

**Сорокатый Р. В.,
Писаренко В. Г.,
Дыха М. А.**

Хмельницкий национальный университет,
Казенное научно-производственное
объединение "Форт" МВД Украины

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ИЗНАШИВАНИЯ

Вступление

Анализ параметров, определяющих количественные и качественные характеристики процессов изнашивания, показывает, что они, по своей сути, являются случайными величинами. Скорость изнашивания зависит от физико-механических свойств материалов и микрогеометрии поверхностей трения, изменяющихся в определенных пределах. Изнашивание зависит от макрогеометрии сопряженных деталей в сборке, регламентированной системой допусков и посадок. Наконец, скорость изнашивания зависит от взаимовлияния различных узлов машины, условий эксплуатации и т. д. В эксплуатации возможны различные комбинации действующих факторов. Таким образом, стохастический характер определяющих параметров процесса изнашивания приводит к тому, что скорость изнашивания и соответственно ресурс узлов трения является случайной величиной. В связи с этим, к оценке ресурса узлов трения необходимо подходить с вероятностных позиций.

Вероятностные подходы к оценке ресурса узлов трения

К первым работам, в которых процесс изнашивания рассматривается, как стохастический процесс, следует отнести работы Н.Б. Герцбаха и Х.Б. Кордонского [1].

Авторы [1, 2] обратили внимание на стохастический характер изнашивания и изложили [1, 2] основные предпосылки для разработки математической модели процесса изнашивания как случайного процесса. В работах [1, 2] высказано и обосновано предположение, что изнашивание протекает случайно и все изменения, которые наблюдаются в трущейся паре, по существу стохастические. Исходя из этой позиции, сделан вывод, что при построении моделей изнашивания не только нельзя игнорировать случайные вариации износа, но и необходимо тщательно изучать закономерности, управляющие ими. В [1, 2] показано, что анализ накопления повреждений вследствие износа позволяет вскрыть основные особенности вероятностного поведения деградирующей системы.

Модель износа для прогнозирования долговечности изнашиваемых деталей с использованием случайных процессов Маркова, в которой обобщенное интегральное уравнение Маркова сведено к диффузионному распределению построена в [3].

Работа [4] посвящена вероятностной трактовке феноменологических процессов накопления повреждений, независимо от их механической природы, с целью адекватного описания, выявления физической сущности и предсказания на их основе поведения конструкции. Рассматриваемые вероятностные модели основаны на марковских процессах с дискретными временем и состояниями. В работе [4] авторы перешли к систематическому описанию феноменологических процессов деградации с помощью случайных процессов марковского типа. Такой подход позволил построить достаточно точные модели кумулятивного накопления повреждений. Развита авторами [4] методика систематического применения марковских цепей для адекватного описания больших выборок реализаций позволила решать практические задачи проектирования, оценки надежности и сохраняемости деградирующих систем, создания методик ускоренных ресурсных испытаний, учета спектра нагрузок. В книге [4] рассмотрены качественные аспекты процесса накопления повреждений с экспериментальной точки зрения, построена модель накопления единичных повреждений от последовательности независимых ударных воздействий.

На основе теоретической обработки экспериментального материала [4] показано, что процессы накопления трибоповреждений относятся к классу кумулятивных повреждений, как необратимого накопления механических повреждений при циклических воздействиях [4].

Кумулятивные повреждения связаны с поведением материалов на атомном или молекулярном уровне. Однако, в настоящее время поведение конструкционных материалов познано не настолько хорошо, чтобы основывать модели кумулятивных повреждений на физических законах. Следовательно, как показано в [4], целесообразно обратиться к феноменологическим моделям, которые должны основываться на сегодняшнем понимании явлений на макрокопическом уровне и экспериментальных данных.

В работе [5] на основе построения вероятностной модели сделаны выводы, что вероятностное поведение изнашиваемого тела на уровне поверхностного слоя определяет макроуровневые изменения тела. Одной из основных характеристик [5], связывающих износ поверхностных слоев и макроуровневые изменения изнашиваемого тела в процессе функционирования трибосистемы, является суммарная интенсивность потока изнашивания, переводящая поверхностные слои изнашиваемого тела в поглощающее состояние.

