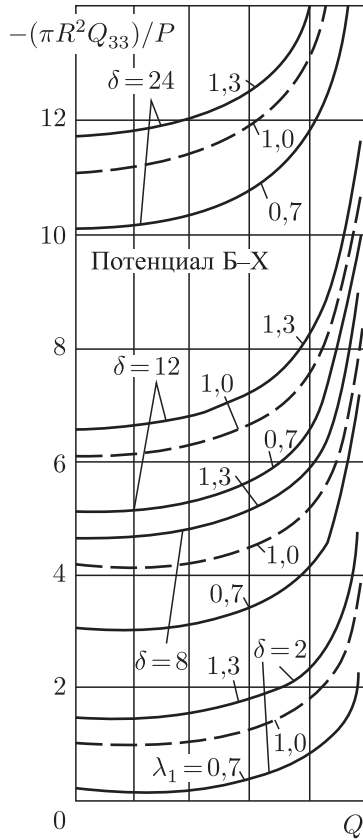


Рис. 19. Распределение контактных напряжений в слое под штампом для потенциала Бартенева–Хазановича,  $\rho$  – безразмерная координата

растяжения ( $\lambda_1 > 1$ ) – к увеличению контактных напряжений примерно на одинаковую величину. Особенно это заметно для толстых слоев. Для тонких слоев при растяжении отмечается большее влияние начальных напряжений, чем при сжатии. Для слоев  $h > 15$  с достаточной для практики точностью при расчете контактных напряжений можно положить  $h = \infty$ , т. е. пользоваться решением для полупространства с начальными напряжениями [89,98,99,104,107–110].

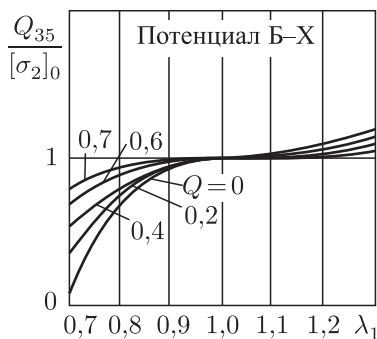


Рис. 20. Количественная и качественная оценка влияния начальных напряжений в слое на закон распределения нормальных напряжений в упругом цилиндре для потенциала Бартенева–Хазановича,  $\rho$  – безразмерная координата

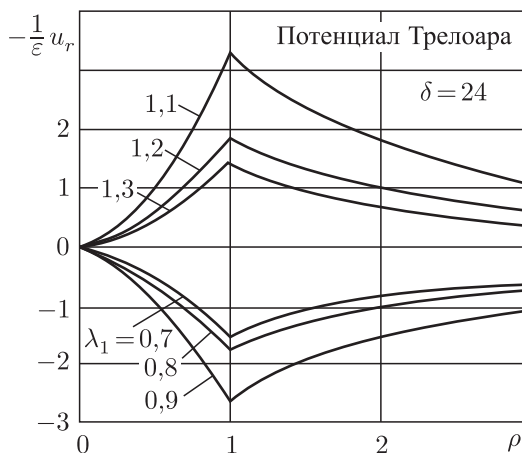


Рис. 21. Влияние начальных напряжений в слое на радиальные перемещения в упругом штампе;  $-u_r/\varepsilon$  – радиальное напряжение,  $\rho$  – безразмерная координата

При приближении  $\lambda_1 \rightarrow \lambda_{kp}$ , при котором наступает потеря поверхностной устойчивости [20, 21, 92–95], наличие начальных напряжений приводит к уменьшению контактных усилий. Так, при  $\lambda_1 = 0,7$

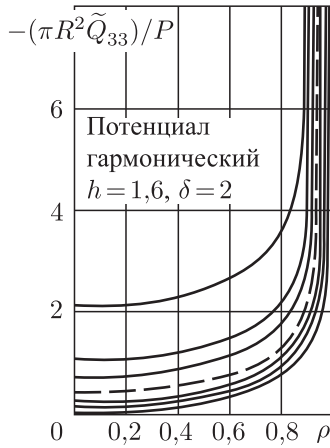


Рис. 22. Распределение контактных напряжений в слое в области контакта упругого штампа для гармонического потенциала;  $-\pi R^2 \tilde{Q}_{33}/P$  — контактные напряжения;  $\rho$  — безразмерная координата



Рис. 23. Распределение контактных напряжений в слое в области контакта упругого штампа для потенциала Баргенева–Хазановича;  $-\pi R^2 \tilde{Q}_{33}/P$  — контактные напряжения;  $\rho$  — безразмерная координата

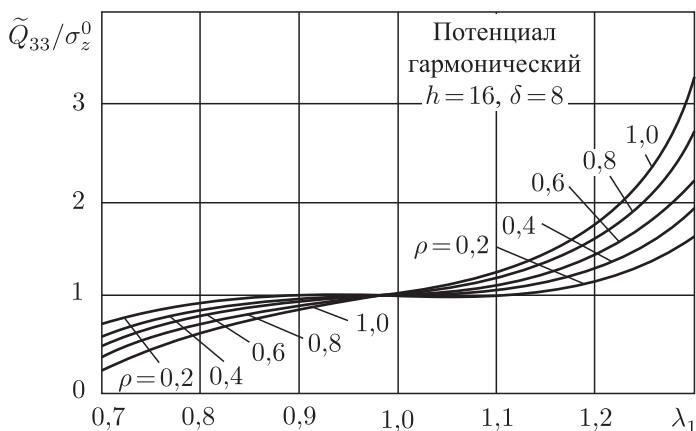


Рис. 24. Количественная и качественная оценка влияния начальных напряжений в слое на закон распределения нормальных напряжений в упругом штампе для гармонического потенциала;  $\tilde{Q}_{33}/\sigma_z^0$  — отношение напряжений до и после приложения начальных напряжений

(потенциал Бартенева–Хазановича  $\lambda_{kp} = 0,69336$ ) и  $h = 1,6$  контактные напряжения уменьшаются в 4–8 раз (рис. 22–24).

