УДК 517.958

М.П. Ленюк, Г.І.Міхалевська

ГІБРИДНЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ (КОНТОРОВИЧА-ЛЄБЄДЄВА)- ФУР'Є–ФУР'Є НА ПОЛЯРНІЙ ВІСІ [5]

(м. Чернівці, м. Хмельницький)

Методом дельта-подібної послідовності (ядро Коші) запроваджено гібридне інтегральне перетворення типу (Конторовича-Лєбєдєва)-Фур'є-Фур'є на полярній вісі $r \geq 0$ з двома точками спряження.

Методом дельта-образной последовательности (ядро Коши) введено гибридное интегральное преобразование типа (Конторовича-Лебедева)-Фурье–Фурье на полярной оси $r \geq 0$ с двумя точками сопряжения.

Бібліогр.: 7 назв.

Запровадимо методом дельта-подібної послідовності інтегральне перетворення, породжене на множині

$$I_2^+ = \{r : r \in (0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, \infty); 0 < R_1 < R_2 < \infty\}$$

гібридним диференціальним оператором

$$\mathcal{M} = a_1^2\theta(r)\theta(R_1 - r)B_\alpha + a_2^2\theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)d^2/dr^2 + a_3^2\theta(r - R_2)d^2/dr^2. \quad (1)$$

Тут $\theta(x)$ - одинична функція Хевісайда; $a_j > 0$, $j = \overline{1,3}$; $B_\alpha = r^2d^2/dr^2 + (2\alpha+1)rd/dr + \alpha^2 - \lambda^2r^2$, $2\alpha + 1 \geq 0$; $\lambda \in (0, \infty)$, B_α диференціальний оператор Бесселя 2-го порядку з виродженням при старшій похідній [1].

Розглянемо множину G вектор-функцій $g(r) = \{g_1(r); g_2(r); g_3(r)\}$ з такими властивостями:

1) справджуються умови обмеження

$$\lim_{r\to 0} r^{\alpha+1/2}\frac{d^k g_1}{dr^k} = 0, \quad \lim_{r\to\infty}\frac{d^k g_3}{dr^k} = 0, \quad k = 0, 1; \quad (2)$$

2) справджуються умови спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k\right)g_k(r) - \left(\alpha_{j2}^k\frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k\right)g_{k+1}(r)\right]\Bigg|_{r=R_k} = 0; \quad j, k = 1, 2; \quad (3)$$

3) вектор-функція $f(r) = \left\{B_\alpha[g_1(r)]; \dfrac{dg_2}{dr}; \dfrac{dg_3}{dr}\right\}$ неперервна на множині I_2^+.

---

[5]

Приймемо множину G за область визначення оператора $\mathcal{M}_\alpha$. Ми вважаємо, що $c_{1k}c_{2k} > 0$; $c_{jk} = \alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k$; $j, k = 1, 2$.

Визначимо числа:

$$\sigma_1 = \frac{1}{a_1^2}, \quad \sigma_2 = \frac{c_{21}}{c_{11}}R_1^{2\alpha+1}\frac{1}{a_2^2}, \quad \sigma_3 = \frac{c_{21}c_{22}}{c_{11}c_{12}}\frac{R_1^{2\alpha+1}}{a_3^2}.$$

Теорема 1. *Оператор $\mathcal{M}_\alpha$ узагальнено самоспряжений.*

Доведення. Візьмемо $u(r) \in G$ і $v(r) \in G$. Розглянемо скалярний добуток

$$(u(r), v(t)) = \int_0^\infty u(r)v(r)\sigma(r)dr = \int_0^{R_1} u_1(r)v_1(r)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr +$$

$$+ \int_{R_1}^{R_2} u_2(r)v_2(r)\sigma_2 dr + \int_{R_2}^{\infty} u_3(r)v_3(r)\sigma_3 dr. \quad (4)$$

Покажемо, що

$$(\mathcal{M}_\alpha[u(r)], v(r)) = (u(r), \mathcal{M}_\alpha[v(r)]). \quad (5)$$

Дійсно, інтегруючи частинами два рази під знаком інтагралів, маємо:

$$(\mathcal{M}_\alpha[u], v) = a_1^2\int_0^{R_1} B_\alpha[u_1]v_1\sigma_1 r^{2\alpha-1}dr + a_2^2\int_{R_1}^{R_2}(d^2u_2/dr^2]v_2\sigma_2 dr +$$

$$+a_3^2\int_{R_2}^{\infty}(d^2u_3/dr^2]v_3\sigma_3 dr = a_1^2\sigma_1 r^{2\alpha+1}\left(\frac{du_1}{dr}v_1 - u_1\frac{dv_1}{dr}\right)\Bigg|_0^{R_1} +$$

$$+a_2^2\sigma_2\left(\frac{du_2}{dr}v_2 - u_2\frac{dv_2}{dr}\right)\Bigg|_{R_1}^{R_2} + a_3^2\sigma_3\left(\frac{du_3}{dr}v_3 - u_3\frac{dv_3}{dr}\right)\Bigg|_{R_2}^{\infty} + (u, \mathcal{M}[v]). \quad (6)$$

Внаслідок умов (2)

$$\lim_{r\to 0} r^{2\alpha+1}\left(\frac{du_1}{dr}v_1 - u_1\frac{dv_1}{dr}\right) = 0, \quad \lim_{r\to\infty}\left(\frac{du_3}{dr}v_3 - u_3\frac{dv_3}{dr}\right) = 0.$$

Із того, що u_j та v_j задовольняють умови спряження (3), отримуємо базову тотожність

$$\left(\frac{du_j}{dr}v_j - u_j\frac{dv_j}{dr}\right)\Bigg|_{r=R_j} = \frac{c_{2j}}{c_{1j}}\left(\frac{du_{j+1}}{dr}v_{j+1} - u_{j+1}\frac{dv_{j+1}}{dr}\right)\Bigg|_{r=R_j}; \quad j = 1, 2. \quad (7)$$

Безпосередньо знаходимо

$$1)\quad \left[\sigma_1 R_1^{2\alpha+1} a_1^2 \left(\frac{du_1}{dr}v_1 - u_1\frac{dv_1}{dr}\right) - \sigma_2 a_2^2\left(\frac{du_2}{dr}v_2 - u_2\frac{dv_2}{dr}\right)\right]\Bigg|_{r=R_1} = \tag{8}$$

$$= \left(\sigma_1 R_1^{2\alpha+1} a_1^2 \frac{c_{21}}{c_{11}} - a_2^2\sigma_2\right)\left(\frac{du_2}{dr}v_2 - u_2\frac{dv_2}{dr}\right)\Bigg|_{r=R_1} = 0\cdot\left(\frac{du_2}{dr}v_2 - u_2\frac{dv_2}{dr}\right) \equiv 0,$$

$$2)\quad \left[\sigma_2 a_2^2\left(\frac{du_2}{dr}v_2 - u_2\frac{dv_2}{dr}\right) - a_3^2\sigma_3\left(\frac{du_3}{dr}v_3 - u_3\frac{dv_3}{dr}\right)\right]\Bigg|_{r=R_2} = \tag{9}$$

$$= \left(a_2^2\sigma_2\frac{c_{22}}{c_{12}} - a_3^2\sigma_3\right)\left(\frac{du_3}{dr}v_3 - u_3\frac{dv_3}{dr}\right)\Bigg|_{r=R_2} = 0\cdot\left(\frac{du_3}{dr}v_3 - u_3\frac{dv_3}{dr}\right)\Bigg|_{r=R_2} \equiv 0$$

за рахунок вибору чисел σ_1, σ_2. σ_3.

Внаслідок співвідношень (7), (8), (9) позаінтегральні члени в (6) анулюються. Рівність (6) набуває вигляду:

$$(\mathcal{M}_\alpha[u], v) = (u, \mathcal{M}_\alpha[v]); \quad u, v \in G. \tag{10}$$

Цим доведення теореми завершено.

Фундаментальну систему розвязків для диференціального рівняння Фур'є

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \beta^2\right) y = 0$$

утворюють функції $\cos\beta r$ і $\sin\beta r$ [2]. Оскільки вони обмежені при $r = \infty$ ($|\cos\beta r| \le 1$, $|\sin\beta r| \le 1$), то точка $r = \infty$ є особливою для диференціального оператора d^2/dr^2.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя

$$(B_\alpha + \beta^2)y = 0 \to \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\alpha+1}{r}\frac{d}{dr} - \left(\lambda^2 + \frac{(i\beta)^2 - \alpha^2}{r^2}\right)\right] y = 0$$

утворюють модифіковані функції Бесселя $I_{i\beta,\alpha}(\lambda r)$ і $K_{i\beta,\alpha}(\lambda r)$ [3].

Функція [4]

$$K_{i\beta}(x) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-i\beta}(x) + I_{i\beta}(x)}{i\,\mathrm{sh}\,\beta\pi} = \frac{\pi i}{2}\frac{I_{i\beta}(x) - I_{-i\beta}(x)}{\mathrm{sh}\,\pi\beta}. \tag{11}$$

Оскільки

$$K_{-i\beta}(x) = -\frac{\pi i}{2}\frac{I_{-i\beta}(x) - I_{i\beta}(x)}{\mathrm{sh}\,\pi\beta} = \frac{\pi i}{2}\frac{I_{i\beta}(x) - I_{-i\beta}(x)}{\mathrm{sh}\,\pi\beta} \equiv K_{i\beta}(x),$$

то функція $K_{i\beta}(x)$, а, отже, і функція $K_{i\beta,\alpha}(x)$ - дійсна функція змінних (x, β). Звідси випливає, що $I_{i\beta}(x)$ - комплекснозначна функція (x, β). Якщо покласти

$$I_{i\beta,\alpha}(x) = C_\alpha(x,\beta) - iD_\alpha(x,\beta), \tag{12}$$

то з рівності (11) знаходимо, що

$$D_\alpha(x,\beta) = \pi^{-1}(\,\mathrm{sh}\,\pi\beta)K_{i\beta,\alpha}(x). \tag{13}$$

Рівність (12) показує, що функція

$$C_\alpha(x,\beta) = I_{i\beta,\alpha}(x) + iD_\alpha(x,\beta) \equiv I_{i\beta,\alpha}(x) + i\frac{\mathrm{sh}\,\pi\beta}{\pi}K_{i\beta,\alpha}(x)$$

дійсна функція змінних (x, β). При цьому визначник Вронського

$$W[C_\alpha(x,\beta), D_\alpha(x,\beta)] = -\frac{\mathrm{sh}\,\pi\beta}{\pi x^{2\alpha+1}} \neq 0.$$

За фундаментальну систему розв'язків для рівняння Бесселя $(B_\alpha + \beta^2)y = 0$ можуть служити дійсні функції $C_\alpha(x,\beta)$ та $D_\alpha(x,\beta)$.

Якщо скористатися тим, що [4]

$$I_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^{2k}\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)}$$

то маємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{d}{dx}\left(\frac{I_\nu(x)}{x^\nu}\right) = 0 \text{ або } \lim_{x\to 0}\frac{d}{dx}\left(\frac{I_{\nu,\alpha}(x)}{x^{\nu-\alpha}}\right) = 0.$$

Останнє означає в силу рівності (12), що функції $C_\alpha(r,\beta)$ і $D_\alpha(r,\beta)$ мають однакову поведінку в точці $r = 0$. Значить, точка $r = 0$ є особливою для диференціального оператора B_α. Таким чином, гібридний диференціальний оператор $\mathcal{M}$ має дві особливі точки: $r = 0$ та $r = \infty$. У цьому випадку спектральна вектор-функція комплекснозначна:

$$V_\alpha(r,\beta) = \{V_{\alpha,1}(r,\beta); V_{\alpha,2}(r,\beta); V_{\alpha,3}(r,\beta)\} \equiv \tag{14}$$

$$\{V_{\alpha,11}(r,\beta) + iV_{\alpha,12}(r,\beta); V_{\alpha,21}(r,\beta) + iV_{\alpha,22}(r,\beta); V_{\alpha,31}(r,\beta) + iV_{\alpha,32}(r.\beta)\}.$$

При цьому спектр оператора $\mathcal{M}_\alpha$ внаслідок самоспряженості неперервний.

Розглянемо спектральну задачу Штурма-Ліувілля: побудувати обмежений на множині I_2^+ розв'язок сепаратної системи:

$$(B_\alpha + b_1^2)V_{\alpha,1}(r,\beta) = 0, \quad r \in (0, R_1),$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+b_j^2\right)V_{\alpha,j}(r,\beta)=0,\quad r\in(R_{j-1},R_j),\ j=2,3,\ R_3=\infty \tag{15}$$

за умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^k\right)V_{\alpha,k}(r,\beta)-\left(\alpha_{j2}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^k\right)V_{\alpha,k+1}(r,\beta)\right]\Bigg|_{r=R_k}=0;\quad j,k=1,2, \tag{16}$$

$b_m=a_m^{-1}(\beta^2+\gamma_m^2)^{1/2}$, $\gamma_m^2\geq 0$, $m=\overline{1,3}$.

Наявність обмеженої на $(0,\infty)$ фундаментальної системи розв'язків дає можливість будувати розв'язок крайової задачі (15), (16) за правилами [2]:

$$V_{\alpha,1}=A_1C_\alpha(\lambda r,b_1)+B_1D_\alpha(\lambda r,b_1),$$

$$V_{\alpha,j}=A_j\cos b_jr+B_j\sin b_jr,\ j=2,3. \tag{17}$$

Для визначення шести величин A_m, B_m $(m=\overline{1,3})$ маємо тільки чотири умови спряження. Отже, безпосередньо побудувати розв'язок крайової задачі (15), (16) неможливо.

Для побудови спектральної функції $V_\alpha(r,\beta)$ застосуємо метод дельта-подібної послідовності [5], за яку візьмемо ядро Коші - фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для системи рівнянь теплопровідності параболічного типу [6], породженої оператором $\mathcal{M}_\alpha$.

Розглянемо задачу про побудову обмеженого в області $D_2^+=\{(t,r):t\in(0,\infty),r\in I_2^+\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь теплопровідності параболічного типу [6]

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}+\gamma_1^2u_1-a_1^2B_\alpha[u_1]=0,\quad r\in(0,R_1),$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}+\gamma_2^2u_2-a_2^2\frac{\partial^2u_2}{\partial r^2}=0,\quad r\in(R_1,R_2), \tag{18}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t}+\gamma_3^2u_3-a_3^2\frac{\partial^2u_3}{\partial r^2}=0,\quad r\in(R_2,\infty)$$

за початковими умовами

$$u_j(t,r)|_{t=0}=g_j(r),\quad r\in(R_{j-1},R_j),\ j=\overline{1,3};\ R_0=0,\ R_3=\infty \tag{19}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^k\right)u_k(t,r)-\left(\alpha_{j2}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^k\right)u_{k+1}(t,r)\right]\Bigg|_{r=R_k}=0;\quad j,k=1,2. \tag{20}$$

Припустимо, що вектор-функція $u(t,r)=\{u_1(t,r);u_2(t,r);u_3(t,r)\}$ є оригіналом за Лапласом щодо t [7]. В зображеннях за Лапласом одержуємо крайову задачу: побудувати обмежений на множині I_2^+ розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь

$$(B_\alpha-q_1^2)u_1^*=-g_1(r)a_1^{-2},\quad r\in(0,R_1),$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}-q_j^2\right)u_j^*=-g_j(r)a_j^{-2},\quad r\in(R_{j-1},R_j),\ j=2,3 \tag{21}$$

за умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^k\right)u_k^*(p,r)-\left(\alpha_{j2}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^k\right)u_{k+1}^*(p,r)\right]\Bigg|_{r=R_k}=0;\quad j,k=1,2. \tag{22}$$

У рівностях (21), (22) $q_m=a_m^{-1}(p+\gamma_m^2)^{1/2}$,

$$u_m^*(p,r)=\int\limits_0^\infty u_m(t,r)e^{-pt}dt,\quad m=\overline{1,3}.$$

Зафіксуємо ту вітку $q_m=a_m^{-1}\sqrt{p+\gamma_m^2}$, на якій $Re q_m>0$.

