Романюк В.В.
Хмельницький національний університет,
м. Хмельницький, Україна

ПРО ОСОБЛИВІ КОМПОНЕНТИ ОПТИМАЛЬНОЇ СТРАТЕГІЇ ПРОЕКТУВАЛЬНИКА У МОДЕЛІ ДІЇ НОРМОВАНОГО ОДИНИЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА ТРИКОЛОННУ БУДІВЕЛЬНУ КОНСТРУКЦІЮ

Вступ і постановка проблеми дослідження

Модель дії нормованого одиничного навантаження [1] на три колони однакової висоти у будівельній конструкції та відповідного розподілу будівельних ресурсів у цій конструкції [2, 3] є однією з фундаментальних задач оптимального використання будівельних ресурсів. Ця задача може бути узагальнена і до рівня задачі усунення триелементних невизначеностей у широкому смислі, де за ядро антагоністичної гри береться гіперповерхня

$$T\left(\mathbf{X},\, \mathbf{Y}\right) = T\left(x_1,\, x_2;\, y_1,\, y_2\right) = \beta \max\left\{\frac{x_1}{y_1^2},\, \frac{x_2}{y_2^2},\, \frac{1 - x_1 - x_2}{\left(1 - y_1 - y_2\right)^2}\right\} \tag{1}$$

з параметром $\beta > 0$ на паралелепіпеді

$$\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} = \prod_{s=1}^{2} \left[a_1;\, b_1\right] \times \left[a_2;\, b_2\right] \subset \prod_{k=1}^{4} \left(0;\, 1\right) \subset \prod_{k=1}^{4} \left[0;\, 1\right] \subset \mathbb{R}^4 \tag{2}$$

при $x_i \in \left[a_i;\, b_i\right]$, $x_3 = 1 - \left(x_1 + x_2\right)$, $y_i \in \left[a_i;\, b_i\right]$, $y_3 = 1 - \left(y_1 + y_2\right)$ $\forall\ i = \overline{1,\, 2}$ за умов

$$0 < a_1 < b_1 < 1,\ 0 < a_2 < b_2 < 1,\ b_1 + b_2 < 1. \tag{3}$$

Не зважаючи на те, що у цій грі, котра виявляється строго опуклою, другий гравець (проектувальник) володіє чистою оптимальною стратегією $\mathbf{Y}_* = \left[y_1^* \quad y_2^*\right]$, трапляються випадки, коли її компоненти знаходяться по-особливому, зі залученням додаткових обґрунтувань.

Аналіз останніх досліджень й окреслення невирішених питань

Основні щойно згадані додаткові обґрунтування щодо оптимальної поведінки проектувальника містяться у роботах [2, 3]. За умов

$$\frac{\sqrt{b_i}}{\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \sqrt{1 - a_1 - a_2}} \in \left[a_i;\, b_i\right] \quad \forall\ i = \overline{1,\, 2} \tag{4}$$

компонентами оптимальної стратегії проектувальника будуть

$$y_i^* = \frac{\sqrt{b_i}}{\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \sqrt{1 - a_1 - a_2}} \quad \forall\ i = \overline{1,\, 2}. \tag{5}$$

Але при

$$\frac{\sqrt{b_j}}{\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \sqrt{1 - a_1 - a_2}} < a_j \tag{6}$$

буде $y_j^* = a_j$ й

$$y_i^* = \frac{\left(1 - a_j\right)\sqrt{b_i}}{\sqrt{b_i} + \sqrt{1 - a_1 - a_2}} \tag{7}$$

за умови

$$\frac{\left(1 - a_j\right)\sqrt{b_i}}{\sqrt{b_i} + \sqrt{1 - a_1 - a_2}} \in \left[a_i;\, b_i\right] \quad \forall\ i = \overline{1,\, 2} \ \text{ при } \ j = 2 - \operatorname{sign}\left(i - 1\right). \tag{8}$$

Натепер невивченим питанням залишається те, як співвідносяться між собою значення (5) і (7), а також умови, за яких належність (8) справджується. Це надасть більш чітких обрисів у визначенні оптимальної поведінки проектувальника.