На рис. 26 показано, как влияют начальные напряжения в слое на распределение нормальных напряжений в упругом штампе. Из графиков видно, что существенное влияние для всех трех рассматриваемых упругих потенциалов простейшей структуры отмечается лишь для сечений упругого штампа  $\xi < 1$ , причем это влияние меньше в случае сжатия ( $\lambda_1 < 1$ ) и больше в случае растяжения. При  $\lambda_1 \rightarrow \lambda_{kp}$  влияние начальных напряжений в упругом слое резко падает, а напряжения в упругом штампе стремятся к нулю, т. е. упругий штамп находится в состоянии упругого равновесия и не оказывает давления на упругий слой (зависает). Таким образом, при достижении начальными напряжениями в слое величин, соответствующих поверхностной неустойчивости слоя с начальными напряжениями и в упругом штампе, возникают «резонансные» явления, аналогичные явлениям в задачах механики хрупкого разрушения материалов

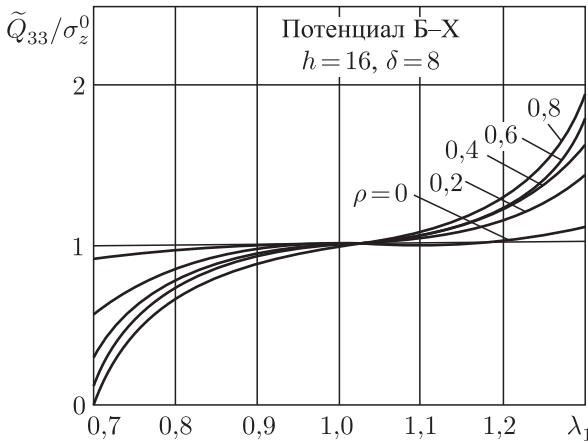


Рис. 25. Количественная и качественная оценка влияния начальных напряжений в слое на закон распределения нормальных напряжений в упругом штампе ( $\tilde{Q}_{33}/\sigma_z^0$  — отношение напряжений после и до приложения начальных напряжений)

с начальными напряжениями [12] и в контактных задачах в случае жестких штампов [1]. Это подтверждают как аналитические, так и численные результаты.

Наличие начальных напряжений в слое приводит к увеличению перемещений в упругом штампе и в области контакта в случае сжатия, в случае растяжения — к их уменьшению. Аналогичная ситуация складывается и для радиальных напряжений в упругом штампе и слое.

#### § 4. Полу плоскость с начальными напряжениями под действием упругого штампа

В работах [96, 97] исследуются плоские статические задачи линейной теории упругости для одной и двух полу плоскостей, взаимодействующих с прямоугольным штампом в предположении,

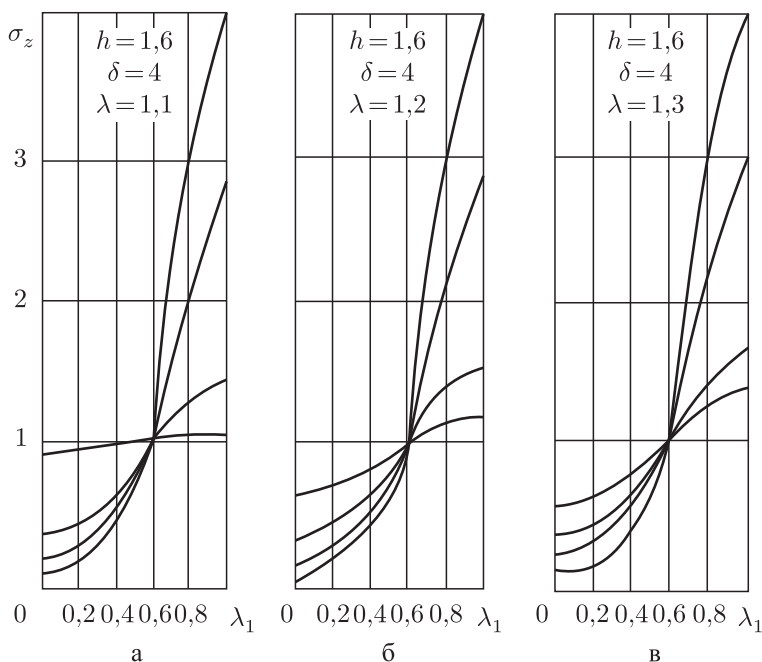


Рис. 26. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_z$  в упругом штампе

что штамп является упругим, изотропным однородным телом. Рассмотрены две задачи.

- I. Упругий прямоугольный штамп длиной  $2l$  и высотой  $2h$  вдавливается в упругую предварительно напряженную полуплоскость под действием нагрузки, приложенной к противоположной свободной до контакта кромке прямоугольного штампа и вызывающей ее перемещение на одинаковую величину  $\varepsilon$ .
- II. Упругий прямоугольный штамп длиной  $2l$  и высотой  $2h$  сжимается (растягивается) двумя идентичными, предварительно напряженными полуплоскостями при помощи внешней осевой нагрузки, приводящейся к равнодействующей  $P$ . Внешняя нагрузка приложена так, что удаленные от области контакта прямо-

угольного штампа с полуплоскостями точки их ненапряженных поверхностей перемещаются относительно координатной плоскости  $y_2 = 0$  на осевое расстояние  $\varepsilon$ .

Предполагается, что в обеих задачах поверхности взаимодействующих тел вне зоны контактного взаимодействия свободны от напряжений, а прямоугольный штамп и полуплоскость (полуплоскости) с начальными напряжениями изготовлены из разных материалов.

Решение для полуплоскости с начальными напряжениями в предположении, что она загружена нормальными и тангенциальными усилиями на границе, находим в виде [96, 97].

В случае плоской деформации предлагается общий метод решения задачи о давлении прямоугольного штампа на полуплоскость с начальными напряжениями. Суть метода состоит в сведении рассматриваемой задачи к задаче типа Римана – Гильберта с неизвестной правой частью, аналогично как в [89].

Кроме того, в [96, 97] развит метод сведения задач I и II к сингулярным интегро-дифференциальным уравнениям (в случае задачи II) к системе двух уравнений без учета и с учетом сцепления. С помощью метода ортогональных полиномов эти уравнения (системы) сведены к бесконечным системам алгебраических уравнений, через неизвестные которых выражены все характеристики напряженно-деформированного состояния упругого прямоугольного штампа и предварительно напряженной полуплоскости. Доказана регулярность полученных систем. Из полученных решений и численных расчетов можно сделать выводы, которые в качественном отношении совпадают с выводом по пространственным задачам.

Различие имеется в количественном отношении. При  $\lambda_1 = 1$  полученное решение совпадает с решением аналогичных задач классической теории упругости [13–18].

Отметим лишь, что с помощью программы оптимизации установлено [96, 97], что полученные числовые значения для контактных перемещений хорошо согласуются с ограничивающими решениями.