Следует отметить, что в [5] при построении вероятностной модели принято допущение, что в процессе изнашивания одновременно принимают участие все элементы слоя. Данную модель можно уточнить, если учесть, что во фрикционном контакте, учитывая фактическую площадь контакта, одновременно принимают участие не все элементы, а некоторая их часть. Элементы слоя, которые не задействованы первоначально в контакте, вступают во фрикционное взаимодействие после потери работоспособности элементов, первоначально находящихся в контакте.

Вероятностная модель изнашиваемого тела

Рассмотрим изнашиваемое тело, состоящее из m слоев, каждый слой состоит из N элементов (рис.1).

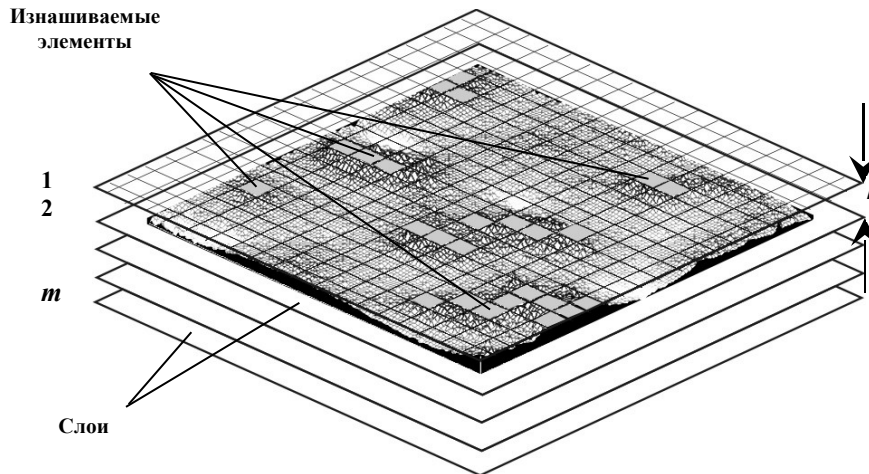


Рис. 1 – Схема изнашиваемого тела

Предположим, что:

- для функционирования слоя, достаточно, что бы в процессе изнашивания одновременно участвовало n элементов из N ;

- при потере работоспособности некоторого $n_{t=1,\dots,n}$ элемента, во фрикционное взаимодействие мгновенно вступает один из $k_{t=1,\dots,N-n}$ элементов;

- скорость изнашивания слоя — случайная величина, находящаяся в интервале v_1, \dots, v_n и величины скоростей изнашивания являются соизмеримыми;

- скорость изнашивания элемента по поверхности — постоянная величина, но изменяется случайным образом для элементов;

- тело изнашивается на величину h , если количество элементов находящихся одновременно во фрикционном контакте станет меньше n , то есть изнашивается $k + 1$ элемент;

Данной физической модели изнашиваемого тела можно поставить в соответствие модель надежности, состоящую из двух взаимосвязанных моделей:

- модель системы-слоя;

- модель системы-тела, элементами которой являются системы-слои.

Поведение системы-слоя можно описать с точки зрения надежности, как поведение системы с ненагруженным резервом, а именно:

- имеется n основных элементов, находящихся под нагрузкой и $k_{t=1,\dots,N-n}$ резервных элементов;

- любой отказавший из n рабочих элементов, мгновенно заменяется любым из $k_{t=1,\dots,N-n}$ элементов резерва;

- отказ системы-слоя наступает, если количество работоспособных элементов станет меньше n , то есть откажет элемент.

Для построения математической модели системы-слоя воспользуемся методом псевдосостояний [6]. Под псевдосостоянием системы U_j понимают состояние, при котором в системе находится $j = 0, \dots, k + 1$ отказавших элементов, при этом $P_j(t)$ - вероятность того, что в момент времени t в си-

стеме находится j отказавших элементов. Если количество отказавших элементов в системе достигнет $k + 1$, то наступит отказ системы (система-слой перейдет в поглощающее состояние). Граф состояний псевдосистемы для слоя представлен на рис. 2.