Рівняння (1) перепишемо так:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2\alpha+1}{r}\frac{d}{dr}-\left(\lambda^2+\frac{q_1^2-\alpha^2}{r^2}\right)\right]u_1^*=-a_1^{-2}r^{-2}g_1(r)\equiv-\bar{g}_1(r). \tag{23}$$

Фундаментальну систему розв'язків для відповідного (23) однорідного рівняння утворюють модифіковані функції Бесселя $I_{q_1,\alpha}(\lambda r)$ та $K_{q_1,\alpha}(\lambda r)$ [3]; фундаментальну систему розв'язків для модифікованого рівняння Фур'є $(d^2/dr^2-q^2)v=0$ утворюють функції $\exp(-qr)$ і $\exp(qr)$ або їх лінійні комбінації $\operatorname{ch}qr$ та $\operatorname{sh}qr$ [2].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє будувати обмежений на множині I_2^+ розв'язок крайової задачі (21), (22) методом функції Коші [2, 5]:

$$u_1^*(p,r)=A_1I_{\nu,\alpha}(\lambda r)+\int\limits_0^{R_1}\mathcal{E}_\alpha^*(p,r,\rho)\bar{g}_1(\rho)\rho^{2\alpha+1}d\rho,\ \nu\equiv q_1.$$

$$u_2^*(p,r)=A_2\operatorname{ch}q_2r+B_2\operatorname{sh}q_2r+\int\limits_{R_1}^{R_2}\mathcal{E}_2^*(p,r,\rho)\bar{g}_2(\rho)d\rho, \tag{24}$$

$$u_3^*(p,r) = B_3 e^{-q_3(r-R_2)} + \int\limits_{R_2}^{\infty} \mathcal{E}_3^*(p,r,\rho)\bar{g}_3(\rho)d\rho.$$

У рівностях (24) беруть учать функції $\bar{g}_2(r) = a_2^{-2}g_2(r)$, $\bar{g}_3(r) = a_3^{-2}g_3(r)$, $\bar{g}_1(r) = a_1^{-2}r^{-2}g_1(r)$ і функції Коші $\mathcal{E}_\alpha^*(p,r,\rho)$ та $\mathcal{E}_j^*(p,r,\rho)$, $j = 2,3$ [2,5]:

$$\begin{cases} \mathcal{E}_\alpha^*(p,r,\rho)|_{r=\rho+0} - \mathcal{E}_\alpha^*(p,r,\rho)|_{r=\rho-0} = 0, \\ d/dr\mathcal{E}_\alpha^*(p,r,\rho)|_{r=\rho+0} - \frac{d}{dr}\mathcal{E}_\alpha^*(p,r,\rho)|_{r=\rho-0} = -\rho^{-(2\alpha+1)}, \end{cases} \tag{25}$$

$$\begin{cases} \mathcal{E}_m^*(p,r,\rho)|_{r=\rho+0} - \mathcal{E}_m^*(p,r,\rho)|_{r=\rho-0} = 0, \\ d/dr\mathcal{E}_m^*(p,r,\rho)|_{r=\rho+0} - d/dr\mathcal{E}_m^*(p,r,\rho)|_{r=\rho-0} = -1, m = 2,3. \end{cases} \tag{26}$$

Визначимо функції:

$$U_{\nu,\alpha;j1}^{11}(\lambda R_1) = \left(\alpha_{j1}^1 \frac{\nu-\alpha}{R_1}\right) I_{\nu,\alpha}(\lambda R_1) + \alpha_{j1}^1 R_1 \lambda^2 I_{\nu+1,\alpha+1}(\lambda R_1),$$

$$U_{\nu,\alpha;j1}^{12}(\lambda R_1) = \left(\alpha_{j1}^1 \frac{\nu-\alpha}{R_1}\right) K_{\nu,\alpha}(\lambda R_1) - \alpha_{j1}^1 R_1 \lambda^2 K_{\nu+1,\alpha+1}(\lambda R_1),$$

$$\Psi_{\nu,\alpha;j1}^{1*}(\lambda R_1, \lambda r) = U_{\nu,\alpha;j1}^{11}(\lambda R_1) K_{\nu,\alpha}(\lambda r) - U_{\nu,\alpha;j1}^{12}(\lambda R_1) I_{\nu,\alpha}(\lambda r), j = 1,2;$$

$$V_{jk}^{m1}(q_s R_m) = \alpha_{jk}^m q_s \operatorname{sh} q_s R_m + \beta_{jk}^m \operatorname{ch} q_s R_m,$$

$$V_{jk}^{m2}(q_s R_m) = \alpha_{jk}^m q_s \operatorname{ch} q_s R_m + \beta_{jk}^m \operatorname{sh} q_s R_m,$$

$$\Phi_{jk}^m(q_s R_m, q_s r) = V_{jk}^{m2}(q_s R_m) \operatorname{ch} q_s r - V_{jk}^{m1}(q_s R_m) \operatorname{sh} q_s r.$$

Припустимо, що функція Коші

$$\mathcal{E}_\alpha^* = \begin{cases} \overset{-*}{\mathcal{E}}_\alpha \equiv A_1 I_{\nu,\alpha}(\lambda r), & 0 < r < \rho < R_1, \\ \overset{+*}{\mathcal{E}}_\alpha \equiv A_2 I_{\nu,\alpha}(\lambda r) + B_2 K_{\nu,\alpha}(\lambda r), & 0 < \rho < r < R_1. \end{cases}$$

Властивості (25) дають алгебраїчну систему двох рівнянь

$$(A_2 - A_1) I_{\nu,\alpha}(\lambda\rho) + B_2 K_{\nu,\alpha}(\lambda\rho) = 0,$$

$$(A_2 - A_1) I'_{\nu,\alpha}(\lambda\rho) + B_2 K'_{\nu,\alpha}(\lambda\rho) = -\frac{1}{\lambda\rho^{2\alpha+1}}.$$

Звідси внаслідок того, що

$$I_{\nu,\alpha}(\lambda\rho) K'_{\nu,\alpha}(\lambda\rho) - K_{\nu,\alpha}(\lambda\rho) I'_{\nu,\alpha}(\lambda\rho) = -\frac{1}{(\rho\lambda)^{2\alpha+1}},$$

отримуємо співвідношення

$$A_2 - A_1 = -\lambda^{2\alpha} K_{\nu,\alpha}(\lambda\rho), \quad B_2 = \lambda^{2\alpha} I_{\nu,\alpha}(\lambda\rho). \tag{27}$$

Добавимо рівняння

$$\left(\alpha_{11}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^1\right) \overset{+*}{\mathcal{E}}_\alpha \bigg|_{r=R_1} \equiv U_{\nu,\alpha;11}^{11}(\lambda R_1) A_2 + U_{\nu,\alpha;11}^{12}(\lambda R_1) B_2 = 0. \tag{28}$$

Із систем (27), (28) знаходимо:

$$A_1 = \lambda^{2\alpha} (U_{\nu,\alpha;11}^{11}(\lambda R_1))^{-1} \Psi_{\nu,\alpha;11}^{1*}(\lambda R_1, \lambda\rho).$$

Цим функція Коші $\mathcal{E}_\alpha^*$ визначена і внаслідок симетрії відносно діагоналі $r = \rho$ має структуру:

$$\mathcal{E}_\alpha^*(p,r,\rho) = \frac{\lambda^{2\alpha}}{U_{\nu,\alpha;11}^{11}(\lambda R_1)} \begin{cases} I_{\nu,\alpha}(\lambda r) \Psi_{\nu,\alpha;11}^{1*}(\lambda R_1, \lambda\rho), & 0 < r < \rho < R_1, \\ I_{\nu,\alpha}(\lambda\rho) \Psi_{\nu,\alpha;11}^{1*}(\lambda R_1, \lambda r), & 0 < \rho < r < R_1. \end{cases} \tag{29}$$

Нехай функція Коші

$$\mathcal{E}_2^* = \begin{cases} \overset{-*}{\mathcal{E}}_2 \equiv A_1 \operatorname{ch} q_2 r + B_1 \operatorname{sh} q_2 r, & R_1 < r < \rho < R_2 \\ \overset{+*}{\mathcal{E}}_2 \equiv A_2 \operatorname{ch} q_2 r + B_2 \operatorname{sh} q_2 r, & R_1 < \rho < r < R_2 \end{cases}$$

Властивості (26) дають алгебраїчну систему:

$$\begin{cases} (A_2 - A_1) \operatorname{ch} q_2\rho + (B_2 - B_1) \operatorname{sh} q_2\rho = 0 \\ (A_2 - A_1) \operatorname{sh} q_2\rho + (B_2 - B_1) \operatorname{ch} q_2\rho = -q_2^{-1} \end{cases}.$$

Звідси отримуємо співвідношення

$$A_2 - A_1 = q_2^{-1} \operatorname{sh} q_2\rho, \quad B_2 - B_1 = -q_2^{-1} \operatorname{ch} q_2\rho. \tag{30}$$

Додамо рівняння

$$\begin{cases} (\alpha_{12}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{12}^1)\, \overset{-*}{\mathcal{E}}_2 \Big|_{r=R_1} \equiv V_{12}^{11}(q_2 R_1) A_1 + V_{12}^{12}(q_2 R_1) B_1 = 0 \\ (\alpha_{11}^2 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^2)\, \overset{+*}{\mathcal{E}}_2 \Big|_{r=R_2} \equiv V_{11}^{21}(q_2 R_2) A_2 + V_{11}^{22}(q_2 R_2) B_2 = 0 \end{cases}. \tag{31}$$

Із системи (30), (31) знаходимо:

$$A_1 = -\frac{V_{12}^{12}(q_2 R_1) \Phi_{11}^2(q_2 R_2, q_2\rho)}{q_2 \Delta_{11}(q_2 R_1, q_2 R_2)}, \quad B_1 = \frac{V_{12}^{11}(q_2 R_1) \Phi_{11}^2(q_2 R_2, q_2\rho)}{q_2 \Delta_{11}(q_2 R_1, q_2 R_2)}.$$

$$\Delta_{jk}(q_2 R_1, q_2 R_2) = V_{j2}^{11}(q_2 R_1) V_{k1}^{22}(q_2 R_2) - V_{j2}^{12}(q_2 R_1) V_{k1}^{21}(q_2 R_2); j.\ k = 1, 2.$$

Цим функція Коші $\mathcal{E}_2^*(p,r,\rho)$ визначена і внаслідок симетрії відносно діагоналі $r=\rho$ має структуру:

$$\mathcal{E}_2^*(p,r,\rho) = -\frac{1}{q_2\Delta_{11}(q_2R_1,q_2R_2)}\begin{cases}\Phi_{12}^1(q_2R_1,q_2r)\Phi_{11}^2(q_2R_2,q_2\rho),\\ \Phi_{12}^1(q_2R_1,q_2\rho)\Phi_{11}^2(q_2R_2,q_2r),\end{cases}$$
$$R_1<r<\rho<R_2,$$
$$R_1<\rho<r<R_2. \tag{32}$$

Якщо покласти

$$\mathcal{E}_3^* = \begin{cases}\overset{-*}{\mathcal{E}_3} \equiv A_1\operatorname{ch}q_3r + B_1\operatorname{sh}q_3r, & R_2<r<\rho<\infty\\ \overset{+*}{\mathcal{E}_3} \equiv B_2e^{-q_3(r-R_2)}, & R_1<r<\rho<\infty\end{cases},$$

то для визначення величин A_1, B_1, B_2 маємо алгебраїчну систему з трьох рівнянь

$$\begin{cases}-A_1\operatorname{ch}q_3\rho - B_1\operatorname{sh}q_3\rho + B_2e^{-q_3(\rho-R_2)} = 0,\\ A_1\operatorname{sh}q_3\rho + B_1\operatorname{ch}q_3\rho + B_2e^{-q_3(\rho-R_2)} = q_3^{-1},\\ A_1V_{12}^{21}(q_3R_2) + B_2V_{12}^{22}(q_3R_2) = 0\end{cases}$$

Звідси одержуємо,що

$$B_2 = \frac{1}{q_3(\alpha_{12}^2q_3-\beta_{12}^2)}\Phi_{12}^2(q_3R_2,q_3\rho).$$

Цим функція Коші $\mathcal{E}_3^*(p,r,\rho)$ визначена і внаслідок симетрії відносно діагоналі $r=\rho$ має структуру:

$$\mathcal{E}_3^*(p,r,\rho) = \frac{1}{q_3(\alpha_{12}^2q_3-\beta_{12}^2)}\begin{cases}e^{-q_3(\rho-R_2)}\Phi_{12}^2(q_3R_2,q_3r), & R_2<r<\rho<\infty,\\ e^{-q_3(r-R_2)}\Phi_{12}^2(q_3R_2,q_3\rho), & R_2<\rho<r<\infty.\end{cases} \tag{33}$$

Для визначення величин A_1, A_2, B_2, B_3, які беруть участь у формулах (24), умови спряження (22) дають алгебраїчну систему з чотирьох рівнянь

$$U_{\nu,\alpha;j1}^{11}(q_1R_1)A_1 - V_{j2}^{11}(q_2R_1)A_2 - V_{j2}^{12}(q_2R_1)B_2 = \delta_{j2}G_{12}^*,$$
$$V_{j1}^{21}(q_2R_1)A_2 - V_{j1}^{22}(q_2R_2)A_2 + (\alpha_{j2}^2q_3-\beta_{j2}^2)B_3 = \delta_{j2}G_{23}^*. \tag{34}$$

Тут δ_{jk} - символ Кронекера, а функції G_{12}^* та G_{23}^* відповідно рівні:

$$G_{12}^* = \frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha+1}}\int\limits_0^{R_1}\frac{I_{\nu,\alpha}(\lambda\rho)}{U_{\nu,\alpha;11}^{11}(\lambda R_1)}\bar{g}_1(\rho)\rho^{2\alpha+1}d\rho + c_{21}\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{\Phi_{11}^2(q_2R_2,q_2\rho)}{\Delta_{11}(q_2R_1,q_2R_2)}\bar{g}_2(\rho)d\rho,$$

$$G_{23}^* = -c_{12}\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{\Phi_{12}^1(q_2R_2,q_2\rho)}{\Delta_{11}(q_2R_1,q_2R_2)}\bar{g}_2(\rho)d\rho - c_{22}\int\limits_{R_2}^{\infty}\frac{e^{-q_3(\rho-R_2)}}{\alpha_{12}^2q_3-\beta_{12}^2}\bar{g}_3(\rho)d\rho.$$

Визначимо функції:

$$A_{\alpha,j}^*(p) = U_{\nu,\alpha;21}^{11}(\lambda R_1)\Delta_{1j}(q_2R_1,q_2R_2) - U_{\nu,\alpha;11}^{11}(\lambda R_1)\Delta_{2j}(q_2R_1,q_2R_2);$$

$$B_j^*(p) = (\alpha_{22}^2q_3-\beta_{22}^2)\Delta_{j1}(q_2R_1,q_2R_2) - (\alpha_{12}^2q_3-\beta_{12}^2)\Delta_{j2}(q_2R_1,q_2R_2).$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі (21), (22): для $p=\sigma+i\tau$ з $Rep=\sigma\geq\sigma_0$, де σ_0 - абсциса збіжності інтеграла Лапласа, та $Imp=\tau\in(-\infty,+\infty)$ визначник алгебраїчної системи (34)

$$\Delta_\alpha^*(p) \equiv (\alpha_{22}^2q_3-\beta_{22}^2)A_{\alpha,1}^*(p) - (\alpha_{12}^2q_3-\beta_{12}^2)A_{\alpha,2}^*(p) =$$
$$= U_{\nu,\alpha;21}^{11}(\lambda R_1)B_1^*(p) - U_{\nu,\alpha;11}^{11}(\lambda R_1)B_2^*(p) \neq 0. \tag{35}$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (34), підстановки виразів для A_1, A_2, B_2, B_3 у рівності (24) маємо єдиний розв'язок крайової задачі (21), (22):

$$u_j^*(p) = \int\limits_0^{R_1}H_{\alpha;j1}^*(p,r,\rho)\bar{g}_1(\rho)\rho^{2\alpha+1}d\rho + \int\limits_{R_1}^{R_2}H_{\alpha;j2}^*(p,r,\rho)\times$$
$$\times\bar{g}_2(\rho)d\rho + \int\limits_{R_2}^{\infty}H_{\alpha;j3}^*(p,r,\rho)\bar{g}_3(\rho)d\rho,\ j=1,2,3. \tag{36}$$