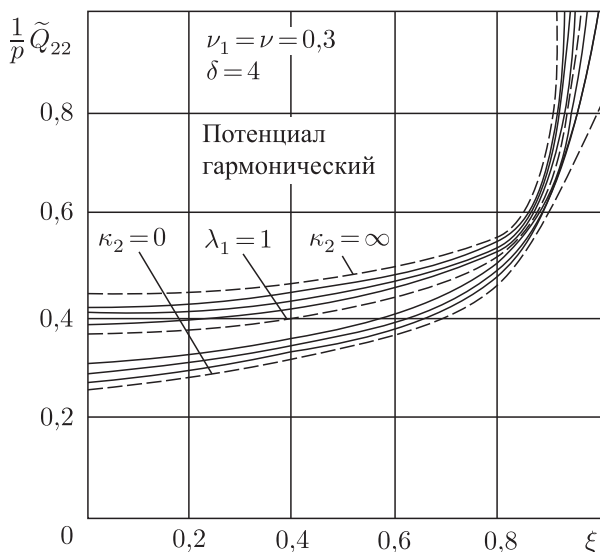


Рис. 27. Влияние начальных напряжений в полуплоскости на закон распределения контактных напряжений в области контакта упругого штампа для гармонического потенциала, где  $-\tilde{Q}_{22}/P$  – контактное напряжение;  $\xi$  – безразмерная координата

Влияние начальных напряжений в полуплоскости с начальными напряжениями на распределение нормальных контактных напряжений, полученных для обеих функций веса [96, 97], отмечается для всех значений  $0 \leq k_2 \leq \infty$  и всей области контакта за исключением угловых точек упругого штампа. Здесь имеет место особенность [17, 18], вид которой в случае сжимаемых тел определяется из трансцендентного уравнения [96], в случае несжимаемых тел из трансцендентного уравнения [97].

Из-за расходимости ряда Фурье результаты числового счета [96, 97] могут рассматриваться как точные для  $0 \leq \lambda_1 < 0,85$ . Для  $\lambda_1 > 0,85$  числовые результаты дают только количественную информацию.

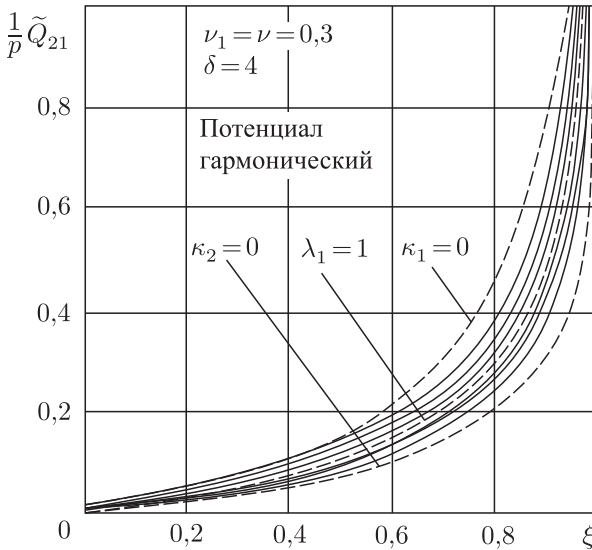


Рис. 28. Влияние начальных напряжений в полуплоскости на распределение тангенциальных контактных напряжений с учетом адгезии упругого штампа с полуплоскостью для гармонического потенциала, где  $-Q_{21}/P$  – тангенциальное напряжение;  $\xi$  – безразмерная координата

На рис. 27, 28 показано влияние начальных напряжений в полуплоскости на закон распределения контактных напряжений. На рис. 28 показано влияние начальных напряжений на нормальные контактные усилия под упругим штампом без учета сил трения. Из рис. 27, 28 следует, что отношение  $\delta = h/l > 0,5$  на качественную картину действия начальных напряжений не влияет. На рис. 19 показано влияние начальных напряжений на закон распределения контактных нормальных усилий без учета сцепления.

Кроме того, на рис. 27, 28 показано влияние начальных напряжений на нормальные и тангенциальные контактные напряжения с учетом сцепления (адгезии) упругого штампа и полуплоскостей с начальными напряжениями [96, 97].

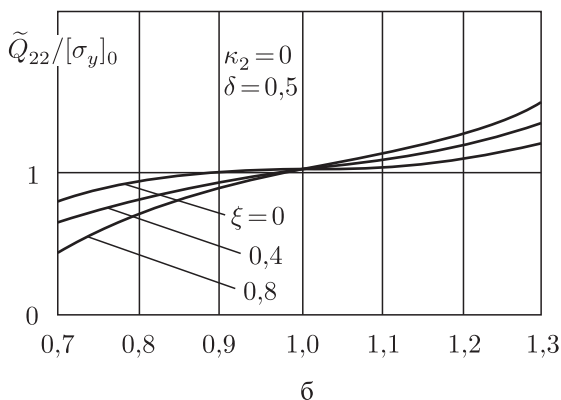
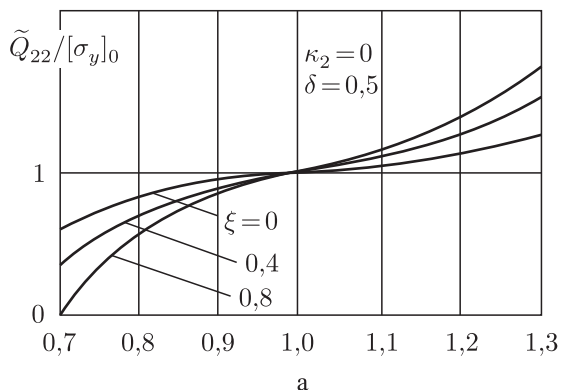


Рис. 29. Влияние начальных напряжений в полуплоскости на закон распределения контактных нормальных усилий без учета сцепления;  $\tilde{Q}_{22}/[\sigma_y]_0$  — отношение напряжений после и до возникновения начальных напряжений;  $\xi$  — безразмерная координата

### § 5. Упругая полуплоскость с начальными напряжениями, подкрепленная упругими накладками

Работы [90, 91, 105, 106, 111, 113, 117, 118, 121] посвящены решению класса плоских задач контактного взаимодействия упругих накладок с предварительно напряженной полуплоскостью. Наклад-

ки считаются приклеенными после приложения начальных напряжений к полуплоскости по линии участка, ширина контакта не учитывается, а толщина накладок достаточно малая. Решены следующие конкретные задачи: полуплоскость, усиленная одной, двумя периодически расположенными конечными накладками, а также задача для двух идентичных полуплоскостей с начальными напряжениями, соединенных упругой конечной накладкой. Для равных и неравных корней определяющего уравнения [12] получены сингулярные интегро-дифференциальные уравнения (системы) с коэффициентами, зависящими от вида упругого потенциала. Полученные уравнения дают возможность сформулировать общий метод решения указанных задач линеаризованной теории упругости.