Формулювання мети дослідження компонент типу (7) оптимальної стратегії проектувальника

Для додаткового дослідження оптимальної поведінки проектувальника у моделюванні дії нормованого одиничного навантаження на три колони однакової висоти у будівельній конструкції та відповідного розподілу будівельних ресурсів у цій конструкції необхідно виявити співвідношення між звичайною i-ю компонентою (5) оптимальної стратегії проектувальника й особливою i-ю компонентою (7) цієї стратегії. Також слід окреслити додаткові умови належності (8), за яких значення (7) є i-ю компонентою стратегії $\mathbf{Y}_* = \left[y_1^* \quad y_2^*\right]$ проектувальника $\forall\ i = \overline{1,2}$ при $j = 2 - \operatorname{sign}(i-1)$.

Теорема про строгу нерівність у співвідношенні між значеннями (5) і (7)

Теорема 1. В опуклій грі з ядром (1) на паралелепіпеді (2) з умовами (3) при одночасному виконанні i-ї умови (4) і j-ї умови (6) за умови (8) для i-ї компоненти (7) справедлива строга нерівність

$$\frac{\left(1-a_j\right)\sqrt{b_i}}{\sqrt{b_i}+\sqrt{1-a_1-a_2}} < \frac{\sqrt{b_i}}{\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2}+\sqrt{1-a_1-a_2}}. \tag{9}$$

Доведення. Дослідимо різницю лівої і правої частин нерівності (9):

$$\frac{\left(1-a_j\right)\sqrt{b_i}}{\sqrt{b_i}+\sqrt{1-a_1-a_2}} - \frac{\sqrt{b_i}}{\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2}+\sqrt{1-a_1-a_2}} =$$

$$= \sqrt{b_i}\,\frac{\left(1-a_j\right)\left(\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2}+\sqrt{1-a_1-a_2}\right)-\left(\sqrt{b_i}+\sqrt{1-a_1-a_2}\right)}{\left(\sqrt{b_i}+\sqrt{1-a_1-a_2}\right)\left(\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2}+\sqrt{1-a_1-a_2}\right)} =$$

$$= \sqrt{b_i}\,\frac{\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2}+\sqrt{1-a_1-a_2}-a_j\left(\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2}+\sqrt{1-a_1-a_2}\right)-\left(\sqrt{b_i}+\sqrt{1-a_1-a_2}\right)}{\left(\sqrt{b_i}+\sqrt{1-a_1-a_2}\right)\left(\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2}+\sqrt{1-a_1-a_2}\right)} =$$

$$= \sqrt{b_i}\,\frac{\sqrt{b_j}-a_j\left(\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2}+\sqrt{1-a_1-a_2}\right)}{\left(\sqrt{b_i}+\sqrt{1-a_1-a_2}\right)\left(\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2}+\sqrt{1-a_1-a_2}\right)}, \tag{10}$$

де використано те, що $\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2}-\sqrt{b_i}=\sqrt{b_j}$ при $i=\overline{1,2}$ та $j = 2-\operatorname{sign}(i-1)$. З нерівності (6), знаменник у лівій частині якої є додатним, відразу випливає від'ємність чисельника у (10), що доводить справедливість нерівності (9). Теорему доведено.

Теорема про значення (7) у звуженні гри з ядром (1) на паралелепіпеді (2) при (3)

Теорема 2. У звуженні опуклої гри з ядром (1) на паралелепіпеді (2) з умовами (3) на $a_1 = a_2 = a$ при одночасному виконанні i-ї умови (4) і j-ї умови (6) для i-ї компоненти (7) справедливе співвідношення

$$\frac{(1-a)\sqrt{b_i}}{\sqrt{b_i}+\sqrt{1-2a}} \in \left[a; b_i\right) \tag{11}$$

за умови

$$a \in \left(0; \left(\sqrt{b_i\left(b_i+1\right)}-b_i\right)\cdot\frac{1+\operatorname{sign}\left(b_i-\frac{1}{3}\right)}{2}\cdot\operatorname{sign}\left|b_i-\frac{1}{3}\right|\right] \cup \left(0; b_i\cdot\operatorname{sign}\left[1-\operatorname{sign}\left(b_i-\frac{1}{3}\right)\right]\right). \tag{12}$$