У рівностях (36) беруть участь функції впливу:

$$H_{\alpha;11}^*(p,r,\rho) = \frac{\lambda^{2\alpha}}{\Delta_\alpha^*(p)}\begin{cases}I_{\nu,\alpha}(\lambda r)[B_1^*(p)\Psi_{\nu,\alpha;21}^{1*}(\lambda R_1,\lambda\rho)-\\ I_{\nu,\alpha}(\lambda\rho)[B_1^*(p)\Psi_{\nu,\alpha;21}^{1*}(\lambda R_1,\lambda r)-\end{cases}$$
$$-B_2^*(p)\Psi_{\nu,\alpha;11}^{1*}(\lambda R_1,\lambda\rho),\ 0<r<\rho<R_1,$$
$$-B_2^*(p)\Psi_{\nu,\alpha;11}^{1*}(\lambda R_1,\lambda r),\ 0<\rho<r<R_1;$$

$$H_{\alpha;12}^*(p,r,\rho) = \frac{c_{21}}{\Delta_\alpha^*(p)}I_{\nu,\alpha}(\lambda r)[(\alpha_{22}^2q_3-\beta_{22}^2)\Phi_{11}^2(q_2R_2,q_2\rho)-$$
$$-(\alpha_{12}^2q_3-\beta_{12}^2)\Phi_{21}^2(q_2R_2,q_2\rho)],$$

$$H_{\alpha;13}^*(p,r,\rho) = \frac{c_{21}c_{22}q_2}{\Delta_\alpha^*(p)}I_{\nu,\alpha}(\lambda r)e^{-q_3(\rho-R_2)};$$

$$H^*_{\alpha;21}(p,r,\rho)=\frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha+1}}\frac{I_{\nu,\alpha}(\lambda\rho)}{\Delta^*_\alpha(p)}[(\alpha^2_{22}q_3-\beta^2_{22})\Phi^2_{11}(q_2R_2,q_2r)-$$
$$-(\alpha^2_{12}q_3-\beta^2_{12})\Phi^2_{21}(q_2R_2,q_2r)],$$

$$H^*_{\alpha;22}(p,r,\rho)=\frac{1}{q_2\Delta^*_\alpha(p)}\left\{\begin{array}{l}[U^{11}_{\nu,\alpha;11}(\lambda R_1)\Phi^1_{22}(q_2R_1,q_2r)-U^{11}_{\nu,\alpha;21}(\lambda R_1)\times\\ [U^{11}_{\nu,\alpha;11}(\lambda R_1)\Phi^1_{22}(q_2R_1,q_2\rho)-U^{11}_{\nu,\alpha;21}(\lambda R_1)\times\end{array}\right.$$
$$\begin{array}{l}\times\Phi^1_{12}(q_2R_1,q_2r)][(\alpha^2_{22}q_3-\beta^2_{22})\Phi^2_{11}(q_2R_2,q_2\rho)-\\ \times\Phi^1_{12}(q_2R_1,q_2\rho)][(\alpha^2_{22}q_3-\beta^2_{22})\Phi^2_{11}(q_2R_2,q_2r)-\end{array}\tag{37}$$
$$\begin{array}{l}(\alpha^2_{12}q_3-\beta^2_{12})\Phi^2_{21}(q_2R_2,q_2\rho)],\ \ R_1<r<\rho<R_2,\\ (\alpha^2_{12}q_3-\beta^2_{12})\Phi^2_{21}(q_2R_2,q_2r)],\ \ R_1<\rho<r<R_2;\end{array}$$

$$H^*_{\alpha;23}(p,r,\rho)=\frac{c_{22}}{\Delta^*_\alpha(p)}[U^{11}_{\nu,\alpha;11}(\lambda R_1)\Phi^1_{22}(q_2R_1,q_2r)-$$
$$-U^{11}_{\nu,\alpha;21}(\lambda R_1)\Phi^1_{12}(q_2R_1,q_2r)]e^{-q_3(\rho-R_2)};$$

$$H^*_{\alpha;31}(p,r,\rho)=\frac{c_{11}c_{12}q_2}{R_1^{2\alpha+1}\Delta^*_\alpha(p)}I_{\nu,\alpha}(\lambda\rho)e^{-q_3(r-R_2)},$$

$$H^*_{\alpha;32}(p,r,\rho)=\frac{c_{12}}{\Delta^*_\alpha(p)}[U^{11}_{\nu,\alpha;11}(\lambda R_1)\Phi^1_{22}(q_2R_1,q_2\rho)-$$
$$-U^{11}_{\nu,\alpha;21}(\lambda R_1)\Phi^1_{12}(q_2R_1,q_2\rho)]e^{-q_3(r-R_2)},$$

$$H^*_{\alpha;33}(p,r,\rho)=\frac{1}{q_3\Delta^*_\alpha(p)}\left\{\begin{array}{l}e^{-q_3(\rho-R_2)}[A^*_{\alpha,1}(p)\Phi^2_{22}(q_3R_2,q_3r)-\\ e^{-q_3(r-R_2)}[A^*_{\alpha,1}(p)\Phi^2_{22}(q_3R_2,q_3\rho)-\end{array}\right.\tag{37}$$
$$\begin{array}{l}-A^*_{\alpha,2}(p)\Phi^2_{12}(q_3R_2,q_3r)],\ \ R_2<r<\rho<\infty,\\ -A^*_{\alpha,2}(p)\Phi^2_{12}(q_3R_2,q_3\rho)]\ \ R_2<\rho<r<\infty.\end{array}$$

Особливими точками функцій впливу є точки галуження $p=-\gamma^2_m$ $(m=\overline{1,3})$ і $p=\infty$ [7]. Якщо покласти $q_j=ia_j^{-1}(\beta^2+k_j^2)^{1/2}\equiv ib_j$, де $k_j^2=\gamma^2-\gamma_j^2$, $\gamma^2=\max\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\}$, $j=1,2,3$, $i^2=-1$, то $p=-(\beta^2+\gamma^2)\equiv(\beta^2+\gamma^2)\exp(\pi i)$, $dp=-2\beta d\beta$.

Якщо ввести до розгляду функції

$$X^{11}_{\alpha,j1}(\lambda R_1,b_1)=\left(\alpha^1_{j1}\frac{d}{dr}+\beta^1_{j1}\right)C_{\alpha(\lambda r,b_1)}\Big|_{r=R_1},$$

$$X^{12}_{\alpha,j1}(\lambda R_1,b_1)=\left(\alpha^1_{j1}\frac{d}{dr}+\beta^1_{j1}\right)D_{\alpha(\lambda r,b_1)}\Big|_{r=R_1}$$

$$v^{m1}_{jk}(b_sR_m)=-\alpha^m_{jk}b_s\sin b_sR_m+\beta^m_{jk}\cos b_sR_m,$$
$$v^{m2}_{jk}(b_sR_m)=\alpha^m_{jk}b_s\cos b_sR_m+\beta^m_{jk}\sin b_sR_m,$$

то на основі співвідношень

$$I_{ib_1,\alpha}(\lambda r)=C_\alpha(\lambda r,b_1)-iD_\alpha(\lambda r,b_1),\quad \mathrm{ch}\,ib_sr=\cos b_sr,\quad \mathrm{sh}\,ib_sr=i\sin b_sr$$

одержуємо залежності:

$$U^{11}_{ib_1,\alpha;j1}(\lambda R_1)=X^{11}_{\alpha,j1}(\lambda R_1,b_1)-iX^{12}_{\alpha,j1}(\lambda R_1,b_1);$$
$$V^{m1}_{jk}(ib_sR_m)=v^{m1}_{jk}(b_sR_m),\quad V^{m2}_{jk}(ib_sR_m)=iv^{m2}_{jk}(b_sR_m);$$
$$\Delta_{jk}(ib_2R_q,ib_2R_2)=i[v^{11}_{j2}(b_1R_1)v^{22}_{k1}(b_2R_2)]-v^{12}_{j2}(b_2R_1)v^{21}_{k1}(b_2R_2)]\equiv$$
$$\equiv i\delta_{jk}(b_2R_1,b_2R_2);$$
$$\begin{aligned}A^*_{\alpha,j}((\beta^2+\gamma^2)e^{\pi i})&=X^{12}_{\alpha,21}(\lambda R_1,b_1)\delta_{1j}(b_2R_1,b_2R_2)-\\&-X^{12}_{\alpha,11}(\lambda R_1,b_1)\delta_{2j}(b_2R_1,b_2R_2)+\\+i[X^{11}_{\alpha,21}(\lambda R_1,b_1)\delta_{1j}(b_2R_1,b_2R_2)&-X^{11}_{\alpha,11}(\lambda R_1,b_1)\delta_{2j}(b_2R_1,b_2R_2)]\equiv\\&\equiv a_{\alpha,j2}(\beta)+ia_{\alpha,j1}(\beta);\\B^*_j((\beta^2+\gamma^2)e^{\pi i})&=[\alpha^2_{12}\delta_{j2}(b_2R_1,b_2R_2)-\alpha^2_{22}\delta_{j1}(b_2R_1,b_2R_2)]b_3(\beta)+\\+i[\beta^2_{12}\delta_{j2}(b_2R_1,b_2R_2)&-\beta^2_{22}\delta_{j1}(b_2R_1,b_2R_2)]=b_3(\beta)b_{j1}(\beta)+ib_{j2}(\beta).\end{aligned}\tag{38}$$

На підставі співвідношень (38) маємо:

$$\begin{aligned}\Delta^*_\alpha((\beta^2+\gamma^2)\exp\pi i)&=b_3e_{\alpha;11}(\beta)+e_{\alpha;22}(\beta)-i(b_3e_{\alpha;12}(\beta)-e_{\alpha;21}(\beta))\equiv\\&\equiv w_{\alpha,1}(\beta)-iw_{\alpha,2}(\beta);\end{aligned}\tag{39}$$
$$e_{\alpha,1j}(\beta)=\alpha^2_{12}a_{\alpha,2j}(\beta)-\alpha^2_{22}a_{\alpha,1j}(\beta);e_{\alpha,2j}(\beta)=\beta^2_{12}a_{\alpha,2j}(\beta)-\beta^2_{22}a_{\alpha,1j}(\beta);\ j=1,2.$$

На підставі леми Жордана і теореми Коші [7] отримуємо формулу обчислення оригіналу функцій впливу:

$$H_{\alpha,jk}(t,r,\rho)=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}Im\{H^*_{\alpha;jk}((\beta^2+\gamma^2)e^{\pi i},r,\rho)\}\beta d\beta;\ j,k=\overline{1,3}.\tag{40}$$

У результаті виконання у формулі (40) зазначених операцій послідовно одержуємо:

$$H_{\alpha;11}(t,r,\rho)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}[f_{\alpha,11}(\beta)D_\alpha(\lambda r,b_1)D_\alpha(\lambda\rho,b_1)+$$
$$+f_{\alpha,12}(\beta)C_\alpha(\lambda r,b_1)C_\alpha(\lambda\rho,b_1)-f_{\alpha,13}(\beta)(C_\alpha(\lambda r,b_1)D_\alpha(\lambda\rho,b_1)+$$

$$+C_\alpha(\lambda\rho,b_1)D_\alpha(\lambda r,b_1)]\frac{\lambda^{2\alpha}\pi\beta d\beta}{\operatorname{sh}\pi b([w_{\alpha,1}(\beta)]^2+w_{\alpha,2}(\beta)]^2)},$$

$$f_{\alpha;11}(\beta)=e^2_{\alpha,21}+b_3^2e^2_{\alpha,11}+b_3q_\alpha;\quad q_\alpha=e_{\alpha,11}e_{\alpha,22}-e_{\alpha,12}e_{\alpha,21};$$

$$f_{\alpha;12}(\beta)=e^2_{\alpha,22}+b_3^2e^2_{\alpha,12}+b_3q_\alpha;\quad q_\alpha=c_{11}c_{12}c_{21}c_{22}\frac{\operatorname{sh}\pi b_1}{\pi\lambda^{2\alpha}R_1^{2\alpha+1}}b_2^2>0;$$

$$f_{\alpha;13}(\beta)=e_{\alpha,21}e_{\alpha,22}+b_3^2e_{\alpha,11}e_{\alpha,12}\equiv e_{\alpha,21}w_{\alpha,1}+b_3e_{\alpha,11}w_{\alpha,2}\equiv$$

$$\equiv b_3e_{\alpha,12}(\beta)w_{\alpha,1}(\beta)-e_{\alpha,22}(\beta)w_{\alpha,2}(\beta);$$

$$H_{\alpha,12}(t,r,\rho)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}\{[y_{\alpha,11}(\beta)C_\alpha(\lambda r,b_1)+y_{\alpha,21}(\beta)D_\alpha(\lambda r,b_1)]\times$$

$$\times\sin b_2\rho-[y_{\alpha,12}(\beta)C_\alpha(\lambda r,b_1)+y_{\alpha,22}(\beta)D_\alpha(\lambda r,b_1)]\cos b_2\rho\}\times$$

$$\times\frac{\beta d\beta c_{21}}{[w_{\alpha,1}(\beta)]^2+[w_{\alpha,2}(\beta)]^2};$$

$$y_{\alpha,1j}=w_{\alpha,1}z_{2j}+b_3w_{\alpha,2}z_{1j},\quad y_{\alpha,2j}=w_{\alpha,2}z_{2j}-b_3w_{\alpha,1}z_{1j},\ j=1,2;$$

$$z_{1j}=\alpha_{12}^2v_{21}^{2j}-\alpha_{22}^2v_{11}^{2j},\quad z_{2j}=\beta_{12}^2v_{21}^{2j}-\beta_{22}^2v_{11}^{2j};$$

$$H_{\alpha,13}(t,r,\rho)=-\frac{2}{\pi}c_{21}c_{22}\int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}[(w_{\alpha,1}C_\alpha(\lambda r,b_1)+$$

$$+w_{\alpha,2}D_\alpha(\lambda r,b_1))\cos b_3(\rho-R_2)+$$

$$+(w_{\alpha,2}C_\alpha(\lambda r,b_1)+w_{\alpha,1}D_\alpha(\lambda r,b_1))\sin b_3(\rho-R_2)]\frac{\beta b_2(\beta)d\beta}{[w_{\alpha,1}(\beta)]^2+[w_{\alpha,2}(\beta)]^2};$$

$$H_{\alpha,21}(t,r,\rho)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}\{[y_{\alpha,11}(\beta)C_\alpha(\lambda\rho,b_1)+y_{\alpha,21}(\beta)D_\alpha(\lambda\rho,b_1)]\sin b_2r-$$

$$-[y_{\alpha,12}(\beta)C_\alpha(\lambda\rho,b_1)+y_{\alpha,22}(\beta)D_\alpha(\lambda\rho,b_1)]\cos b_2r\}\frac{\beta d\beta}{[w_{\alpha,1}(\beta)]^2+[w_{\alpha,2}(\beta)]^2}\frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha+1}};$$

$$H_{\alpha,22}(t,r,\rho)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}\{[(b_3z_{12}g_{\alpha,22}-z_{22}g_{\alpha,12})\cos b_2\rho+$$