С помощью предложенного метода можно получить точное решение широкого класса плоских задач для упругих тел с начальными напряжениями в случае упругой накладки такой геометрии, для которой существует решение аналогичных задач классической линейной теории упругости и анизотропного тела.

Отметим, что во всех реферируемых работах получены решения, которые теоретически обоснованы. Исследованы на регулярность системы линейных алгебраических уравнений, к которым приводится большинство задач данной работы, а также показана практическая сходимость числовых и функциональных рядов метода последовательных приближений интегральных уравнений типа Фредгольма и систем, при этом определены пределы изменения соответствующих параметров разложения, при которых процесс является сходящимся.

На рис. 30, 31 показано распределение контактных усилий под одной накладкой для двух потенциалов простейшей структуры: гармонического потенциала Бартенева – Хазановича.

## § 6. Заключение

Таким образом, анализ рассмотренных работ позволяет сделать вывод, что теория контактного взаимодействия полубесконеч-

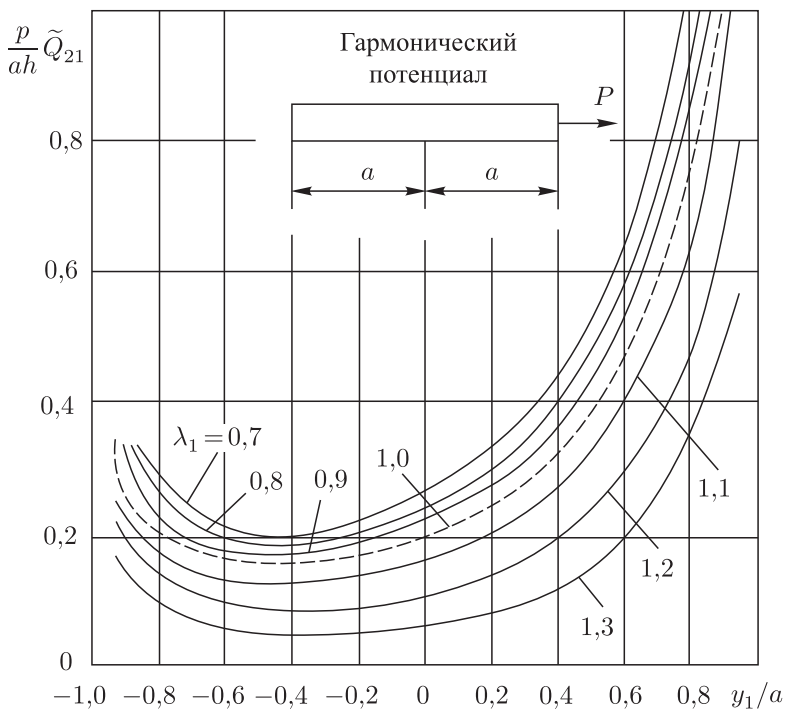


Рис. 30. Распределение контактных напряжений под одной накладкой взаимодействующей с полуплоскостью с начальными напряжениями для гармонического потенциала,  $P\sigma_{21}/(ah)$  — тангенциальное усилие,  $y_1/a$  — безразмерная координата

ных упругих тел с упругими штампами конечных размеров при учете начальных напряжений в полубесконечных телах получила дальнейшее развитие, которое включает: а) постановку задач контактного взаимодействия сжимаемых и несжимаемых тел с начальными напряжениями и упругих штампов в общей форме для теории больших (конечных) и двух вариантов малых начальных деформаций в случае произвольной структуры упругого потенциала; б) развитие методов решения плоских и пространственных контактных задач, линеаризованной теории упругости с использованием интегральных пре-

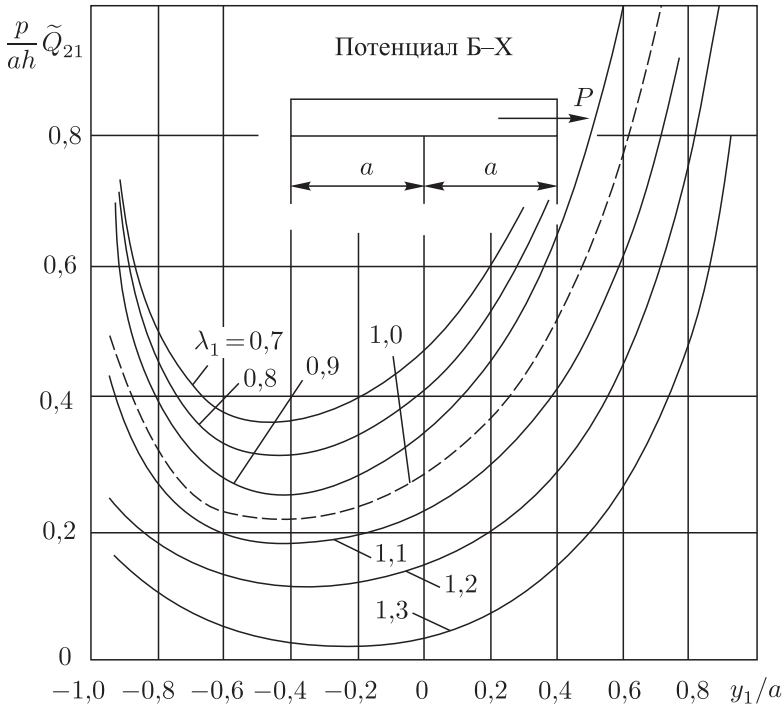


Рис. 31. Распределение контактных напряжений под одной накладкой взаимодействующей с полуплоскостью с начальными напряжениями для потенциала Бартенева – Хазановича,  $P\sigma_{21}/(ah)$  – тангенциальное усилие,  $y_1/a$  – безразмерная координата

образований, интегральных уравнений, теории потенциала, методов задачи Римана–Гильберта, а также существующих численных методов исследования пакета прикладных программ Maple с оценкой сходимости и эффективности этих методов на примере решения конкретных задач; в) решение конкретных классов плоских и пространственных контактных задач для полубесконечных тел с начальными штампами, выявление новых механических эффектов, связанных с влиянием начальных напряжений, формулировку на основании этих решений рекомендаций для инженерных методов расчета.