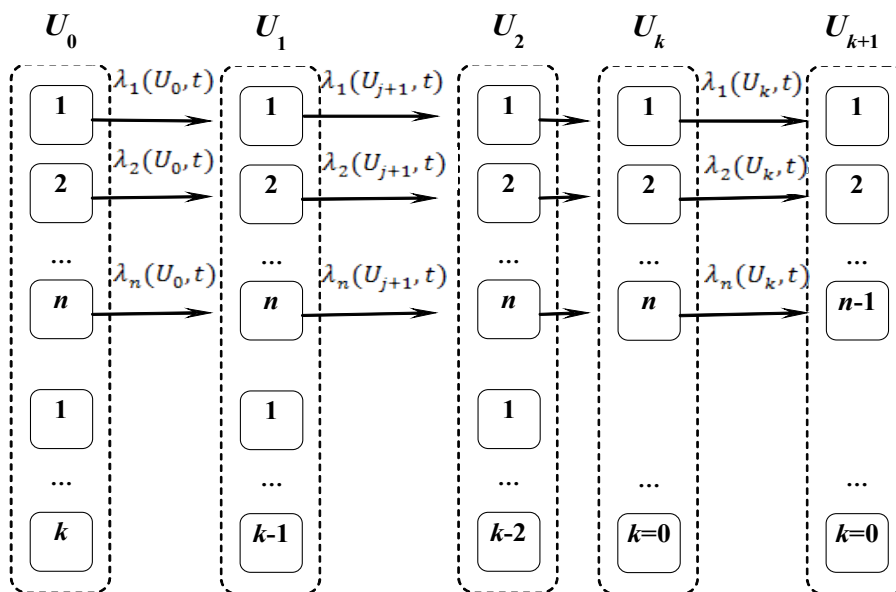


Рис. 2 – Граф состояний псевдосистемы

В псевдосостоянии U_j , где $0 \leq j \leq k + 1$, имеется j отказавших и n работающих элементов, каждый из которых имеет свою интенсивность отказов $\lambda_{i=1...n}(U_j, t)$, зависящую от времени t . Любой из n элементов в случае отказа может перевести систему-слой в состояние U_{j+1} .

Для описания поведения такого объекта можно составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова [6]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP_0(t)}{dt} &= - \sum_{i=1}^n \lambda_i(U_0, t) P_0(t); \\ \frac{dP_j(t)}{dt} &= \sum_{i=1}^n \lambda_i(U_{j-1}, t) P_{j-1}(t) - \sum_{i=1}^n \lambda_i(U_j, t) P_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, k; \\ \frac{dP_{k+1}(t)}{dt} &= \sum_{i=1}^n \lambda_i(U_k, t) P_k(t); \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где $P_j(t)$ – вероятность нахождения псевдосистемы в состоянии U_j ;

$\lambda_j(U_j, t)$ – интенсивность отказа i -го элемента $i = 1, \dots, n$ в зависимости от псевдосостояния системы U_j и времени.

Так как в начальный момент времени $t = 0$ рабочие и резервные элементы слоя находятся в рабочем состоянии, то $P_0(t = 0) = 1$ и $P_j(t = 0) = 0$ при $j > 0$.

Согласно предельной теореме для суммарного потока [6], система (1) может быть упрощена, если учесть, что

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(U_j, t) = \Lambda(U_j, k), \quad (2)$$

где $\Lambda(U_j, k)$ – суммарный поток отказов, переводящий систему из состояния U_j в состояние U_{j+1} ($j = 0, \dots, k + 1$).

Тогда (1) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP_0(t)}{dt} &= -\Lambda(U_0, t)P_0(t); \\ \frac{dP_j(t)}{dt} &= \Lambda(U_{j-1}, t)P_{j-1}(t) - \Lambda(U_j, t)P_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, k; \\ \frac{dP_{k+1}(t)}{dt} &= \Lambda(U_k, t)P_k(t); \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где $\Lambda(U_j, t)$ – суммарный поток отказов, переводящий систему из состояния U_j в состояние ;

$\Lambda(U_k, t)$ – суммарный поток отказов, переводящий систему из состояния U_k в поглощающее состояние .

Использование суммарного потока позволяет перейти к рассмотрению процесса чистого размножения с ограниченным числом псевдосостояний системы-слоя, граф состояний которой приведен на рис. 3.

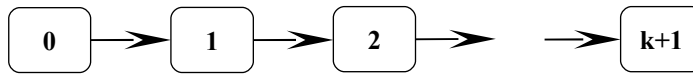


Рис. 3 – Граф состояний системы

Поведение системы, представленной на рис. 3, описывается системой дифференциальных уравнений (3), решение которой будет определяться видом функции $\Lambda(U_j, t)$.