$$+(z_{21}g_{\alpha,12}-b_3z_{11}g_{\alpha,22})\sin b_2\rho]\cos b_2r+[(b_3z_{11}g_{\alpha,21}-z_{21}g_{\alpha,11})\times$$

$$\times\sin b_2\rho+(z_{22}g_{\alpha,11}-b_3z_{12}g_{\alpha,21})\cos b_2\rho]\sin b_2r\}\frac{\beta d\beta}{b_2(\beta)([w_{\alpha,1}(\beta)]^2+[w_{\alpha,2}(\beta)]^2)};$$

$$g_{\alpha,1j}(\beta)=w_{\alpha,1}(\beta)d_{\alpha,j1}(\beta)+w_{\alpha,2}(\beta)d_{\alpha,j2}(\beta);$$

$$g_{\alpha,2j}(\beta)=w_{\alpha,1}(\beta)d_{\alpha,j2}(\beta)-w_{\alpha,2}(\beta)d_{\alpha,j1}(\beta);$$

$$d_{\alpha,jk}(\beta)=v_{22}^{1j}(b_2R_1)X^{1k}_{\alpha,11}(\lambda R_1,b_1)-v_{12}^{1j}(b_2R_1)X^{1k}_{\alpha,21}(\lambda R_1,b_1);\ j,k=1.2,$$

$$H_{\alpha,23}(t,r,\rho)=-\frac{2}{\pi}c_{22}\int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}[g_{\alpha,12}\cos b_2r\cos b_3(\rho-R_2)-$$

$$-g_{\alpha,22}\cos b_2r\sin b_3(\rho-R_2)-g_{\alpha,11}\sin b_2r\cos b_3(\rho-R_2)+$$

$$+g_{\alpha,21}\sin b_2r\sin b_3(\rho-R_2)]\frac{\beta d\beta}{[w_{\alpha,1}(\beta)]^2+[w_{\alpha,2}(\beta)]^2};$$

$$H_{\alpha,32}(t,r,\rho)=\frac{c_{12}}{c_{22}}H_{\alpha,23}(t,\rho,r);$$

$$H_{\alpha,31}(t,r,\rho)=\frac{c_{11}c_{12}}{c_{21}c_{22}}H_{\alpha,13}(t,\rho,r);$$

$$H_{\alpha,33}(t,r,\rho)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}\{[(b_3(e^2_{\alpha,11}+e^2_{\alpha,12})+q_\alpha(\beta))b_3\cos b_3(r-R_2)\times$$

$$\times\cos b_3(\rho-R_2)+(e^2_{\alpha,22}+e^2_{\alpha,21}+b_3q_\alpha)\sin b_3(r-R_2)\sin b_3(\rho-R_2)-$$

$$-b_3(e_{\alpha,11}e_{\alpha,21}+e_{\alpha,12}e_{\alpha,22})\sin b_3(r+\rho-R_2))]\frac{\beta d\beta}{b_3(\beta)([w_{\alpha,1}(\beta)]^2+[w_{\alpha,2}(\beta)]^2)}.$$

Нехай компоненти спектральної вектор-функції $V_\alpha(r,\beta)$ мають вигляд:

$$V_{\alpha,1}(r,\beta)=A_1C_\alpha(\lambda r,b_1)+B_1D_\alpha(\lambda r,b_1)+i(C_1C_\alpha(\lambda r,b_1)+D_1D_\alpha(\lambda r,b_1)),$$

$$V_{\alpha,2}(r,\beta)=A_2\cos b_2r+B_2\sin b_2r+i(C_2\cos b_2r+D_2\sin b_2r),\ V_{\alpha,3}(r,\beta)=$$

$$=A_3\cos b_3(r-R_2)+B_3\sin b_3(r-R_2)+i(C_3\cos b_3(r-R_2)+D_3\sin b_3(r-R_2)).$$

Тоді повинні справджуватися рівності:

$$H_{\alpha,jk}(t,r,\rho)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}Re[V_{\alpha,j}(r,\beta)\overline{V_{\alpha,k}(\rho,\beta)}]\Omega_\alpha(\beta)d\beta\sigma_k a_k^2,$$

$$j,k=1,2,3. \tag{41}$$

Тут прийнято, що

$$\Omega_\alpha(\beta)=\beta b_3^{-1}(\beta)([w_{\alpha,1}(\beta)]^2+[w_{\alpha,2}(\beta)]^2)^{-1},\quad \sigma_1=\frac{c_{11}c_{12}}{c_{21}c_{22}}\frac{1}{R_1^{2\alpha+1}}\frac{1}{a_1^2},$$

$\sigma_2=\dfrac{c_{12}}{c_{22}}\dfrac{1}{a_2^2}$, $\sigma_3=\dfrac{1}{a_3^2}$, $Re(\ldots)$ - дійсна частина виразу $(\ldots)$, риска зверху означає комплексне спряження.

Виконавши зазначені в рівностях (41) операції, для визначення коефіцієнтів A_j, B_j, C_j, D_j $(j = \overline{1,3})$ одержуємо алгебраїчну систему із 21 рівняння:

$$A_1^2 + C_1^2 = z_1 f_{\alpha,11}(\beta), \quad A_1B_2 + C_1D_2 = z_2 y_{\alpha,11}(\beta),$$
$$B_1^2 + D_1^2 = z_1 f_{\alpha,12}(\beta), \quad B_1B_2 + D_1D_2 = z_2 y_{\alpha,21}(\beta),$$
$$A_1B_1 + C_1D_1 = -z_1 f_{\alpha,13}(\beta), \quad A_1A_2 + C_1C_2 = -z_2 y_{\alpha,12}(\beta),$$
$$z_1 = \frac{\pi\lambda^{2\alpha}R_1^{2\alpha+1}}{\operatorname{sh}\pi b_1}\cdot\frac{c_{21}c_{22}b_3}{c_{11}c_{12}}, \quad B_1A_2 + D_1C_2 = -z_2 y_{\alpha,22}(\beta), \tag{42}$$
$$A_2^2 + C_2^2 = z_3 f_{\alpha,21}(\beta), \quad z_2 = \frac{c_{21}}{c_{12}}c_{22}b_3;$$
$$B_2^2 + D_2^2 = z_3 f_{\alpha,22}(\beta), \quad z_3 = \frac{c_{22}}{c_{12}}\frac{b_3}{b_2};$$
$$A_2B_2 + C_2D_2 = -z_3 f_{\alpha,23}(\beta), \quad z_4 = c_{21}c_{22}b_2b_3;$$

. . . .

$$A_3^2 + C_3^2 = b_3 f_{\alpha,31}(\beta),$$
$$B_3^2 + D_3^2 = f_{\alpha,32}(\beta), \tag{43}$$
$$A_3B_3 + C_3D_3 = -b_3 f_{\alpha,33}(\beta),$$
$$A_1A_3 + C_1C_3 = -z_4 w_{\alpha,1}(\beta), \quad A_2A_3 + C_2C_3 = -c_{22}b_3 g_{\alpha,12}(\beta),$$
$$B_1A_3 + D_1C_3 = -z_4 w_{\alpha,2}(\beta), \quad B_2B_3 + D_2D_3 = -c_{22}b_3 g_{\alpha,21}(\beta),$$
$$A_1B_3 + C_1D_3 = -z_4 w_{\alpha,2}(\beta), \quad B_2A_3 + D_2C_3 = c_{22}b_3 g_{\alpha,11}(\beta),$$
$$B_1B_3 + D_1D_3 = z_4 w_{\alpha,1}(\beta), \quad A_2B_3 + C_2D_3 = c_{22}b_3 g_{\alpha,22}(\beta).$$

Система із 21 рівняння розбита на дві групи рівнянь: в першу групу (42) входить 10 рівнянь, а в другу групу (43) входить 11 рівнянь.

Розглянемо групу рівнянь (43). Покладемо $C_3 = 0$. Послідовно знаходимо:

$$A_3 = \sqrt{b_3 f_{\alpha,31}(\beta)}; \quad B_3 = -b_3 f_{\alpha,33}(\beta)(b_3 f_{\alpha,31}(\beta))^{-1/2};$$
$$D_3 = \sqrt{\frac{q_{\alpha,1}(\beta)}{f_{\alpha,31}(\beta)}}; q_{\alpha,1}(\beta) = f_{\alpha,31}(\beta)f_{\alpha,32}(\beta) - b_3 f_{\alpha,33}^2(\beta) =$$
$$= c_{11}c_{12}c_{21}c_{22}b_2^2([w_{\alpha,1}(\beta)]^2 + [w_{\alpha,2}(\beta)]^2)\frac{\operatorname{sh}\pi b_1}{\pi\lambda^{2\alpha}R_1^{2\alpha+1}};$$
$$A_2 = -\frac{c_{22}b_3}{\sqrt{b_3 f_{\alpha,31}(\beta)}}g_{\alpha,12}, \quad B_2 = \frac{c_{22}b_3}{\sqrt{b_3 f_{\alpha,31}(\beta)}}g_{\alpha,11}(\beta);$$

$$C_2 = \frac{\sqrt{q_{\alpha,1}(\beta)}b_3(\beta)}{c_{12}b_2(\beta)\sqrt{f_{\alpha,31}(\beta)}}z_{12}(\beta), \quad D_2 = -\frac{b_3(\beta)\sqrt{q_{\alpha,1}(\beta)}}{c_{12}b_2\sqrt{f_{\alpha,31}(\beta)}}z_{11}(\beta);$$
$$A_1 = -\frac{z_4 w_{\alpha,1}(\beta)}{\sqrt{b_3 f_{\alpha,31}(\beta)}}, \quad B_1 = -\frac{z_4 w_{\alpha,2}(\beta)}{\sqrt{b_3 f_{\alpha,31}(\beta)}};$$
$$C_1 = -\frac{z_4 e_{\alpha,12}([w_{\alpha,1}(\beta)]^2 + [w_{\alpha,2}(\beta)]^2)}{\sqrt{q_{\alpha,1}f_{\alpha,31}(\beta)}} =$$
$$= -\frac{z_4}{\sqrt{q_{\alpha,1}f_{\alpha,31}(\beta)}}[w_{\alpha,1}(\beta)f_{\alpha,33}(\beta) + w_{\alpha,2}(\beta)f_{\alpha,31}(\beta)];$$
$$D_1 = \frac{z_4 e_{\alpha,11}([w_{\alpha,1}(\beta)]^2 + [w_{\alpha,2}(\beta)]^2)}{\sqrt{q_{\alpha,1}f_{\alpha,31}(\beta)}} =$$
$$= \frac{z_4}{\sqrt{q_{\alpha,1}f_{\alpha,31}(\beta)}}[w_{\alpha,1}(\beta)f_{\alpha,31}(\beta) - w_{\alpha,2}(\beta)f_{\alpha,33}(\beta)].$$

Компоненти $V_{\alpha,j}(r,\beta)$ спектральної вектор-функції $V_\alpha(r,\beta)$ визначені:

$$V_{\alpha,1}(r,\beta) = -\frac{z_4}{\sqrt{b_3 f_{\alpha,31}(\beta)}}[w_{\alpha,1}(\beta)C_\alpha(\lambda r, b_1) + w_{\alpha,2}(\beta)D_\alpha(\lambda r, b_1)] +$$
$$+ i\frac{z_4([w_{\alpha,1}(\beta)]^2 + [w_{\alpha,2}(\beta)]^2)}{\sqrt{q_{\alpha,1}f_{\alpha,31}(\beta)}}[e_{\alpha,11}D_\alpha(\lambda r, b_1) - e_{\alpha,12}C_\alpha(\lambda r, b_1)];$$
$$V_{\alpha,2}(r,\beta) = \frac{c_{22}\sqrt{b_3}}{\sqrt{f_{\alpha,31}(\beta)}}[g_{\alpha,11}(\beta)\sin b_2 r - g_{\alpha,12}(\beta)\cos b_2 r] +$$
$$+ i\frac{b_3\sqrt{q_{\alpha,1}(\beta)}}{c_{12}b_2\sqrt{f_{\alpha,31}(\beta)}}[z_{12}(\beta)\cos b_2 r - z_{11}(\beta)\sin b_2 r];$$
$$V_{\alpha,3}(r,\beta) = \frac{b_3}{\sqrt{b_3 f_{\alpha,31}(\beta)}}[f_{\alpha,31}(\beta)\cos b_2(r - R_2) - f_{\alpha,33}(\beta)\sin b_2(r - R_2)] +$$
$$+ i[q_{\alpha,1}(\beta)f_{\alpha,31}^{-1}(\beta)]\sin b_3(r - R_2). \tag{45}$$

Математичним обгрунтуванням одержаних формул (44), (45) є твердження.

Теорема 2. *Функції $V_{\alpha,j}(r,\beta)$, визначені формулами (45), задовольняють систему рівнянь (15) та умови спряження (16).*

Доведення. Оскільки $(B_\alpha + b_1^2)C_\alpha(\lambda r, b_1) \equiv 0$, $(B_\alpha + b_1^2)D_\alpha(\lambda r, b_1) \equiv 0$, то перше рівняння системи (15) задовольняє функція $V_{\alpha,1}(r,\beta)$. В силу того, що

$$(d^2/dr^2 + b_2^2)\cos b_2 r \equiv 0, \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + b_2^2\right)\sin b_2 r \equiv 0,$$

$$(d^2/dr^2 + b_3^2)\cos b_3(r - R_2) \equiv 0, \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + b_3^2\right)\sin b_3(r - R_2) \equiv 0,$$

функція $V_{\alpha,2}(r,\beta)$ задовольняє друге рівняння, а функція $V_{\alpha,3}(r,\beta)$ - третє рівняння системи (15).

Покажемо, що справджуються умови спряження (16) окремо для $ReV_{\alpha,j}(r,\beta)$ та $ImV_{\alpha,j}(r,\beta)$ $(j = 1,2,3)$.