### Литература

- [1] Гузь О. М., Бабич С. Ю., Рудницький В. Б. Контактна взаємодія тіл з початковими напруженнями. Київ: Вища школа, 1995. — 304 с.
- [2] Гузь А. Н., Рудницький В. Б. Контактные задачи для упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями. Хмельницкий: Печать ЧП Мельник А. А., 2004, 622 с.
- [3] Гузь А. Н., Рудницький В. Б. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями. Хмельницкий: Печать ЧП Мельник А. А., 2006. 710 с.
- [4] Гузь А. Н., Бабич С. Ю., Глухов Ю. П. Статика и динамика оснований с начальными (остаточными) напряжениями. Кременчуг: Издательство «Кременчуг», 2007. — 795 с.
- [5] Бабич С. Ю., Гузь А. Р., Рудницький В. Б. Контактные задачи для упругих тел. С начальными напряжениями (жесткие штампы) // Прикл. механика. — 1989. — № 8. — С. 3–18.
- [6] Бабич С. Ю., Гузь А. Н., Рудницький В. Б. Контактные задачи для упругих тел с начальными напряжениями (упругие штампы) (обзор). // Прикл. механика. — 1991. Т. 27. № 9 — С. 3–28.
- [7] Guz A. N., Babich S. Y., Rudnitsky V. V. Contact problems for elastic bodies with initial stresses: Focus on Ukrainian research // *Apple. Mech. Rev.* Vol. 51, May 1998, p. 343–371.
- [8] Гузь А. Н., Бабич С. Ю., Рудницький В. Б. Контактные задачи для упругих тел с начальными напряжениями применительно к жестким и упругим штампам. // Прикл. механика. — 2004. Т. 40. № 7. — С. 41–69.
- [9] Гузь А. Н. О контактных задачах для упругих сжимаемых тел с начальными напряжениями // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1980. — № 6. — С. 48–52.

- [10] Гузь А. Н. К теории контактных задач для упругих несжимаемых тел с начальными напряжениями // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1980. — № 7. — С. 42–45.
- [11] Гузь А. Н. Контактные задачи теории упругости для полуплоскости с начальными напряжениями // Прикл. механика. — 1980. — 16, № 8. — С. 45–58.
- [12] Гузь А. Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. — Киев: Наук. думка, 1983. — 296 с.
- [13] Кильчевский Н. А., Костюк Э. Н. О развитии в XX веке теории контактных взаимодействий между упругими телами. // Прикл. механика. — 1966. — 2, № 8. — С. 32–39.
- [14] Рвачев В. Л. Исследования ученых Украины в области контактных задач теории упругости // Прикл. механика. — 1967. — 3, № 10. — С. 109–116.
- [15] Попов Г. Я., Ростовцев Н. А. Контактные (смешанные) задачи теории упругости: Тр. II Всесоюз. съезда по теории и прикл. механике. М.: Наука, 1966. Вып. 3. С. 235–252.
- [16] Абрамян Б. Л. Контактные (смешанные) задачи теории упругости // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1969. — № 4. — С. 181–197.
- [17] Развитие теории контактных задач в СССР. — М.: Наука, 1976. — 494 с.
- [18] Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980. — 304 с.
- [19] Kurashige M. Circular crack problem for initially stressed neo-Hookean solid // ZAMM. — 1969. — 49, № 8. — P. 671–678.
- [20] Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. Общие вопросы. — Киев: Наук. думка, 1986. — Т. 1. 376 с.

- [21] Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. Закономерности распределения. — Киев.: Наук. думка. 1986. — Т. 2. 536 с.
- [22] Филиппова Л. М. Плоская контактная задача для предварительно напряженного упругого тела // Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела. — 1973. — № 3. — С. 143–146.
- [23] Филиппова Л. М. Пространственная контактная задача для предварительно напряженного упругого тела // Прикл. математика и механика. — 1978. — 42, № 6. — С. 1080–1084.
- [24] Beatty M. F., Usmani S. A. On the indentation of a highly elastic half-space // Quart. J. Mech. and Math. — 1975. — 28, № 1. — P. 47–62.
- [25] Александров В. М., Арутюнян Н. Х. Контактные задачи для преднапряженных деформируемых тел // Прикл. механика. — 1984. — 20, № 3. — С. 9–16.
- [26] Александров В. М., Арутюнян Н. Х., Брудный С. Р. Смешанные задачи для преднапряженных тел // Смешанные задачи механики деформируемого тела: Тез. докл. II Всесоюз. конф. Днепропетровск, 1981. — Днепропетровск: Изд-во Днепропетров. ун-та, 1981. — С. 4–5.
- [27] Александров В. М., Брудный С. Р. Две задачи со смешанными граничными условиями для несжимаемого изотропного материала // Прикл. математика и механика. — 1982. — 46. — С. 700–704.
- [28] Александров В. М., Воротынцев И. В. Воздействие нагрузок и штампов на преднапряженный слой льда или сильно льдистого грунта // Тез. докл. четвертого симпозиума по реологии грунтов. — Самарканд. — 1982. — С. 18–19.
- [29] Александров В. М., Кадомцев И. Г., Царюк Л. Б. Осесимметричные контактные задачи для упруго пластичных тел // Трение и износ. — 1984. — 5, № 1. — С. 16–25.

- [30] Александров В. М., Порошин В. С. Контактная задача для предварительно напряженного физически нелинейного упругого слоя // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1984. — № 6. — С. 79–85.
- [31] Александров В. М., Филиппова Л. М. Контактная задача для тяжелой полуплоскости // Прикл. математика и механика. — 1980. — 44. № 3. — С. 535–539.
- [32] Ананьев И. В., Калинин В. В., Полякова И. Б. Динамические контактные задачи для слоя с неоднородными начальными напряжениями // Смешанные задачи механики деформируемого тела: Тез. докл. II Всесоюз. конф., Днепропетровск, 1981. — Днепропетровск: Изд-во Днепропетров. ун-та, 1981. — С. 120.
- [33] Ананьев И. В., Калинин В. В., Полякова И. Б. Динамические контактные задачи для тел с неоднородными начальными напряжениями и переменными по глубине свойствами. — Ростов н/Д. 1981. — 19 с. — Деп. в ВИНТИ 10.05.82; № 2321-82 Деп.
- [34] Ананьев И. В., Калинин В. В., Полякова И. Б. О возбуждении воли вибрирующим штампом в среде с неоднородными начальными напряжениями // Прикл. математика и механика. — 1983. — 47, № 3. — С. 483–489.
- [35] Бабешко В. А., Калинин В. В. Динамические контактные задачи напряженного слоя из несжимаемого материала. — Ростов н/Д. — 34 с. — Деп. в ВИНТИ 29.07.85; № 5538-85 Деп.
- [36] Бабешко В. А., Калинин В. В., Малахова О. А. О вибрации штампа на поверхности предварительно напряженного слоя. — Ростов н/Д. 1983. — 21 с. — Деп. в ВИНТИ 24.06.85; № 4436 Деп.
- [37] Брудный С. Р. Одна динамическая задача для тяжелой полуплоскости. — М., 1983. — 6 с. — Деп. в ВНИИИС Госстроя СССР; № 3031.