Доведення. Нерівність $\dfrac{(1-a)\sqrt{b_i}}{\sqrt{b_i}+\sqrt{1-2a}} < b_i$ випливає безпосередньо зі щойно доведеної строгої нерівності (9). Залишається вияснити, за яких умов нестрога нерівність

$$\frac{(1-a)\sqrt{b_i}}{\sqrt{b_i}+\sqrt{1-2a}} \geqslant a \tag{13}$$

є вірною. З нерівності (13) маємо:

$$(1-a)\sqrt{b_i} \geqslant a\left(\sqrt{b_i}+\sqrt{1-2a}\right),\ (1-2a)\sqrt{b_i} \geqslant a\sqrt{1-2a},\ \sqrt{1-2a}\sqrt{b_i} \geqslant a,\ b_i(1-2a) \geqslant a^2,$$

$$a^2 + 2ab_i - b_i \leqslant 0. \tag{14}$$

Дискримінантом відповідного нерівності (14) квадратного рівняння $a^2 + 2ab_i - b_i = 0$ відносно a є

$$D = 4b_i^2 - 4\cdot 1\cdot(-b_i) = 4b_i^2 + 4b_i = 4b_i(b_i+1),$$

звідки корені цього рівняння

$$a = a^{\langle 1\rangle} = \frac{-2b_i - \sqrt{D}}{2} = \frac{-2b_i - \sqrt{4b_i(b_i+1)}}{2} = \frac{-2b_i - 2\sqrt{b_i(b_i+1)}}{2} = -b_i - \sqrt{b_i(b_i+1)} < 0, \tag{15}$$

$$a = a^{\langle 2\rangle} = \frac{-2b_i + \sqrt{D}}{2} = \frac{-2b_i + \sqrt{4b_i(b_i+1)}}{2} = \frac{-2b_i + 2\sqrt{b_i(b_i+1)}}{2} = -b_i + \sqrt{b_i(b_i+1)}. \tag{16}$$

Корінь $a^{\langle 2\rangle} > 0$, оскільки

$$b_i + 1 > b_i,\ \sqrt{b_i+1} > \sqrt{b_i},\ \sqrt{b_i(b_i+1)} > b_i,$$

звідки розв'язком нерівності (14) відносно змінної a є

$$a \in \left(0;\, a^{\langle 2\rangle}\right] = \left(0;\, \sqrt{b_i(b_i+1)} - b_i\right], \tag{17}$$

що є вірним тільки при

$$\sqrt{b_i(b_i+1)} - b_i < b_i. \tag{18}$$

Зі співвідношення (18) маємо:

$$\sqrt{b_i+1} - \sqrt{b_i} < \sqrt{b_i},\ \sqrt{b_i+1} < 2\sqrt{b_i},\ b_i+1 < 4b_i,\ b_i > \frac{1}{3}. \tag{19}$$

Співвідношення (19) означають те, що (17) є рівним при $b_i > \dfrac{1}{3}$, а при $b_i \leqslant \dfrac{1}{3}$ буде $a \in (0;\, b_i)$. Ці умови для значення a компактно записані у (12). Теорему доведено.

Висновок і перспектива подальшого моделювання розподілу будівельних ресурсів у конструкціях-опорах

Доведені теореми дають можливість контролювати особливі компоненти (7) оптимальної стратегії проектувальника, де $i = \overline{1, 2}$ при $j = 2 - \mathrm{sign}(i-1)$. Таких компонент в $\mathbf{Y}_* = \begin{bmatrix} y_1^* & y_2^* \end{bmatrix}$ може бути не більше однієї, причому при звуженні на $a_1 = a_2 = a$ для i-ї особливої компоненти (11) виконуватиметься умова належності (12). У подальшому можна перевірити таку умову для незвуження.

Література

1. Романюк В.В. Модель визначення оптимального рішення проектувальника у задачі про розрахунок повздовжньої стійкості двох елементів будівельної конструкції при дії на них нормованого стискаючого зусилля / В.В. Романюк // Проблеми трибології. – 2010. – № 1. – С. 42-56.

2. Романюк В.В. Моделювання дії нормованого одиничного навантаження на три колони однакової висоти у будівельній конструкції і знаходження оптимальної площі кожної опори / В.В. Романюк // Проблеми трибології. – 2010. – № 3. – С. 18-25.

3. Романюк В.В. Доведення тверджень для моделі дії нормованого одиничного навантаження на три колони однакової висоти у будівельній конструкції / В.В. Романюк // Проблеми трибології. – 2010. –

№ 4. – С. 72-81.

Надійшла 09.11.2010