Безпосередньо маємо:

$$\left(\alpha_{11}^1\frac{d}{dr} + \beta_{11}^1\right)V_{\alpha,11}(r,\beta)\bigg|_{r=R_1} = -z_4(b_3 f_{\alpha,31}(\beta))^{-1/2}\times$$

$$\times[w_{\alpha,1}X_{\alpha,11}^{11}(\lambda R_2, b_1) + w_{\alpha,2}(\beta)X_{\alpha,11}^{12}(\lambda R_1, b_1)];$$

$$\left(\alpha_{12}^1\frac{d}{dr} + \beta_{12}^1\right)V_{\alpha,21}(r,\beta)\bigg|_{r=R_1} =$$

$$= c_{22}b_3(\beta)(b_3 f_{\alpha,31}(\beta))^{-1/2}[g_{\alpha,11}(\beta)v_{12}^{12}(b_2R_1) - g_{\alpha,12}(\beta)v_{12}^{11}(b_2R_1)] =$$

$$= -z_4(b_3 f_{\alpha,31}(\beta))^{-1/2}[w_{\alpha,1}X_{\alpha,11}^{11}(\lambda R_2, b_1) + w_{\alpha,2}(\beta)X_{\alpha,11}^{12}(\lambda R_1, b_1)],$$

тому, що

$$g_{\alpha,11}v_{12}^{12} - g_{\alpha,12}v_{12}^{11} = (w_{\alpha,1}d_{\alpha,11} + w_{\alpha,2}d_{\alpha,12})v_{12}^{12} - (w_{\alpha,1}d_{\alpha,21} +$$

$$+ w_{\alpha,2}d_{\alpha,22})v_{12}^{11} = w_{\alpha,1}(d_{\alpha,11}v_{12}^{12} - v_{12}^{11}d_{\alpha,21}) + w_{\alpha,2}(d_{\alpha,12}v_{12}^{12} -$$

$$- d_{\alpha,22}v_{12}^{11}) = w_{\alpha,1}[(v_{22}^{22}X_{\alpha,11}^{11} - v_{12}^{11}X_{\alpha,21}^{11})v_{12}^{12} - (v_{22}^{12}X_{\alpha,11}^{11} -$$

$$- v_{12}^{12}X_{\alpha,21}^{11})v_{12}^{11}] + w_{\alpha,2}[v_{12}^{12}(v_{22}^{11}X_{\alpha,11}^{12} - v_{12}^{11}X_{\alpha,21}^{12}) - v_{12}^{11}(v_{22}^{12}X_{\alpha,11}^{12} - v_{12}^{12}X_{\alpha,21}^{12})] =$$

$$= (v_{22}^{11}v_{12}^{12} - v_{12}^{11}v_{22}^{12})(w_{\alpha,1}X_{\alpha,11}^{11} + w_{\alpha,2}X_{\alpha,11}^{12}) = -c_{21}b_2(w_{\alpha,1}X_{\alpha,11}^{11} + w_{\alpha,2}X_{\alpha,11}^{12}).$$

Звідси виходить, що

$$\left(\alpha_{11}^1\frac{d}{dr} + \beta_{11}^1\right)V_{\alpha,11}(r,\beta)\bigg|_{r=R_1} \equiv \left(\alpha_{12}^1\frac{d}{dr} + \beta_{12}^1\right)V_{\alpha,21}(r,\beta)\bigg|_{r=R_1}. \tag{46}$$

Далі знаходимо:

$$e_{\alpha,11}X_{\alpha,11}^{12} - e_{\alpha,12}X_{\alpha,11}^{11} = (\alpha_{12}^2 a_{\alpha,21} - \alpha_{22}^2 a_{\alpha,11})X_{\alpha,11}^{12} - (\alpha_{12}^2 a_{\alpha,22} - \alpha_{22}^2 a_{\alpha,12})\times$$

$$\times X_{\alpha,11}^{11} = \frac{c_{11}\,\mathrm{sh}\,\pi b_1}{\pi\lambda^{2\alpha}R_1^{2\alpha+1}}[\alpha_{12}^2\delta_{12}(b_2R_1, b_2R_2) - \alpha_{22}^2\delta_{11}(b_2R_1, b_2R_2)];$$

$$z_{12}v_{12}^{11} - z_{11}v_{12}^{12} = (\alpha_{12}^2 v_{21}^{22} - \alpha_{22}^2 v_{11}^{22})v_{12}^{11} - (\alpha_{12}^2 v_{21}^{21} - \alpha_{22}^2 v_{11}^{21})v_{12}^{12} =$$

$$= \alpha_{12}^2\delta_{12} - \alpha_{22}^2\delta_{11};$$

Оскільки

$$z_4([w_{\alpha,1}(\beta)]^2 + [w_{\alpha,2}(\beta)]^2)\frac{c_{11}\,\mathrm{sh}\,\pi b_1}{\pi\lambda^{2\alpha}R_1^{2\alpha+1}} = \frac{q_{\alpha,1}b_3}{c_{12}b_2},$$

то одержуємо:

$$\left(\alpha_{11}^1\frac{d}{dr} + \beta_{11}^1\right)V_{\alpha,12}(r,\beta)\bigg|_{r=R_1} =$$

$$= \frac{b_3\sqrt{q_{\alpha,1}}}{c_{12}b_2\sqrt{f_{\alpha,31}}}[\alpha_{12}^2\delta_{12}(b_2R_1, b_2R_2) - \alpha_{22}^2\delta_{11}(b_2R_1, b_2R_2)],$$

$$\left(\alpha_{12}^1\frac{d}{dr} + \beta_{12}^1\right)V_{\alpha,22}(r,\beta)\bigg|_{r=R_1} =$$

$$= \frac{b_3\sqrt{q_{\alpha,1}}}{c_{12}b_2\sqrt{f_{\alpha,31}}}[\alpha_{12}^2\delta_{12}(b_2R_1, b_2R_2) - \alpha_{22}^2\delta_{11}(b_2R_1, b_2R_2)].$$

Звідси випливає, що

$$\left(\alpha_{11}^1\frac{d}{dr} + \beta_{11}^1\right)V_{\alpha,12}(r,\beta)\bigg|_{r=R_1} \equiv \left(\alpha_{12}^1\frac{d}{dr} + \beta_{12}^1\right)V_{\alpha,22}(r,\beta)\bigg|_{r=R_1}. \tag{47}$$

Тотожності (46) і (47) показують, що

$$\left(\alpha_{11}^1\frac{d}{dr} + \beta_{11}^1\right)V_{\alpha,1}(r,\beta)\bigg|_{r=R_1} \equiv \left(\alpha_{12}^1\frac{d}{dr} + \beta_{12}^1\right)V_{\alpha,2}(r,\beta)\bigg|_{r=R_1}. \tag{48}$$

Аналогічно перевіряється виконання другої умови спряження в точці $r = R_1$.

Покажемо, що

$$\left(\alpha_{11}^2\frac{d}{dr} + \beta_{11}^2\right)V_{\alpha,2}(r,\beta)\bigg|_{r=R_2} \equiv \left(\alpha_{12}^2\frac{d}{dr} + \beta_{12}^2\right)V_{\alpha,3}(r,\beta)\bigg|_{r=R_2}.$$

Безпосередньо одержуємо:

$$\left(\alpha_{11}^2\frac{d}{dr} + \beta_{11}^2\right)V_{\alpha,21}(r,\beta)\bigg|_{r=R_1} = \frac{b_3c_{22}}{\sqrt{b_3 f_{\alpha,31}}}(g_{\alpha,11}v_{11}^{22} - g_{\alpha,12}v_{11}^{21}),$$

$$\left(\alpha_{12}^2\frac{d}{dr} + \beta_{12}^2\right)V_{\alpha,31}(r,\beta)\bigg|_{r=R_1} = \frac{b_3}{\sqrt{b_3 f_{\alpha,31}}}[\beta_{12}^2 f_{\alpha,31} - \alpha_{12}^2 b_3 f_{\alpha,33}].$$

Оскільки

$$g_{\alpha,11}v_{11}^{22} - g_{\alpha,12}v_{11}^{21} = (w_{\alpha,1}d_{\alpha,11} + w_{\alpha,2}d_{\alpha,12})v_{11}^{22} -$$

$$-(w_{\alpha,1}d_{\alpha,21}+w_{\alpha,2}d_{\alpha,22})v_{11}^{21}=$$
$$=w_{\alpha,1}(v_{11}^{22}d_{\alpha,11}-v_{11}^{21}d_{\alpha,21})+w_{\alpha,2}(d_{\alpha,12}v_{11}^{22}-d_{\alpha,22}v_{11}^{21})=$$
$$w_{\alpha,1}[v_{11}^{22}(v_{22}^{11}X_{\alpha,11}^{11}-v_{12}^{11}X_{\alpha,21}^{11})-v_{11}^{21}(v_{22}^{11}X_{\alpha,11}^{11}-v_{12}^{12}X_{\alpha,21}^{11})]+$$
$$+w_{\alpha,2}[v_{11}^{22}(v_{22}^{11}X_{\alpha,11}^{12}-v_{12}^{11}X_{\alpha,21}^{12})-v_{11}^{21}(v_{22}^{12}X_{\alpha,11}^{12}-v_{12}^{12}X_{\alpha,21}^{12})]=$$
$$w_{\alpha,1}[X_{\alpha,11}^{11}\delta_{21}-X_{\alpha,21}^{11}\delta_{11}]+w_{\alpha,2}[X_{\alpha,11}^{12}\delta_{21}-X_{\alpha,21}^{12}\delta_{11}]=$$
$$=-(w_{\alpha,1}a_{\alpha,11}+w_{\alpha,2}a_{\alpha,12});$$
$$\beta_{12}^2f_{\alpha,31}-\alpha_{12}^2b_3f_{\alpha,33}=\beta_{12}^2(e_{\alpha,11}w_{\alpha,1}+e_{\alpha,12}w_{\alpha,2})-\alpha_{12}^2(e_{\alpha,21}w_{\alpha,1}+$$
$$+e_{\alpha,22}w_{\alpha,2})=w_{\alpha,1}[\beta_{12}^2e_{\alpha,11}-\alpha_{12}^2e_{\alpha,21}]+w_{\alpha,2}[\beta_{12}^2e_{\alpha,12}-\alpha_{12}^2e_{\alpha,22}]=$$
$$=-c_{22}(w_{\alpha,1}a_{\alpha,11}+w_{\alpha,2}a_{\alpha,12}),$$

то маємо тотожність

$$\left(\alpha_{11}^2\frac{d}{dr}+\beta_{11}^2\right)V_{\alpha,21}(r,\beta)\Big|_{r=R_2}\equiv\left(\alpha_{12}^2\frac{d}{dr}+\beta_{12}^2\right)V_{\alpha,31}(r,\beta)\Big|_{r=R_2}. \qquad (49)$$

Внаслідок того, що

$$z_{12}v_{11}^{21}-z_{11}v_{11}^{22}=(\alpha_{12}^2v_{21}^{22}-\alpha_{22}^2v_{11}^{22})v_{11}^{21}-(\alpha_{12}^2v_{21}^{21}-\alpha_{22}^2v_{11}^{21})v_{11}^{22}=$$
$$=(\alpha_{12}^2(v_{11}^{21}v_{21}^{22}-v_{21}^{21}v_{11}^{22})=\alpha_{12}^2c_{12}b_2,$$

одержуємо:

$$\left(\alpha_{11}^2\frac{d}{dr}+\beta_{11}^2\right)V_{\alpha,22}(r,\beta)\Big|_{r=R_2}=\frac{b_3\sqrt{q_{\alpha,1}(\beta)}}{\sqrt{f_{\alpha,31}(\beta)}}\alpha_{12}^2;$$
$$\left(\alpha_{12}^2\frac{d}{dr}+\beta_{12}^2\right)V_{\alpha,32}(r,\beta)\Big|_{r=R_2}=[q_{\alpha,1}(\beta)f_{\alpha,31}^{-1}]^{1/2}\alpha_{12}^2b_3.$$

Отже, маємо тотожність

$$\left(\alpha_{11}^2\frac{d}{dr}+\beta_{11}^2\right)V_{\alpha,22}(r,\beta)\Big|_{r=R_2}\equiv\left(\alpha_{12}^2\frac{d}{dr}+\beta_{12}^2\right)V_{\alpha,32}(r,\beta)\Big|_{r=R_2}. \qquad (50)$$

Із тотожностей (49) та (50) випливає рівність:

$$\left(\alpha_{11}^2\frac{d}{dr}+\beta_{11}^2\right)V_{\alpha,2}(r,\beta)\Big|_{r=R_2}\equiv\left(\alpha_{12}^2\frac{d}{dr}+\beta_{12}^2\right)V_{\alpha,3}(r,\beta)\Big|_{r=R_2}. \qquad (51)$$

Аналогічно показується справедливість другої умови спряження в точці $r=R_2$.

На цьому доведення теореми завершується.

Теорема 3. *Якщо в системі рівнянь (43) покласти $C_3=0$ і обчислити коефіцієнти A_j, B_j, C_j, D_j $(j=1,2,3)$ із одержаних одинадцяти рівнянь (формули (44)), то десять рівнянь групи (42) тотожньо задовольняються.*

Доведення. Відмітимо, що

$$f_{\alpha,31}=e_{\alpha,11}w_{\alpha,1}+e_{\alpha,12}w_{\alpha,2}, f_{\alpha,32}=e_{\alpha,22}w_{\alpha,1}-e_{\alpha,21}w_{\alpha,2};$$
$$f_{\alpha,33}=b_3^{-1}(e_{\alpha,21}w_{\alpha,1}+e_{\alpha,22}w_{\alpha,2})\equiv e_{\alpha,12}w_{\alpha,1}-e_{\alpha,11}w_{\alpha,2}.$$

Безпосередньо встановлюємо співвідношення:

$$g_{\alpha,22}f_{\alpha,31}-g_{\alpha,12}f_{\alpha,33}=q_{\alpha,1}(c_{12}c_{22}b_2)^{-1}z_{12},$$
$$g_{\alpha,12}f_{\alpha,32}-b_3g_{\alpha,22}f_{\alpha,33}=-q_{\alpha,1}(c_{12}c_{22}b_2)^{-1}z_{22},$$
$$g_{\alpha,21}f_{\alpha,31}-g_{\alpha,11}f_{\alpha,33}=q_{\alpha,1}(c_{12}c_{22}b_2)^{-1}z_{11},$$
$$g_{\alpha,11}f_{\alpha,32}-b_3g_{\alpha,21}f_{\alpha,33}=-q_{\alpha,1}(c_{12}c_{22}b_2)^{-1}z_{21},$$
$$f_{\alpha,11}=e_{\alpha,22}w_{\alpha,1}+b_3e_{\alpha,12}w_{\alpha,2}; f_{\alpha,12}=b_3e_{\alpha,11}w_{\alpha,1}-e_{\alpha,21}w_{\alpha,2};$$
$$e_{\alpha,11}e_{\alpha,22}-e_{\alpha,12}e_{\alpha,21}=c_{22}(a_{\alpha,12}a_{\alpha,21}-a_{\alpha,11}a_{\alpha,22})=c_{22}(X_{\alpha,21}^{11}X_{\alpha,11}^{12}-$$
$$-X_{\alpha,11}^{11}X_{\alpha,21}^{12})(\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}\delta_{21})=c_{11}\frac{\operatorname{sh}\pi b_1}{\pi\lambda^{2\alpha}R_1^{2\alpha+1}}c_{21}c_{12}b_2^2.$$