- [38] Воротынцева И. В. Плоские контактные задачи для физически нелинейной преднапряженной упругой среды // Прикл. математика и механика. — 1986. — 50, № 4. — С. 657–662.
- [39] Воротынцева И. В., Коваленко Е. В. Контактная задача для преднапряженного слоя льда или сильно льдистого грунта // II Всесоюз. конф. по механике и физике льда. Тез. докл. — М., 1983. — С. 25.
- [40] Воротынцева И. В., Коваленко Е. В. Осесимметричная контактная задача для предварительного физически нелинейного полупространства и слоя конечной глубины // Аналитические и численные методы решения краевых задач пластичности и вязкоупругости. — Пермь, 1986. — С. 33–38.
- [41] Воротынцева И. В., Сметанин Б. И. Некоторые смешанные задачи для нелинейных преднапряженных сред // Тез. докл. II Всесоюз. конф. по нелинейной теории упругости. — Фрунзе: Илим, 1985. — С. 77.
- [42] Воротынцева И. В., Сметанин Б. И. Некоторые смешанные задачи для упругого слоя с потенциалом гармоничного типа. — Ростов н/Д. — 16 с. — Деп. в ВИНТИ 23.05.85; № 3555-85 Деп.
- [43] Порошин В. С. Смешанные задачи для преднапряженного упругого слоя. — Гомель, 1984. — 23 с. — Деп. в ВИНТИ 22.08.84; № 5973-84.
- [44] Порошин В. С. Вдавливание штампа в преднапряженный физически нелинейный упругий слой // Изв. АН АрмССР. Механика. — 1986. — 39, № 2. — С. 24–30.
- [45] Филиппова Л. М., Чебаков М. И. Контактная задача для предварительно напряженного конечного цилиндра // Изв. АН СССР. Механика твердого. — 1988. — № 2. — С. 62–69.
- [46] Haughton D. M. Penny-shaped crack in finitly deformed elastic solid // Int. J. Solid Structures. — 1982. — 18, № 8. — P. 699–704.

- [47] The penny crack problem for finitly deformed incompressible elastic solid // *Int. J. Fract.* — 1990. — 16. — P. 327–341.
- [48] Dhakiwal R. S., Ranjit S., Singh B. The axisymmetric Boussinesq problem of an initially stressed neo-Hookean half-space for a punch of arbitrary profile // *Int. J. Engng. Sci.* — 1978. — 16, № 6. — P. 379–385.
- [49] Dhaliwai R. S., Rajit S., Rokne J. G., Singh B. M. Axisymmetric contact and crack problems for an initially stressed neo-Hookean elastic layer // *Ibid.* — 1980. — 18, № 1. — P. 169–179.
- [50] Калинчук В. В., Полякова И. Б. О возбуждении предварительно напряженного цилиндра // *Там же.* — 1981. — 45, № 2. — С. 384–389.
- [51] Калинчук В. В., Полякова И. Б. О вибрации штампа на поверхности предварительно напряженного полупространства // *Прикл. механика.* — 1982. — 18, № 6. — С. 22–27.
- [52] Калинчук В. В., Полякова И. Б. О возбуждении волн в слое с начальными напряжениями // *Прикл. математика и механика.* — 1987. — 44, № 2. — С. 320–326.
- [53] Глухов Ю. П., Бабич С. Ю. Контактная задача кручения для упругого слоя с начальными напряжениями // *Тр. XIII науч. конф. молодых ученых Ин-та механики АН УССР. Кийлов, 24–27 мая, 1988. Киев: Ин-т механики АН УССР, 1988. — Ч. 1. С. 15–19 — Деп. в ВИНТИ 27.12.88; № 9071-В88.*
- [54] Бабич С. Ю. О контактных задачах для предварительно напряженной полуплоскости с учетом сил трения // *Докл. АН УССР. Сер. А.* — 1980. — № 12. — С. 21–24.
- [55] Бабич С. Ю. К вопросу контактных задач для полуплоскости с начальными напряжениями в случае нескольких штампов // *Исследования по механике твердого деформируемого тела.* — Ереван: Изд-во АН АрмССР. 1981. — С. 48–52.
- [56] Бабич С. Ю. О влиянии начальных напряжений на распределение контактного давления в предварительно напряженной по-

- луплоскости с учетом сил трения // Там же. — 1986. — 22, № 8. — С. 163–166.
- [57] Бабич С. Ю. К вопросу динамической контактной задачи для полуплоскости с начальными напряжениями // Там же. — 1987. — 23, № 4. — С. 39–43.
- [58] Гузь А. Н. Комплексные потенциалы плоской линеаризированной задачи теории упругости (сжимаемые тела) // Прикл. механика. — 1980. — 16, № 5. — С. 72–83.
- [59] Гузь А. Н. Комплексные потенциалы плоской линеаризированной задачи теории упругости (несжимаемые тела) // Там же. — 1980. — 16, № 6. — С. 64–70.
- [60] Гузь А. Н. О комплексных потенциалах плоской линеаризированной задачи теории упругости // Там же. — 1980. — 16, № 9. — С. 83–97.
- [61] Бабич С. Ю., Рудницкий В. Б. Некоторые плоские контактные задачи для упругих тел с начальными напряжениями // Там же. — 1989. — 25, № 1. — С. 93–100.
- [62] Гасанов Р. А. Об одной контактной задаче для полуплоскости с учетом начальных напряжений. — VII респ. науч. конф. аспирантов вузов Азербайджана: Тез. докл. — Баку, 1985. — Т. 2, с. 18.
- [63] Бабич С. Ю. О контактной задаче для упругой полосы с начальными напряжениями // Там же. — 1984. — 20, № 12. — С. 34–38.
- [64] Бабич С. Ю. Контактная задача для предварительно напряженной полосы, лежащей на упругом основании с начальными напряжениями // Там же. — 1986. — 22, № 3. — С. 10–14.
- [65] Бабич С. Ю., Гузь А. Н. Комплексные потенциалы плоской динамической задачи сжимаемых упругих тел с начальными напряжениями // Там же. — 1981. — 17, № 7. — С. 75–83.
- [66] Бабич С. Ю., Гузь А. Н. Комплексные потенциалы плоских динамических задач для упругих несжимаемых тел с начальными