Если функция $\Lambda(U_j, t)$ задана в общем виде, решение системы (3) в аналитической форме пока не получено, однако существуют частные решения, которые можно использовать при анализе поведения системы-слоя.

Анализируя поведение изнашиваемого слоя, следует рассматривать несколько случаев.

В случае стационарного изнашивания, скорость изнашивания, а следовательно, и суммарный поток отказов элементов слоя, является постоянной величиной, не зависящей от времени и количества отказавших элементов слоя, т.е. $\Lambda(U_j, t) = \text{const} = \Lambda$, при этом уравнения (3) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP_0(t)}{dt} &= -\Lambda P_0(t); \\ \frac{dP_j(t)}{dt} &= \Lambda P_{j-1}(t) - \Lambda P_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, k; \\ \frac{dP_{k+1}(t)}{dt} &= \Lambda P_k(t); \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Решение данной системы при начальных условиях $P_0(t=0) = 1$ и $P_j(t=0) = 0$ при $j > 0$ имеет вид [6]:

$$\left. \begin{aligned} P_0(t) &= e^{-\Lambda t}; \\ P_j(t) &= \frac{(\Lambda t)^j}{j!} e^{-\Lambda t}, \quad j = 1, 2, \dots, k; \\ P_{k+1}(t) &= 1 - \sum_{i=0}^k \frac{(\Lambda t)^i}{i!} e^{-\Lambda t}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где $E(j) = \Lambda t$ – математическое ожидание j -го состояния;

$D(j) = \Lambda t$ – дисперсия.

Если скорость изнашивания элементов зависит только от времени работы, то суммарный поток отказов системы-слоя является функцией времени и не зависит от состояния системы U_j .

Система уравнений (3) для данного случая примет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP_0(t)}{dt} &= -\Lambda(t)P_0(t); \\ \frac{dP_j(t)}{dt} &= \Lambda(t)P_{j-1}(t) - \Lambda(t)P_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, k; \\ \frac{dP_{k+1}(t)}{dt} &= \Lambda(t)P_k(t); \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Начальные условия: $P_0(t=0) = 1$ и $P_j(t=0) = 0$ при $j > 0$.

Согласно предельной теореме суммарного потока, $\Lambda(t)$ представляет нестационарный поток Пуассона.

Решение системы (6) имеет вид [6]:

$$\left. \begin{aligned} P_0(t) &= e^{-a(t)}; \\ P_j(t) &= \frac{a(t)^j}{j!} e^{-a(t)}, \quad j = 1, 2, \dots, k; \\ P_{k+1}(t) &= 1 - \sum_{i=0}^k \frac{a(t)^i}{i!} e^{-a(t)}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где $a(t) = \int_0^t \Lambda(t) dt$ – параметр закона.

Таким образом, первоначальная задача для системы с ненагруженным резервом путем использования предельной теоремы потоков свелась к задаче о процессе чистого размножения с ограниченным числом псевдосостояний. В зависимости от вида функции интенсивности суммарного потока отказов $\Lambda(U_j, t)$ приведены некоторые известные частные решения системы уравнений Колмогорова. Естественно, что приведенные выше решения, не могут удовлетворить всему многообразию условий функционирования трибосистем и зависимости скоростей изнашивания элементов будут иметь более сложный вид. В этом случае для решения системы уравнений (3) необходимо прибегнуть к численным методам решения дифференциальных уравнений. Однако, более целесообразно, перейти в данном случае от рассмотрения случайных процессов с непрерывным временем и дискретными состояниями к рассмотрению случайных процессов с дискретным временем и состояниями, что позволит описать данную задачу с помощью математического аппарата цепей Маркова [5]. Численная реализация на ЭВМ цепей Маркова эффективнее, чем решения нелинейных дифференциальных уравнений.

Для построения модели системы-тела, изнашиваемое тело можно представить в виде системы с $m + 1$ состоянием ($m + 1$ - количество слоев). Изнашивание такой системы представляет собой случайное одностороннее движение скачками величиной h , равной высоте слоя. Последовательное движение системы-тела из состояния 0 в состояние m можно описать схемой чистого размножения.