На підставі формул (44) одержуємо:

$$A_2^2+C_2^2=\frac{c_{22}^2g_{\alpha,12}^2b_3}{f_{\alpha,31}}+\frac{b_3^2q_{\alpha,1}}{c_{12}^2b_2^2f_{\alpha,31}}z_{12}^2=\frac{c_{22}^2b_3}{q_{\alpha,1}f_{\alpha,31}}[q_{\alpha,1}g_{\alpha,12}^2+$$
$$+b_3(g_{\alpha,22}f_{\alpha,31}-g_{\alpha,12}f_{\alpha,33})^2]=\frac{c_{22}^2b_3}{q_{\alpha,1}f_{\alpha,31}}[g_{\alpha,12}^2(f_{\alpha,31}f_{\alpha,32}-b_3f_{\alpha,33}^2)+$$
$$+b_3(g_{\alpha,22}^2f_{\alpha,31}^2-2g_{\alpha,12}g_{\alpha,22}f_{\alpha,31}f_{\alpha,33}+g_{\alpha,12}^2f_{\alpha,33}^2)]=$$
$$=\frac{c_{22}^2b_3}{q_{\alpha,1}}[g_{\alpha,12}(g_{\alpha,12}f_{\alpha,32}-b_3g_{\alpha,22}f_{\alpha,33})+b_3g_{\alpha,22}(g_{\alpha,22}f_{\alpha,31}-$$
$$-g_{\alpha,12}f_{\alpha,33})]=\frac{c_{22}b_3}{c_{12}b_2}(b_3z_{12}g_{\alpha,22}-z_{22}g_{\alpha,12})\equiv z_3f_{\alpha,21}(\beta);$$
$$B_2^2+D_2^2=\frac{c_{22}^2b_3g_{\alpha,11}^2}{f_{\alpha,31}}+\frac{c_{22}^2b_3^2}{q_{\alpha,1}f_{\alpha,31}}(g_{\alpha,11}f_{\alpha,33}-g_{\alpha,21}f_{\alpha,31})^2=$$
$$=\frac{c_{22}^2b_3}{q_{\alpha,1}f_{\alpha,31}}[g_{\alpha,11}^2q_{\alpha,1}+b_3(g_{\alpha,11}f_{\alpha,33}-g_{\alpha,21}f_{\alpha,31})^2]=c_{22}^2b_3q_{\alpha,1}^{-1}\times$$

$$\times[g_{\alpha,11}(g_{\alpha,11}f_{\alpha,32} - b_3 g_{\alpha,21}f_{\alpha,33}) + b_3 g_{\alpha,21}(g_{\alpha,21}f_{\alpha,31} - g_{\alpha,11}f_{\alpha,33})] =$$

$$= \frac{c_{22}b_3}{c_{12}b_2}(b_3 g_{\alpha,21}z_{11} - g_{\alpha,11}z_{21}) \equiv z_3 f_{\alpha,22}(\beta);$$

$$A_2B_2 + C_2D_2 = -c_{22}^2 b_3 g_{\alpha,11}g_{\alpha,12}f_{\alpha,31}^{-1} + c_{22}^2 b_3^2 (q_{\alpha,1}f_{\alpha,31})^{-1}(g_{\alpha,11}f_{\alpha,33} -$$

$$- g_{\alpha,21}f_{\alpha,31})(g_{\alpha,22}f_{\alpha,31} - g_{\alpha,12}f_{\alpha,33}) = \frac{c_{22}^2 b_3}{q_{\alpha,1}f_{\alpha,31}}[-g_{\alpha,11}g_{\alpha,12}\times$$

$$\times(f_{\alpha,31}f_{\alpha,32} - b_3 f_{\alpha,33}^2) + b_3(g_{\alpha,11}g_{\alpha,22}f_{\alpha,31}f_{\alpha,33} - g_{\alpha,11}g_{\alpha,12}f_{\alpha,33}^2 -$$

$$- g_{\alpha,21}g_{\alpha,22}f_{\alpha,31}^2 + g_{\alpha,21}g_{\alpha,12}f_{\alpha,31}f_{\alpha,33})] = -c_{22}b_3 q_{\alpha,1}^{-1}\times$$

$$\times[b_3 g_{\alpha,21}(g_{\alpha,22}f_{\alpha,31} - g_{\alpha,12}f_{\alpha,33}) + g_{\alpha,11}(g_{\alpha,12}f_{\alpha,32} - b_3 g_{\alpha,22}f_{\alpha,33})] =$$

$$= \frac{c_{22}^2 b_3}{q_{\alpha,1}}\frac{q_{\alpha,1}}{c_{22}c_{12}b_2}(-b_3 g_{\alpha,21}z_{12} + g_{\alpha,11}z_{22}) = z_3 f_{\alpha,23}(\beta);$$

$$A_1^2 + C_1^2 = \frac{z_4^2 w_{\alpha,1}^2}{b_3 f_{\alpha,31}} + \frac{z_4^2 e_{\alpha,12}^2(w_{\alpha,1}^2 + w_{\alpha,2}^2)}{q_{\alpha,1}f_{\alpha,31}} = \frac{z_4^2}{b_3 q_{\alpha,1}f_{\alpha,31}}[w_{\alpha,1}^2 q_{\alpha,1} +$$

$$+ b_3 e_{\alpha,12}^2(w_{\alpha,1}^2 + w_{\alpha,2}^2)^2] = \frac{z_4^2}{b_3 q_{\alpha,1}f_{\alpha,31}}[w_{\alpha,1}^2(f_{\alpha,31}f_{\alpha,32} - b_3 f_{\alpha,33}^2) +$$

$$+ b_3(w_{\alpha,1}f_{\alpha,33} + w_{\alpha,2}f_{\alpha,31})^2] = z_4^2(b_3 q_{\alpha,1})^{-1}(w_{\alpha,1}e_{\alpha,22} + b_3 w_{\alpha,2}e_{\alpha,12}) =$$

$$= \frac{c_{21}c_{22}b_3\pi\lambda^{2\alpha}R_1^{2\alpha+1}}{c_{11}c_{12}\,\mathrm{sh}\,\pi b_1}f_{\alpha,11} \equiv z_1 f_{\alpha,11}(\beta);$$

$$B_1^2 + D_1^2 = \frac{z_4^2 w_{\alpha,2}^2}{b_3 f_{\alpha,31}} + \frac{z_4^2(w_{\alpha,1}f_{\alpha,31} - w_{\alpha,2}f_{\alpha,33})^2}{q_{\alpha,1}f_{\alpha,31}} = \frac{z_4^2}{b_3 q_{\alpha,1}f_{\alpha,31}}f_{\alpha,31}\times$$

$$\times[w_{\alpha,2}(w_{\alpha,2}f_{\alpha,32} - b_3 w_{\alpha,1}f_{\alpha,33}) + b_3 w_{\alpha,1}(w_{\alpha,1}f_{\alpha,31} - w_{\alpha,2}f_{\alpha,33})] =$$

$$= \frac{z_4^2}{b_3 q_{\alpha,1}}(w_{\alpha,1}^2 + w_{\alpha,2})^2(b_3 e_{\alpha,11}w_{\alpha,1} - e_{\alpha,21}w_{\alpha,2}) \equiv z_1 f_{\alpha,12};$$

$$A_1B_1 + C_1D_1 = \frac{z_4^2 w_{\alpha,1}w_{\alpha,2}}{b_3 f_{\alpha,31}} - \frac{z_4^2(w_{\alpha,1}f_{\alpha,33} + w_{\alpha,2}f_{\alpha,31})}{q_{\alpha,1}f_{\alpha,31}}(w_{\alpha,1}f_{\alpha,31} - w_{\alpha,1}f_{\alpha,33}) =$$

$$= \frac{z_4^2}{b_3 q_{\alpha,1}}[w_{\alpha,1}(w_{\alpha,2}f_{\alpha,32} - b_3 w_{\alpha,1}f_{\alpha,33}) + b_3 w_{\alpha,2}(w_{\alpha,2}f_{\alpha,33} - w_{\alpha,1}f_{\alpha,31})] =$$

$$= -\frac{z_4^2}{b_3 q_{\alpha,1}}(w_{\alpha,1}^2 + w_{\alpha,2}^2)(w_{\alpha,1}e_{\alpha,21} + b_3 e_{\alpha,11}w_{\alpha,2}) \equiv -z_1 f_{\alpha,13};$$

$$A_1B_2 + C_1D_2 = -\left[\frac{c_{22}b_3 g_{\alpha,11}z_4 w_{\alpha,1}}{b_3 f_{\alpha,31}} + \frac{z_4(w_{\alpha,1}f_{\alpha,33} + w_{\alpha,2}f_{\alpha,31})}{q_{\alpha,1}f_{\alpha,31}}\right](g_{\alpha,11}f_{\alpha,33} -$$

$$- g_{\alpha,21}f_{\alpha,31})] = -\frac{z_4 c_{22}}{q_{\alpha,1}}[w_{\alpha,1}(g_{\alpha,11}f_{\alpha,32} - b_3 g_{\alpha,21}f_{\alpha,33}) + b_3 w_{\alpha,2}\times$$

$$\times(g_{\alpha,11}f_{\alpha,33} - g_{\alpha,21}f_{\alpha,31})] = \frac{c_{21}}{c_{12}}b_3(w_{\alpha,1}z_{21} + b_3 z_{11}w_{\alpha,2}) \equiv z_2 y_{\alpha,11};$$

$$B_1B_2 + D_1D_2 = -\frac{z_4 w_{\alpha,2}c_{22}b_3 g_{\alpha,11}}{b_3 f_{\alpha,31}} + \frac{c_{22}b_3 z_4}{q_{\alpha,1}f_{\alpha,31}}(g_{\alpha,11}f_{\alpha,33} - g_{\alpha,21}f_{\alpha,31})\times$$

$$\times(w_{\alpha,1}f_{\alpha,31} - w_{\alpha,2}f_{\alpha,33}) = \frac{z_4 c_{22}}{q_{\alpha,1}f_{\alpha,31}}[-w_{\alpha,2}g_{\alpha,11}(f_{\alpha,31}f_{\alpha,32} - b_3 f_{\alpha,33}^2) +$$

$$+ b_3(g_{\alpha,11}f_{\alpha,33} - g_{\alpha,21}f_{\alpha,31})(w_{\alpha,1}f_{\alpha,31} - w_{\alpha,2}f_{\alpha,33})] = z_4 c_{22}(q_{\alpha,1})^{-1}\times$$

$$\times[b_3 w_{\alpha,1}(g_{\alpha,11}f_{\alpha,33} - g_{\alpha,21}f_{\alpha,31}) + w_{\alpha,2}(b_3 g_{\alpha,21}f_{\alpha,33} - g_{\alpha,11}f_{\alpha,32})] =$$

$$= \frac{c_{21}}{c_{12}}c_{22}b_3(z_{21}w_{\alpha,2} - b_3 z_{11}w_{\alpha,1}) \equiv z_2 y_{\alpha,21};$$

$$A_1A_2 + C_1C_2 = \frac{c_{22}b_3 z_4 g_{\alpha,12}w_{\alpha,1}}{b_3 f_{\alpha,31}} + \frac{z_4 c_{22}b_3}{q_{\alpha,1}f_{\alpha,31}}(w_{\alpha,1}f_{\alpha,33} + w_{\alpha,2}f_{\alpha,31})\times$$

$$\times(g_{\alpha,12}f_{\alpha,33} - g_{\alpha,22}f_{\alpha,31}) = \frac{c_{22}z_4}{q_{\alpha,1}}[w_{\alpha,1}(g_{\alpha,12}f_{\alpha,32} - b_3 g_{\alpha,22}f_{\alpha,33}) +$$

$$+ b_3 w_{\alpha,2}(g_{\alpha,12}f_{\alpha,33} - g_{\alpha,22}f_{\alpha,31})] = \frac{c_{22}z_4}{q_{\alpha,1}}[w_{\alpha,1}(g_{\alpha,12}f_{\alpha,32} - b_3 g_{\alpha,22}f_{\alpha,33}) +$$

$$+ b_3 w_{\alpha,2}(g_{\alpha,12}f_{\alpha,32} - g_{\alpha,22}f_{\alpha,31})] = -\frac{c_{21}}{c_{12}}c_{22}b_3(w_{\alpha,1}z_{22} + b_3 w_{\alpha,2}z_{12}) \equiv -z_2 y_{\alpha,12};$$

$$B_1A_2 + D_1C_2 = \frac{z_4 c_{22}b_3 w_{\alpha,2}g_{\alpha,12}}{b_3 f_{\alpha,31}} - \frac{z_4 c_{22}b_3(g_{\alpha,22}f_{\alpha,31} - g_{\alpha,12}f_{\alpha,33})}{q_{\alpha,1}f_{\alpha,31}}\times$$

$$\times(w_{\alpha,1}f_{\alpha,31} - w_{\alpha,2}f_{\alpha,33}) = \frac{z_4 c_{22}}{q_{\alpha,1}}[w_{\alpha,2}(g_{\alpha,12}f_{\alpha,32} - b_3 g_{\alpha,22}f_{\alpha,33}) +$$

$$+ w_{\alpha,1}b_3(g_{\alpha,22}f_{\alpha,31} - g_{\alpha,12}f_{\alpha,33})] = -\frac{c_{21}}{c_{12}}c_{22}b_3(w_{\alpha,2}z_{22} - b_3 w_{\alpha,1}z_{12}) = -z_2 y_{\alpha,22}.$$

Ми прийняли до уваги, що

$$f_{\alpha,21} = b_3 z_{12}g_{\alpha,22} - z_{22}g_{\alpha,12}; \quad f_{\alpha,22} = b_3 z_{11}g_{\alpha,21} - z_{21}g_{\alpha,11};$$

$$z_{21}g_{\alpha,12} - b_3 z_{11}g_{\alpha,22} \equiv z_{22}g_{\alpha,11} - b_3 z_{12}g_{\alpha,21} = -f_{\alpha,23}(\beta);$$

$$w_{\alpha,1} = b_3(d_{\alpha,21}z_{11} - d_{\alpha,11}z_{12}) + d_{\alpha,22}z_{21} - d_{\alpha,12}z_{22};$$

$$w_{\alpha,2} = b_3(d_{\alpha,22}z_{11} - d_{\alpha,12}z_{12}) + d_{\alpha,11}z_{22} - d_{\alpha,21}z_{21};$$

$$f_{\alpha,23} = b_3(z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21})(d_{\alpha,11}d_{\alpha,21} + d_{\alpha,12}d_{\alpha,22}) +$$

$$+ (z_{11}z_{12}b_3^2 + z_{21}z_{22})(d_{\alpha,11}d_{\alpha,22} - d_{\alpha,12}d_{\alpha,21}).$$

Доведення теореми завершено.

Повертаючись у формулах (36) до оригіналу, отримуємо єдиний розв'язок параболічної задачі (18) - (20):

$$u_j(t,r) = \int_0^{R_1} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t} Re[V_{\alpha,j}(r,\beta)\overline{V_{\alpha,1}(\rho,\beta)}]\Omega_\alpha(\beta)d\beta \right) \times$$

$$g_1(\rho)\sigma_1\rho^{2\alpha-1}d\rho + \int_{R_1}^{R_2} (\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t} Re[V_{\alpha,j}(r,\beta)\times$$

$$\times\overline{V_{\alpha,2}(\rho,\beta)}]\Omega_\alpha(\beta)d\beta)g_2(\rho)\sigma_2 d\rho + \int_{R_2}^\infty (\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t} Re[V_{\alpha,j}(r,\beta)\times$$

$$\times\overline{V_{\alpha,3}(\rho,\beta)}]\Omega_\alpha(\beta)d\beta)g_3(\rho)\sigma_3 d\rho \equiv \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t} Re[V_{\alpha,j}(r,\beta)\times$$

$$\times(\int_0^{R_1} g_1(\rho)\overline{V_{\alpha,1}(\rho,\beta)}\sigma_1\rho^{2\alpha-1}d\rho + \int_{R_1}^{R_2} g_2(\rho)\overline{V_{\alpha,2}(\rho,\beta)}\sigma_2 d\rho +$$

$$+\int_{R_2}^\infty g_3(\rho)\overline{V_{\alpha,3}(\rho,\beta)}\sigma_3 d\rho)]\Omega_\alpha(\beta)d\beta. \tag{52}$$

Якщо покласти

$$V_\alpha(r,\beta) = V_{\alpha,1}(r,\beta)\theta(r)\theta(R_1-r) + V_{\alpha,2}(r,\beta)\theta(r-R_1)\theta(R_2-r) + V_{\alpha,3}(r,\beta)\theta(r-R_2),$$

$$\sigma(r) = \sigma_1 r^{2\alpha-1}\theta(r)\theta(R_1-r) + \sigma_2\theta(r-R_1)\theta(R_2-r) + \sigma_3\theta(r-R_2),$$

то маємо дельта-подібну по t послідовність [5]

$$\delta_t(r,\rho) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t} Re[V_\alpha(r,\beta)\overline{V_\alpha(\rho,\beta)}]\Omega_\alpha(\beta)d\beta\sigma(\rho). \tag{53}$$

Звідси отримуємо інтегральне зображення міри Дірака (дельта-функції) [5]:

$$\delta(r-\rho) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty Re[V_\alpha(r,\beta)\overline{V_\alpha(\rho,\beta)}]\Omega_\alpha(\beta)d\beta\sigma(\rho). \tag{54}$$

Інтегральне зображення (54) породжує пряме $H_{\alpha,2}$ і обернене $H^{-1}_{\alpha,2}$ гібридне інтегральне перетворення типу (Конторовича-Лебедева 1-го роду - Фур'є-Фур'є на полярній вісі з двома точками спряження:

$$H_{\alpha,2}[g(r)] = \int_0^\infty g(r)\overline{V_\alpha(r,\beta)}\sigma(r)dr \equiv \tilde{g}(\beta), \tag{55}$$

$$H^{-1}_{\alpha,2}[\tilde{g}(\beta)] = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty Re[\tilde{g}(\beta)V_\alpha(r,\beta)]\Omega_\alpha(\beta)d\beta \equiv g(r). \tag{56}$$

Якщо в (52) перейти до границі при $t \to +\infty$, то внаслідок початкових умов (19) одержуємо інтегральні зображення:

$$g_j(r) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty Re[V_{\alpha,j}(r,\beta)\int_{R_{j-1}}^{R_j} g_j(\rho)\overline{V_{\alpha,j}(\rho,\beta)}\sigma_j\varphi_j(\rho)d\rho]\times$$

$$\times\Omega_\alpha(\beta)d\beta, \quad j = 1,2,3 \tag{57}$$

$$(R_0 = 0, \quad R_3 = \infty \quad \varphi_1(\rho) = \rho^{2\alpha-1}, \quad \varphi_2(\rho) = \varphi_3(\rho) = 1).$$

Якщо покласти

$$g(r) = g_1(r)\theta(r)\theta(R_1-r) + g_2(r)\theta(r-R_1)\theta(R_2-r) + g_3(r)\theta(r-R_2),$$

то рівності (57) визначають інтегральне зображення:

$$g(r) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty Re[V_\alpha(r,\beta)\int_0^\infty g(\rho)\overline{V_\alpha(\rho,\beta)}\sigma(\rho)d\rho]\Omega_\alpha(\beta)d\beta. \tag{58}$$

Як наслідок із властивостей дельта-подібної послідовності маємо твердження:

Теорема 4. *Якщо вектор-функція*

$$f(r) = [r^{\alpha-1/2}\theta(r)\theta(R_1-r) + 1\cdot\theta(r-R_1)\theta(R_2-r) + 1\cdot\theta(r-R_2)]g(r)$$

неперервна, абсолютно сумовна і має обмежену варіацію на множині $(0,\infty)$, *то для будь-якого* $r \in I_2^+$ *справджується інтегральне зображення (58).*

В основі застосувань запроваджених формулами (55), (56) гібридних інтегральних перетворень для розв'язування відповідних сингулярних задач математичної фізики неоднорідних середовищ лежить основна тотожність інтегрального перетворення гібридного диференціального оператора $\mathcal{M}_\alpha$.