- напряжениями // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1981. — № 11. — С. 41–45.
- [67] Гузь А. Н., Бабич С. Ю. О плоских динамических задачах для упругих тел с начальными напряжениями // Докл. АН СССР. — 1981. — 261, № 2. — С. 313–316.
- [68] Гузь А. Н., Бабич С. Ю. Плоские динамические задачи для упругих несжимаемых тел с начальными напряжениями // Прикл. математика и механика. — 1982. — 46, № 2. — С. 263–271.
- [69] Бабич С. Ю. О динамических контактных задачах для полуплоскости с начальными напряжениями // Прикл. механика. — 1982. — 18, № 2. — С. 68–73.
- [70] Бабич С. Ю., Гузь А. Н., Жук А. П. Упругие волны в телах с начальными напряжениями // Прикл. механика. — 1979. — 15, № 4. — С. 3–23.
- [71] Бабич С. Ю., Глухов Ю. П., Гузь А. Н. Динамика слоистого сжимаемого предварительного напряжения полупространства при взаимодействии подвижной нагрузки // Там же. — 1986. — 22, № 9. — С. 8–15.
- [72] Гузь А. Н. Упругие волны с начальными (остаточными) напряжениями. — Киев: «А.С.К.», 2004. — 672 с.
- [73] Глухов Ю. П. Реакция слоистого сжимаемого полупространства с начальными напряжениями на подвижную нагрузку // Тр. XI науч. конф. молодых ученых Ин-та механики АН УССР, Кийлов, 27–30 мая, 1986. — Киев: Ин-т механики АН УССР, 1986. — Ч. 1. — С. 29–34. — Деп. в ВИНТИ 28.07.86; № 5507-В86.
- [74] Глухов Ю. П. К определению критических скоростей движения загрузки по пластине, лежащей на несжимаемом предварительно деформированном полупространстве // Прикл. механика. — 1986. — 22, № 10. — С. 57–62.

- [75] Глухов Ю. П., Бабич С. Ю. Об общей динамической задаче для несжимаемого полупространства с начальными напряжениями // Неклассические и смешанные задачи механики деформируемого тела. Материалы семинара молодых ученых (Киев, 21–23 мая 1985 г.) — Киев: Ин-т 29.07.85; № 5531-85 Деп.
- [76] Бабич С. Ю., Глухов Ю. П., Гузь А. Н. К решению задачи о взаимодействии подвижной нагрузки на двухслойное полупространство с начальными напряжениями // Там же. — 1988. — 24, № 8. — С. 55–60.
- [77] Бабич С. Ю. Осесимметричная контактная задача для тел с начальными напряжениями // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1982. — № 6. — С. 32–35.
- [78] Бабич С. Ю., Гузь А. Н. Пространственные контактные задачи для упругого полупространства с начальными напряжениями // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1981. — № 9. — С. 35–39.
- [79] Бабич С. Ю., Гузь А. Н. К теории контактных задач для тел с начальными напряжениями // Механика неоднородных структур: Тез. докл. II Всесоюз. конф., Львов, 1983. — Киев: Наук. думка, 1983. — С. 17.
- [80] Бабич С. Ю., Гузь А. Н. Некоторые пространственные контактные задачи для упругого полупространства с начальными напряжениями // Прикл. механика. — 1984. — 20, № 5. — С. 3–12.
- [81] Бабич С. Ю., Гузь А. Н. Общая пространственная статическая контактная задача для предварительно напряженного упругого полупространства // Прикл. математика и механика. — 1985. — 49, № 3. — С. 438–444.
- [82] Бабич С. Ю. Контактная задача теории упругости для слоя с начальными напряжениями // Прикл. механика. — 1984. — 20, № 6. — С. 34–40.
- [83] Бабич С. Ю. Осесимметричная контактная задача для слоя на упругом полупространстве с начальными напряжениями // Прикл. механика. — 1985. — 21, № 11. — С. 32–36.

- [84] Бабич С. Ю., Рудницкий В. Б. К вопросу контактной задачи для предварительно напряженного слоя // Прикл. механика. — 1987. — 23, № 5. — С. 110–112.
- [85] Гузь А. Н., Бабич С. Ю. Осесимметричная контактная задача для упругого слоя с начальными напряжениями // Докл. АН СССР. — 1983. — 273, № 6. — С. 1329–1332.
- [86] Гузь А. Н., Бабич С. Ю. Контактные задачи для упругих тел с начальными напряжениями // Смешанные задачи механики деформируемого тела: Тез. докл. III Всесоюз. конф., Харьков, 1985. — С. 13–14.
- [87] Бабич С. Ю., Гузь А. Н. Поверхностные волны на сфере с начальными напряжениями // Прикл. механика. — 1978. — 14, № 1. — С. 3–9.
- [88] Biot M. A. *Mechanics of incremental deformation*. Neu Jork: Jokin Welley and Sons, 1965. — 504 p.
- [89] Гузь А. Н., Рудницкий В. Б. Контактная задача о давлении упругого штампа на упругое полупространство с начальными напряжениями // Прикл. механика. — 1984. — 20, № 8. — С. 3–11.
- [90] Гузь А. Н., Рудницкий В. Б. Контактные задачи для полуплоскости с начальными напряжениями, усиленной упругими накладками // Там же. — 1985. — 20, № 3. — С. 68–78.
- [91] Гузь А. Н., Рудницкий В. Б. Периодическая контактная задача для полуплоскости с начальными напряжениями, усиленной упругими накладками // Докл. АН СССР. — 1985, № 4. — С. 831–833.
- [92] Бабич С. Ю., Рудницкий В. Б. О контактной задаче для предварительно напряженного слоя // Там же. — 1987. — 23, № 5. — С. 110–112.
- [93] Гузь А. Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. — Киев: Наук. думка, 1973. — 270 с.