Поток, переводящий систему-тело из одного состояния в другое, определяется вероятностью перехода в поглощающее состояние соответствующей системы-слоя U_{k+1}^i ($i = 0, \dots, m$), которая определяется суммарной интенсивностью потока изнашивания $\Lambda(U_{k+1}^i, t)$, переводящей соответствующий слой в поглощающее состояние.

Для описания поведения такой системы можно воспользоваться системой дифференциальных уравнений Колмогорова [6]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP_0(t)}{dt} &= -\Lambda(U_{k+1}^0, t)P_0(t); \\ \frac{dP_i(t)}{dt} &= \Lambda(U_{k+1}^{i-1}, t)P_{i-1}(t) - \Lambda(U_{k+1}^i, t)P_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ \frac{dP_m(t)}{dt} &= \Lambda(U_{k+1}^{m-1}, t)P_{m-1}(t); \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Следует отметить, что ограничения, накладываемые в таких случаях на независимость от предыстории, не являются обязательным. Вводя в состав параметров, характеризующих настоящее состояние системы, те параметры из прошлого, от которых зависит будущее, можно данным математическим аппаратом описывать многие случайные процессы не марковского типа [6].

Решение системы (8) определяется видом $\Lambda(U_{k+1}^i, t)$. Для некоторых частных случаев имеется ряд решений, однако, они не могут удовлетворить всего многообразия поведения трибосистем, где соответствующие интенсивности $\Lambda(U_{k+1}^i, t)$ зависят от микро- и макро- геометрии контактирующих тел, физических и трибологических характеристик материалов, условий силового и теплового взаимодействия, наличия и вида смазочных материалов и т.д., будут иметь достаточно сложный вид. Поэтому для построения математической модели системы-тела целесообразно использовать модель удара и представить модель в дискретном времени [5].

Построение вероятностной модели изнашиваемого тела, как системы с высокой степенью резервирования, позволяет объяснить тот факт, что при достаточно жестких условиях, действующих в зоне фактических пятен контакта и соответственно низкой износостойкостью отдельно взятого фрикционного контакта, система в целом обеспечивает достаточно длительный период функционирования.

Выводы

На основании изложенного можно отметить следующее:

1. Вероятностное поведение изнашиваемого тела на уровне поверхностного слоя определяет макроуровневые изменения изнашиваемого тела.
2. Одной из основных характеристик, связывающих износ поверхностных слоев и макроуровневые изменения изнашиваемого тела в процессе функционирования трибосистемы, является суммарная интенсивность потока изнашивания, переводящая соответствующие поверхностные слои изнашиваемого тела в поглощающее состояние (износ соответствующих слоев).
3. Изнашиваемое тело необходимо рассматривать, как систему с высокой степенью резервирования, что объясняет обеспечение достаточно длительного периода функционирования системы в целом, при низкой износостойкости отдельно взятого фрикционного контакта.
4. Учитывая, что суммарная интенсивность потока изнашивания в общем случае определяется микро- и макро- геометрией контактирующих тел, физическими и трибологическими характеристиками материалов, условиями силового и теплового взаимодействия, наличием и видом смазочных материалов и т.д., построение математических моделей целесообразно проводить в дискретном времени, что позволит использовать математический аппарат цепей Маркова.

Литература

1. Герцбах И. Б. Модели отказов / И.Б. Герцбах, Х.Б. Кордонский. – М.: Сов. Радио, 1966. – 166 с.
2. Вероятностный анализ процесса изнашивания / [Кордонский Х.Б., Харач Г.М., Артамоновский В.П., Непомнящий Е.Ф.]. – М.: Наука, 1968. – 56 с.
3. Костецкий Б. И. Марковская модель износа и прогнозирование долговечности изнашиваемых деталей / Б. И. Костецкий, В. П. Стрельников, В. Г. Таций // Проблемы трения и изнашивания. – 1976. – № 10. – С. 10-15.
4. Богданофф Дж. Вероятностные модели накопления повреждений / Дж. Богданофф, Ф. Козин; пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 344 с.
5. Сорокатый Р. В. Метод трибоэлементов. Монография. / Р.В. Сорокатый. – Хмельницкий: ХНУ, 2009. – 242 с.
6. Венцель Е.С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения / Е.С. Венцель, Л.А. Овчаров – М.: Наука, 1991. – 384 с.

Надійшла 30.12.2010