Теорема 5. *Якщо вектор-функція $f(r) = \{B_\alpha[g_1(r)]; g_2''(r); g_3''(r)\}$ неперервна на множині I_2^+, а компоненти g_j вектор-функції $g(r)$ задовольняють умови обмеження*

$$\lim_{r\to 0} r^{2\alpha+1}\left(\frac{dg_1}{dr}\overline{V_{\alpha,1}} - g_1\frac{\overline{V_{\alpha,1}}}{dr}\right) = 0, \quad \lim_{r\to\infty}\left(\frac{dg_3}{dr}\overline{V_{\alpha,3}} - g_3\frac{\overline{V_{\alpha,3}}}{dr}\right) = 0 \qquad (59)$$

та умови спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k\right) g_k(r) - \left(\alpha_{j2}^k\frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k\right) g_{k+1}(r)\right]\Bigg|_{r=R_k} = w_{jk}; \quad j,k = 1,2, \qquad (60)$$

то справджується основна тотожність інтегрального перетворення оператора $\mathcal{M}_\alpha$:

$$H_{\alpha,2}[\mathcal{M}_\alpha[g(r)]] = -\beta^2\tilde{g}(\beta) - \sum_{j=1}^{3} k_j^2 \int\limits_{R_{j-1}}^{R_j} g_j(r)\overline{V_{\alpha,j}(r,\beta)}\sigma_j\varphi_j(r)dr +$$
$$+\frac{c_{12}}{c_{21}c_{22}}(Z_{\alpha,12}^1(R_1,\beta)w_{21} - Z_{\alpha,22}^1(R_1,\beta)w_{11}) +$$
$$+\frac{1}{c_{22}}(Z_{\alpha,12}^2(R_2,\beta)w_{22} - Z_{\alpha,22}^2(R_2,\beta)w_{12}). \qquad (61)$$

Доведення. Згідно рівностей (60) маємо тотожності

$$\begin{cases} \alpha_{11}^k g_k'(R_k) + \beta_{11}^k g_k(R_k) = \alpha_{12}^k g_{k+1}'(R_k) + \beta_{12}^k g_{k+1}(R_k) + w_{1k} \\ \alpha_{21}^k g_k'(R_k) + \beta_{21}^k g_k(R_k) = \alpha_{22}^k g_{k+1}'(R_k) + \beta_{22}^k g_{k+1}(R_k) + w_{1k} \end{cases} \qquad (62)$$

Оскільки визначник системи (62) відносно $g_k'(R_k)$ та $g_k(R_k)$ відмінний від нуля ($\alpha_{11}^k\beta_{21}^k - \alpha_{21}^k\beta_{11}^k \equiv -c_{1k} \neq 0$), то система (61) має єдиний розв'язок:

$$g_k(R_k) = -\frac{1}{c_{1k}}[a_{11}^k g_{k+1}'(R_k) + a_{12}^k g_{k+1}(R_k) + \alpha_{11}^k w_{2k} - \alpha_{21}^k w_{1k}],$$

$$g_k'(R_k) = \frac{1}{c_{1k}}[a_{21}^k g_{k+1}'(R_k) + a_{22}^k g_{k+1}(R_k) + \beta_{11}^k w_{2k} - \beta_{21}^k w_{1k}]. \qquad (63)$$

Тут беруть участь числа:

$$a_{11}^k = \alpha_{11}^k\alpha_{22}^k - \alpha_{21}^k\alpha_{12}^k, a_{12}^k = \alpha_{11}^k\beta_{22}^k - \alpha_{21}^k\beta_{12}^k, a_{21}^k = \beta_{11}^k\alpha_{22}^k - \beta_{21}^k\alpha_{12}^k.$$
$$a_{22}^k = \beta_{11}^k\beta_{22}^k - \beta_{21}^k\beta_{12}^k, a_{11}^k a_{22}^k - a_{12}^k a_{21}^k = c_{1k}c_{2k} > 0, \quad k = 1,2.$$

Співвідношенням (63) при $w_{jk} = 0$ задовольняють функції $V_{\alpha,j}(r,\beta)$ (або $\overline{V_{\alpha,j}(r,\beta)}$):

$$V_{\alpha,k}(R_k,\beta) = -\frac{1}{c_{1k}}[a_{11}^k V_{\alpha,k+1}'(R_k,\beta) + a_{12}^k V_{\alpha,k+1}(R_k,\beta)],$$

$$V_{\alpha,k}'(R_k,\beta) = \frac{1}{c_{1k}}[a_{21}^k V_{\alpha,k+1}'(R_k,\beta) + a_{22}^k V_{\alpha,k+1}(R_k,\beta)]. \qquad (64)$$

На підставі співвідношень (63), (64) одержуємо базову тотожність:

$$g_k'(R_k)\overline{V_{\alpha,k}(R_k,\beta)} - g_k(R_k)\overline{V_{\alpha,k}'(R_k,\beta)} = \frac{c_{21}}{c_{1k}}(g_{k+1}'(R_k)\overline{V_{\alpha,k+1}(R_k,\beta)} -$$
$$-g_{k+1}(R_k)\overline{V_{\alpha,k+1}'(R_k,\beta)}) + \frac{1}{c_{1k}}[Z_{\alpha,12}^k(R_k,\beta)w_{2k} - Z_{\alpha,22}^k(R_k,\beta)w_{1k}]. \qquad (65)$$

Тут прийняті позначення:

$$Z_{\alpha,j2}^k(R_k,\beta) = \alpha_{j2}^k\overline{V_{\alpha,k+1}'(R_k,\beta)} + \beta_{j2}^k\overline{V_{\alpha,k+1}(R_k,\beta)}; \quad j,k = 1,2.$$

Проінтегруємо в лівій частині рівності (61) два рази частинами:

$$H_{\alpha,2}[\mathcal{M}_\alpha[g(r)]] \equiv a_1^2\int\limits_0^{R_1} g_1(r)\overline{V_{\alpha,1}(r,\beta)}\sigma_1 r^{2\alpha-1}dr + a_2^2\int\limits_{R_1}^{R_2} g_2(r)\times$$
$$\times\overline{V_{\alpha,2}(r,\beta)}\sigma_2 dr + a_3^2\int\limits_{r_2}^{\infty} g_3(r)\overline{V_{\alpha,3}(r,\beta)}\sigma_3 dr =$$
$$= \lim_{r\to 0} a_1^2\sigma_1 r^{2\alpha+1}\left(\frac{dg_1}{dr}\overline{V_{\alpha,1}} - g_1\frac{d\overline{V_{\alpha,1}}}{dr}\right) + \lim_{r\to\infty}\left(\frac{dg_3}{dr}\overline{V_{\alpha,3}} - g_3\frac{d\overline{V_{\alpha,3}}}{dr}\right) +$$
$$+\left[a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha+1}\left(\frac{dg_1}{dr}\overline{V_{\alpha,1}} - g_1\frac{d\overline{V_{\alpha,1}}}{dr}\right) - a_2^2\sigma_2\left(\frac{dg_2}{dr}\overline{V_{\alpha,2}} - g_2\frac{d\overline{V_{\alpha,2}}}{dr}\right)\right]\Bigg|_{r=R_1} +$$
$$+\left[a_2^2\sigma_2\left(\frac{dg_2}{dr}\overline{V_{\alpha,2}} - g_2\frac{d\overline{V_{\alpha,2}}}{dr}\right) - a_3^2\sigma_3\left(\frac{dg_3}{dr}\overline{V_{\alpha,3}} - g_3\frac{d\overline{V_{\alpha,3}}}{dr}\right)\right]\Bigg|_{r=R_2} +$$
$$+\int\limits_0^{R_1} a_1^2 B_\alpha[\overline{V_{\alpha,1}(r,\beta)}]g_1(r)\sigma_1 r^{2\alpha-1}dr + \int\limits_{R_1}^{R_2} g_2(r)a_2^2\frac{d^2\overline{V_{\alpha,2}(r,\beta)}}{dr^2}\sigma_2 dr +$$
$$+\int\limits_{R_2}^{\infty} g_3(r)a_3^2\frac{d^2\overline{V_{\alpha,3}(r,\beta)}}{dr^2}\sigma_3 dr. \qquad (66)$$

Внаслідок умов обмеження (59) доданки при $r=0$ та $r=\infty$ анулюються. Внаслідок базової тотожності (65) і структури σ_1, σ_2, σ_3 маємо:

$$a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha+1}\left(\frac{dg_1}{dr}\overline{V_{\alpha,1}}-g_1\frac{d\overline{V_{\alpha,1}}}{dr}\right)\Big|_{r=R_1}-a_2^2\sigma_2\left(\frac{dg_2}{dr}\overline{V_{\alpha,2}}-g_2\frac{d\overline{V_{\alpha,2}}}{dr}\right)\Big|_{r=R_1}=$$

$$=\left(a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha+1}\frac{c_{21}}{c_{11}}-a_2^2\sigma_2\right)\left(\frac{dg_2}{dr}\overline{V_{\alpha,2}}-g_2\frac{d\overline{V_{\alpha,2}}}{dr}\right)\Big|_{r=R_1}+$$

$$+\frac{c_{11}c_{12}}{c_{21}c_{22}}\frac{1}{c_{11}}[Z^1_{\alpha,12}(R_1,\beta)w_{21}-Z^1_{\alpha,22}(R_1,\beta)w_{11}]=0\times$$

$$\times\left[\frac{dg_2}{dr}\overline{V_{\alpha,2}}-g_2\frac{d\overline{V_{\alpha,2}}}{dr}\right]\Big|_{r=R_1}+\frac{c_{12}}{c_{21}c_{22}}[Z^1_{\alpha,12}(R_1,\beta)w_{21}-Z^1_{\alpha,22}(R_1,\beta)w_{11}]=$$

$$=\frac{c_{12}}{c_{21}c_{22}}(Z^1_{\alpha,12}(R_1,\beta)w_{21}-Z^1_{\alpha,22}(R_1,\beta)w_{11});\tag{67}$$

$$a_2^2\sigma_2\left(\frac{dg_2}{dr}\overline{V_{\alpha,2}}-g_2\frac{d\overline{V_{\alpha,2}}}{dr}\right)\Big|_{r=R_2}-\left(\frac{dg_3}{dr}\overline{V_{\alpha,3}}-g_3\frac{d\overline{V_{\alpha,3}}}{dr}\right)\Big|_{r=R_2}=0\times$$

$$\times\left(\frac{dg_3}{dr}\overline{V_{\alpha,3}}-g_3\frac{d\overline{V_{\alpha,3}}}{dr}\right)\Big|_{r=R_2}+\frac{c_{12}}{c_{22}}\frac{1}{c_{12}}(Z^2_{\alpha,12}w_{22}-Z^2_{\alpha,22}w_{12})=$$

$$=\frac{1}{c_{22}}(Z^2_{\alpha,12}(R_2,\beta)w_{22}-Z^2_{\alpha,22}(R_2,\beta)w_{12}).\tag{68}$$

Нарешті, із рівнянь

$$[a_1^2B_\alpha-(\beta^2+k_1^2)]\overline{V_{\alpha,1}}=0,$$

$$[a_j^2d^2/dr^2+(\beta^2+k_j^2)]\overline{V_{\alpha,j}}=0,\ j=2,3$$

знаходимо, що

$$a_1^2B_\alpha[\overline{V_{\alpha,1}}]=-(\beta^2+k_1^2)\overline{V_{\alpha,1}},\ a_j^2d^2/dr^2\overline{V_{\alpha,j}}=-(\beta^2+k_j^2)\overline{V_{\alpha,j}},\ j=2,3.\tag{69}$$

Якщо (67), (68) і (69) підставити в (66) і роз'єднати на два доданки інтеграли, що залишилися, то одержуємо основну тотожність (61).

Логічну схему застосування побудованого гібридного інтегрального перетворення покажемо на типових задачах математичної фізики.