- [94] Гузь А. Н. Основы теории устойчивости горных выработок. — Киев: Наук. думка, 1977. — 204 с.
- [95] Гузь А. Н. Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии. — Киев: Наук. думка, 1979. — 114 с.
- [96] Рудницкий В. Б. Контактное взаимодействие двух полуплоскостей с начальными напряжениями и упругого штампа (сжимаемые тела) // Прикл. механика. — 1985. — 21, № 2. — С. 55–62.
- [97] Рудницкий В. Б. Плоская контактная задача для упругого прямоугольного штампа и полуплоскости с начальными напряжениями // Там же. — 1985. — 21, № 10. — С. 69–74.
- [98] Рудницкий В. Б. Контактное взаимодействие полупространства с начальными напряжениями и упругого конечного цилиндра // Прикл. механика. — 1986. — 22, № 4. — С. 44–51.
- [99] Рудницкий В. Б. Решение контактной задачи для предварительно напряженного слоя и штампа // Там же. — 1987. — 23, № 3. — С. 14–21.
- [100] Рудницкий В. Б. Осесимметричная пространственная контактная задача для упругого полупространства с начальными напряжениями при учете сцепления // Там же. — 1987. — 23, № 4. — С. 112–115.
- [101] Рудницкий В. Б. Влияние начальных напряжений в слое на контактное давление при взаимодействии с цилиндрическим штампом // Там же. — 1987. — 23, № 8. — С. 11–19.
- [102] Рудницкий В. Б. Контактные взаимодействия предварительно напряженного слоя с двумя упругими штампами // Докл. АН УССР. — Сер. А. — 1987. — № 2. — С. 56–61.
- [103] Рудницкий В. Б. Контактное взаимодействие двух предварительно напряженных полупространств с упругим цилиндрическим штампом // Там же. — Сер. А. — 1987. — № 3. — С. 38–41.
- [104] Рудницкий В. Б. Контактное взаимодействие упругих штампов с предварительно напряженными телами: Автореф. дис. д-ра наук. — Киев, 1988. — 33 с.

- [105] Рудницкий В. Б. Контактное взаимодействие полуплоскости с начальными напряжениями и упругой накладкой // Тез. докл. на II Всесоюз. науч.-техн. семинаре по неклассическим проблемам механики композиционных материалов и конструкций из них. — Киев, 1984. — 92 с.
- [106] Рудницкий В. Б. Контактные задачи для полуплоскости и полосы с начальными напряжениями, взаимодействующих с упругими накладками и стрингерами // Мат-лы II Всесоюз. науч.-техн. конференции «Прочность, жесткость и технологичность изделий из композиционных материалов». — Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1984. — Т. 3. С. 89.
- [107] Рудницкий В. Б. Контактное взаимодействие упругого штампа с предварительно напряженным полупространством и слоем конечной толщины // Тез. докл. II Всесоюз. конф. по теории упругости. — Тбилиси, 1984. — С. 238.
- [108] Рудницкий В. Б. Пространственные контактные задачи для тел с начальными напряжениями, взаимодействующих с упругими штампами // Тез. докл. на III Всесоюз. конф. «Смешанные задачи механики деформируемого тела». — Харьков, 1985. — С. 245.
- [109] Рудницкий В. Б. Контактные задачи для слоя с начальными напряжениями взаимодействующего с упругими штампами // Тез. докл. II Всесоюз. конф. по нелинейной теории упругости. — Фрунзе, 1985. — С. 413.
- [110] Рудницкий В. Б. Контактные задачи для тел с начальными напряжениями // Тез. докл. совещ. по применению композиционных материалов в сельскохозяйственном машиностроении. — Чернигов, 1985. — С. 148.
- [111] Рудницкий В. Б. Плоские контактные задачи для предварительно напряженных упругих тел с тонкими покрытиями // Тез. докл. научн.-техн. конф. «Применение композиционных матери-

- алов на полимерной и металлических материалах». — Пермь, 1985. — С. 121.
- [112] Рудницкий В. Б. О влиянии начальных напряжений в высокоэластичных материалах на упругий контакт с цилиндрическим штампом // Прикл. механика. — 1989. — 25, №3. — С. 14–20.
- [113] Рудницкий В. Б. Контактные задачи для предварительно напряженных пластин, усиленных упругими накладками // Там же. — 1989, №4. — С. 123–126.
- [114] Рудницкий В. Б. Локально-однородный контакт предварительно напряженных тел при изнашивании их поверхностей // Мат-лы III Всесоюзн. конф. по нелинейной теории упругости. — Сыктывкар. 1989. — С. 36–39.
- [115] Рудницкий В. Б., Дихтярук Н. Н. Контактные задачи для тонкой полосы с начальными напряжениями усиленной упругими накладками // Проблемы трибологии. — 2002. — №1. — С. 143–144.
- [116] Рудницкий В. Б., Дихтярук Н. Н. Упругая полоса с начальными напряжениями, усиленная упругими накладками // Прикл. механика, 2002, 38, №11, с. 81–88.
- [117] Рудницький В. Б., Діхтярук М. М. Періодична контактна задача для пружної смуги з початковими напруженнями // Доповіді НАН України, 2004, №3, с. 46–49.
- [118] Рудницкий В. Б., Дихтярук Н. Н. О равновесии полосы с начальными напряжениями, усиленной упругими накладками. // Прикл. механика. 2004, 40, №3, с. 63–70.
- [119] Гузь А. Н., Рудницкий Т. В. Контактное взаимодействие упругого штампа и полупространства с начальными (остаточными) напряжениями // Прикл. механика. Т. 43. С. 10–25.
- [120] Рудницкий В. Б., Габрусев В. Г., Шелестовский Б. Г. О численном приеме решения некоторых нелинейных задач математической физики // Нелинейные проблемы дифференциаль-

ных уравнений и математической физики: Тез. докл. всесоюз. конф.: В 2-х ч. — Тернополь, 1989. — Ч. 2. — С. 363–365.

- [121] Рудницкий В. Б., Шелестовская М. Я. Контактное взаимодействие упругого кольцевого штампа с предварительно напряженным шаром // Докл. АН УССР. — Сер. А. — 1990. — № 6. — С. 54–57.
- [122] Рудницкий В. Б., Григоренко П. П. Слой с начальными напряжениями под действием двух штампов // Там же. — 1990. — № 9. — С. 35–36.
- [123] Guz A. N., Rudnitski V. B. Kontaktowe oddziaływanie sprężystego stempla ze wstępnie napreżoną warstwą / Mechanika Teoretyczna I Stosowana. — 1987. — № 25. — S. 323–340.
- [124] Rudnitsky V., Gabrusev V., Shelestovsky D. Angular punch contact interaction with the preliminary stressed layer // Second World Congress on Computational Mechanics. August 27–31, 1990.