Задача статики: Побудувати обмежений в області $D_2^+=\{(r,z):r\in I_2^+, z\in(-\infty,+\infty)\}$ розв'язок еліптичної системи [6]

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}-\gamma_1^2+a_1^2B_\alpha\right)u_1=-f_1(r,z), & r\in(0,R_1),\\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}-\gamma_j^2+a_j^2\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}\right)u_j=-f_j(r,z), & j=2,3\end{cases}\tag{70}$$

за умовами спряження

$$\left[\left(\alpha^k_{j1}\frac{\partial}{\partial r}+\beta^k_{j1}\right)u_k-\left(\alpha^k_{j2}\frac{\partial}{\partial r}+\beta^k_{j2}\right)u_{k+1}\right]\Big|_{r=R_k}=w_{jk}(z);\quad j,k=1,2.\tag{71}$$

Запишемо систему (70) в матричній формі

$$\begin{bmatrix}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}-\gamma_1^2+a_1^2B_\alpha\right)u_1(r,z)\\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}-\gamma_2^2+a_2^2\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}\right)u_2(r,z)\\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}-\gamma_3^2+a_3^2\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}\right)u_3(r,z)\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}f_1(r,z)\\ f_2(r,z)\\ f_3(r,z)\end{bmatrix}.\tag{72}$$

Інтегральний оператор $H_{\alpha,2}$ зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка:

$$H_{\alpha,2}[\ldots]=[\int_0^{R_1}\ldots\overline{V_{\alpha,1}}\sigma_1r^{2\alpha-1}dr\int_{R_1}^{R_2}\ldots\overline{V_{\alpha,2}}\sigma_2dr\int_{R_2}^{\infty}\ldots\overline{V_{\alpha,3}}\sigma_3dr].\tag{73}$$

Застосуємо операторну матрицю-рядок (73) за правилом множення матриць до системи (72). Внаслідок основної тотожності (61) одержуємо крайову задачу: побудувати обмежений на $(0,\infty)$ розв'язок диференціального рівняння

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}-\beta^2\right)\tilde u-\sum_{j=1}^{3}(k_j^2+\gamma_j^2)\int_{R_{j-1}}^{R_j}u_j(r,z)\overline{V_{\alpha,j}(r,\beta)}\sigma_j\varphi_j(r)dr=-\tilde F(\beta,z).$$

Тут беруть участь функції

$$\tilde u=\tilde u_1+\tilde u_2+\tilde u_3=\int_0^{R_1}u_1(r,z)\overline{V_{\alpha,1}(r,\beta)}\sigma_1r^{2\alpha-1}dr+$$

$$\int_{R_1}^{R_2}u_2(r,z)\overline{V_{\alpha,2}(r,z)}\sigma_2dr+\int_{R_2}^{\infty}u_3(r,\beta)\overline{V_{\alpha,3}(r,\beta)}\sigma_3dr;$$

$$\tilde F(\beta,z)=-\tilde f(\beta,z)-\sum_{m=1}^{2}d_m[Z^m_{\alpha,12}(R_m,\beta)w_{2m}(z)-$$

$$-Z^m_{\alpha,22}(R_m,\beta)w_{1m}(z)],$$

$$\tilde{f}(\beta,z)=\tilde{f}_1(\beta,z)+\tilde{f}_2(\beta,z)+\tilde{f}_3(\beta,z).$$

Нехай $\max\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\}=\gamma_1^2$. Покладемо $k_1^2=0$, $k_2^2=\gamma_1^2-\gamma_2^2\geq 0$, $k_3^2=\gamma_1^2-\gamma_3^2\geq 0$. Одержимо диференціальне рівняння

$$\left[\frac{d^2}{dz^2}-(\beta^2+\gamma_1^2)\right]\tilde{u}(\beta,z)=-\tilde{F}(\beta,z). \tag{74}$$

Безпосередньо перевіряється, що обмеженим на множині $(-\infty,+\infty)$ розв'язком рівняння (74) є функція

$$\tilde{u}(\beta,z)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}|z-\zeta|}\tilde{F}(\beta,\zeta)d\zeta\frac{1}{2\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}}. \tag{75}$$

Обернений до оператора $H^{-1}_{\alpha,2}$ запишемо у вигляді операторної матриці-стовпця:

$$H^{-1}_{\alpha,2}[\ldots]=\begin{bmatrix}\frac{2}{\pi}\int_0^\infty Re[V_{\alpha,1}\ldots]\Omega_\alpha(\beta)d\beta\\ \frac{2}{\pi}\int_0^\infty Re[V_{\alpha,2}\ldots]\Omega_\alpha(\beta)d\beta\\ \frac{2}{\pi}\int_0^\infty Re[V_{\alpha,3}\ldots]\Omega_\alpha(\beta)d\beta\end{bmatrix}. \tag{76}$$

Застосуємо операторну матрицю-стовпець (76) за правилом множення матриць до матриці-елемента $[\tilde{u}(\beta,z)]$, де функція $\tilde{u}(\beta,z)$ визначена формулою (75).

У результаті елементарних перетворень отримаємо розв'язок еліптичної задачі (70):

$$u_j(r,z)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty Re[V_{\alpha,j}(r,\beta)\tilde{u}(\beta,z)]\Omega_\alpha(\beta)d\beta=$$

$$=\sum_{k=1}^{3}\int_{R_{k-1}}^{R_k}\int_{-\infty}^{\infty}H_{\alpha,jk}(r,\rho,|z-\zeta|)f_k(\rho,\zeta)\sigma_k\varphi_k(\rho)d\rho d\zeta+$$

$$+\sum_{m=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty}[\mathcal{R}^m_{j,12}(r,|z-\zeta|)w_{2m}(\zeta)-\mathcal{R}^m_{j,22}(r,|z-\zeta|)w_{1m}(\zeta)]d\zeta;\ j=\overline{1,3}. \tag{77}$$

У рівності (77) беруть участь функції впливу

$$H_{\alpha,jk}(r,\rho,|z-\zeta|)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{e^{-\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}|z-\zeta|}}{2\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}}Re[V_{\alpha,j}(r,\beta)\overline{V_{\alpha,k}(\rho,\beta)}]\times$$

$$\times\Omega_\alpha(\beta)d\beta;\quad j,k=\overline{1,3} \tag{78}$$

і функції Гріна умов спряження

$$\mathcal{R}^m_{j,k2}(r,|z-\zeta|)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{e^{-\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}|z-\zeta|}}{2\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}}Re[V_{\alpha,j}(r,\beta)Z^m_{\alpha,k2}(R_m,\beta)]\times$$

$$\times\Omega_\alpha(\beta)d\beta;\quad j=1,2,3;k,m=1,2. \tag{79}$$

Нагадаємо, що $R_0=0$, $R_3=\infty$, $\varphi_1(r)=r^{2\alpha-1}$, $\varphi_2(r)=\varphi_3(r)=1$. Якщо $\gamma_1^2=\gamma_2^2=\gamma_3^2=0$, то $k_1^2=k_2^2=k_3^2=0$.

Задача квазістатики: Побудувати обмежений в області $D_2^+=\{(t,r):t\in(0,\infty),r\in I_2^+\}$ розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь теплопровідності параболічного типу [6]:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}+\gamma_1^2u_1-a_1^2B_\alpha[u_1]=f_1(t,r),\quad r\in(0,R_1),$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial t}+\gamma_j^2u_j-a_j^2\frac{\partial^2u_j}{\partial r^2}=f_j(t,r),\quad r\in(R_{j-1},R_j),j=2,3 \tag{80}$$

за початковими умовами

$$u_j(t,r)|_{t=0}=g_j(r),j=\overline{1,3};r\in(R_{j-1},R_j);R_0=0,R_3=\infty \tag{81}$$

і умовами спряження

$$\left[\left(\alpha^k_{j1}\frac{\partial}{\partial r}+\beta^k_{j1}\right)u_k(t,r)-\left(\alpha^k_{j2}\frac{\partial}{\partial r}+\beta^k_{j2}\right)u_{k+1}(t,r)\right]\Big|_{r=R_k}=w_{jk}(t);j,k=1,2. \tag{82}$$

Запишемо систему (80) і початкові умови (81) в матричній формі:

$$\begin{bmatrix}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\gamma_1^2-a_1^2B_\alpha\right)u_1\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+\gamma_2^2-a_2^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)u_2\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+\gamma_3^2-a_3^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)u_3\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}f_1(t,r)\\ f_2(t,r)\\ f_3(t,r)\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}u_1(t,r)\\ u_2(t,r)\\ u_3(t,r)\end{bmatrix}\Bigg|_{t=0}=\begin{bmatrix}g_1(r)\\ g_2(r)\\ g_3(r)\end{bmatrix}. \tag{83}$$

Застосуємо до задачі (83) за правилом множення матриць операторну матрицю-рядок (73). В припущенні, що $\max\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\} = \gamma_1^2$, одержуємо задачу Коші [2]

$$\left[\frac{d}{dt} + (\beta^2+\gamma_1^2)\right]\tilde u(t,\beta) = \tilde F(t,\beta), \tilde u|_{t=0} = \tilde g(\beta). \quad (84)$$

Тут функція

$$\tilde F(t,\beta) = \tilde f(t,\beta) + \sum_{m=1}^{2} d_m[Z^m_{\alpha,12}(R_m,\beta)w_{2m}(t) - Z^m_{\alpha,22}(R_m,\beta)w_{1m}(t)].$$

Розв'язком задачі Коші (84) є функція

$$\tilde u(t,\beta) = \int_0^t e^{-(\beta^2+\gamma_1^2)|t-\tau|}[\tilde F(\tau,\beta)+\delta_+(\tau)\tilde g(\beta)]d\tau, \quad (85)$$

$\delta_+(t)$ - дельта-функція, зосереджена в точці $t=0+$ [5].

Визначимо функції впливу

$$H_{\alpha,jk}(t,r,\rho) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma_1^2)t} Re[V_{\alpha,j}(r,\beta)V_{\alpha,k}(\rho,\beta)]\Omega_\alpha(\beta)d\beta; \quad j,k=\overline{1,3} \quad (86)$$

і функції Гріна умов спряження

$$\mathcal{R}^m_{j,k2}(t,r) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma_1^2)t}Re[V_{\alpha,j}(r,\beta)Z^m_{\alpha,k2}(R_m,\beta)]\Omega_\alpha(\beta)d\beta; \quad k,m=1,2. \quad (87)$$

Застосуємо до матриці-елемента $[\tilde u(t,\beta)]$, де функція $\tilde u(t,\beta)$ визначена формулою (85), за правилом множення матриць операторну матрицю-стовпець (76). У результаті елементарних перетворень отримаємо єдиний розв'язок параболічної задачі (80) - (82):

$$u_j(t,r) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty Re[V_{\alpha,j}(r,\beta)\tilde u(t,\beta)]\Omega_\alpha(\beta)d\beta =$$

$$= \sum_{k=1}^3 \int_0^t\int_{R_{k-1}}^{R_k} H_{\alpha,jk}(t-\tau,r)[f_k(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_k(\rho)]\sigma_k\varphi_k(\rho)d\rho d\tau +$$

$$+\sum_{m=1}^2\int_0^t[\mathcal{R}^m_{j,12}(t-\tau,r)w_{2m}(\tau) - \mathcal{R}^m_{j,22}(t-\tau,r)w_{1m}(\tau)]d\tau;\ j=\overline{1,3}. \quad (88)$$

Якщо умови спряження однорідні, то в розв'язку (88) відсутня сума по $m=1,2$.

Задача динаміки: Побудувати обмежений в області $D_2^+ = \{(t,r): t\in(0,\infty), r\in I_2^+\}$ розв'язок гіперболічної системи [6]:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \gamma_1^2 u_1 - a_1^2 B_\alpha[u_1] = f_1(t,r), \quad r\in(0,R_1).$$

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} + \gamma_j^2 u_j - a_j^2\frac{\partial^2 u_j}{\partial r^2} = f_j(t,r), \quad r\in(R_{j-1},R_j), j=2,3 \quad (89)$$

за початковими умовами

$$u_j(t,r)|_{t=0} = g_j(r), \left.\frac{\partial u_j}{\partial t}\right|_{t=0} = \Psi_j(r) j=\overline{1,3}; \quad (90)$$

і умовами спряження (82).

Запишемо систему (89) і початкові умови (90) в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\gamma_1^2 - a_1^2 B_\alpha\right)u_1 \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\gamma_2^2 - a_2^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)u_2 \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\gamma_3^2 - a_3^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)u_3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right|_{t=0} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial t}\left.\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right|_{t=0} = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{bmatrix}. \quad (91)$$

У припущенні, що $\max\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\} = \gamma_1^2$, застосуємо до задачі (91) за правилом множення матриць операторну матрицю-рядок (73). Одержимо задачу Коші [2]:

$$\left[\frac{d^2}{dt^2}+(\beta^2+\gamma_1^2)\right]\tilde u = \tilde F(t,\beta); \tilde u|_{t=0} = \tilde g(\beta), \frac{\tilde u}{dt}|_{t=0} = \tilde\Psi(\beta). \quad (92)$$

Розв'язком задачі Коші (92) є функція [2]

$$\tilde u(t,\beta) = \frac{\sin\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}t}{\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}}\tilde\Psi(\beta) + \frac{d}{dt}\frac{\sin\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}t}{\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}}\tilde g(\beta) +$$

$$+\int_0^t \frac{\sin\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}(t-\tau)}{\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}}\tilde F(\tau,\beta)d\tau. \quad (93)$$

Визначимо функції впливу

$$H_{\alpha,jk}(t,r,\rho)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sin\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}t}{\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}}Re[V_{\alpha,j}(r,\beta)V_{\alpha,k}(\rho,\beta)]\Omega_\alpha(\beta)d\beta;\quad j,k=\overline{1,3} \tag{94}$$

і функції Гріна умов спряження

$$\mathcal{R}^m_{j,k2}(t,r)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sin\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}t}{\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}}Re[V_{\alpha,j}(r,\beta)Z^m_{\alpha,k2}(R_m,\beta)]\Omega_\alpha(\beta)d\beta;\quad k,m=1,2 \tag{95}$$

Застосувавши до матриці-елемента $[\tilde{u}(t,\beta)]$, де функція $\tilde{u}(t,\beta)$ визначена формулою (93), операторну матрицю-стовпець (76) за правилом множення матриць, отримуємо єдиний розв'язок гіперболічної задачі:

$$u_j(t,r)=\sum_{k=1}^3\int\limits_0^t\int\limits_{R_{k-1}}^{R_k}H_{\alpha,jk}(t-\tau,r,\rho)[f_k(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)\Psi_k(\rho)]\sigma_k\varphi_k(\rho)d\rho d\tau+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=1}^3\int\limits_{R_{k-1}}^{R_k}H_{\alpha,jk}(t,r,\rho)g_k(\rho)\sigma_k\varphi_k(\rho)d\rho+$$

$$+\sum_{m=1}^2\int\limits_0^t[\mathcal{R}^m_{\alpha,12}(t-\tau,r)w_{2m}(\tau)-\mathcal{R}^m_{\alpha,22}(t-\tau,r)w_{1m}(\tau)]d\tau;\ j=\overline{1,3}. \tag{96}$$

Нагадаємо, що $R_0=0$, $R_3=\infty$, $\varphi_1(r)=r^{2\alpha-1}$, $\varphi_2(r)=\varphi_3(r)=1$.

1. Ленюк М.П., Міхалевська Г.І. Гібридні інтегральні перетворення типу Конторовича-Лєбєдєва. - Київ, 1996. - 64 с. - (Препринт / НАН України. Ін-т математики; 96.16).

2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. - М.: Физматгиз, 1959. - 468 с.

3. Ленюк М.П. Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя. - Киев, 1983. - 62 с. - (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.3).

4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М.: Наука, 1971. - 1108 с.

5. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. - М.: Наука, 1965. - 328 с.

6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1972. - 735 с.

7. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. - М.: Наука, 1965. - 715 с.

УДК 517.927

А.Ю. Лучка

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ОБМЕЖЕННЯМИ [6]

(м. Київ)

Запропоновано новий підхід дослідження диференціальних рівнянь з обмеженнями та обгрунтовано застосування до них ітераційних та проекційно-ітеративних методів.

Предложен новый подход исследования дифференциальных уравнений с ограничениями и дается обоснование применения к ним итерационных и проекционно-итеративных методов.

Бібліогр. 5 назв.

Диференціальним рівнянням з обмеженнями присвячена низка праць, зокрема [1-4]. В даній статті висвітлюється новий підхід встановлення умов сумісності таких задач і дається обгрунтування застосування до них ітераційних та проекційно-ітеративних методів. Основна увага приділяється випадку, коли кількість обмежень перевищує порядок диференціального рівняння.

1. Постановка задачі. Розглянемо диференціальне рівняння

$$(Lx)(t)=f(t)+(Fx)(t) \tag{1}$$

і поставимо задачу знаходження його розв'язку $x(t)$, який задовольняє обмеження

$$\Phi_s(x)=\alpha_s,\quad s=\overline{1,l}, \tag{2}$$

де $t\in[0,T]$ і

$$(Lx)(t)=\sum_{\nu=0}^m p_{m-\nu}(t)\frac{d^\nu}{dt^\nu}x, \tag{3}$$

$$(Fx)(t)=F(t,x,\frac{d}{dt}x,\ldots,\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}x). \tag{4}$$

Обмежимось випадком, коли в диференціальному операторі (3) коефіцієнти – неперервні функції, причому $p_0(t)>0$, $f\in C[0,T]$ і в (4) функція $F(t,v)$ неперервна за сукупністю змінних при $t\in[0,T]$ і $v\in\mathbb{R}^m$, а в обмеженнях (2) $\{\Phi_s,\ 1\le s\le l\}$ – лінійно незалежна система лінійних неперервних функціоналів, визначених на класі функцій $C^m[0,T]$, і $\alpha_s\in\mathbb{R}$,

[6]