

УДК 512.25:519.25:53.088:621.438

© 2015 г. Горошко А.В., Ройзман В.П.

## СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОБЕСПЕЧЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ СНИЖЕНИЯ ВИБРОАКТИВНОСТИ РОТОРОВ

*Хмельницкий национальный университет, г. Хмельницкий, Украина*

Многие задачи проектирования машин относятся к классу обратных задач, решение которых сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений. В статье показана связь числа обусловленности матрицы таких систем и ошибок решения. Обосновано применение метода наименьших квадратов для повышения точности решений. Предложен метод обеспечения устойчивости решений систем линейных алгебраических уравнений, базирующийся на привлечении дополнительной информации путем увеличения количества измерений исходных параметров. Разработан способ и статистический алгоритм обеспечения заданной точности решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений. Приведены результаты применения предложенных методов для идентификации эксцентриситетов и упруго-инерционных параметров в задаче снижения виброактивности ротора турбонасосного агрегата.

Многие практические задачи, такие как задачи проектирования машин, оптимизации технологических процессов, диагностики технического состояния, являются обратными задачами, решение которых сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений. Однако в силу некорректности обратной задачи при численном решении таких систем необходимо учитывать влияние погрешностей исходных данных.

**Оценка погрешности решения.** Рассмотрим линейную модель вида

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_m\mathbf{a}_m, \quad (1)$$

где  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$  – вектор неизвестных (объект),  $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$  – вектор данных наблюдений,  $\mathbf{a}_i \in \mathbf{R}^n$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  – вектор-столбцы матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times m}$ . Матрица  $\mathbf{A}$  может рассматриваться как математическая запись линейного оператора  $\mathbf{A}$ , осуществляющего отображение  $\mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ .

Псевдорешение системы (1)

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^+\mathbf{y}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$  – псевдообратная матрица Мура–Пенроуза [1].

В частности, если  $m = n$  и  $\mathbf{A}$  – квадратная не вырожденная матрица, решение (2) превращается в нормальное (инверсное) решение

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}. \quad (3)$$

Однако практика показывает, что, несмотря на принципиальную возможность нахождения решения (2) и его единственность, задача усложняется, когда число обусловленности матрицы большое, и решение неустойчиво. Рассматривая без потери общности, случай  $m = n$ , найдем оценку относительной погрешности искомой величины. Пусть вместо (1) на самом деле решается система

$$(\mathbf{A}_0 + \Delta\mathbf{A})(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0 + \Delta\mathbf{y}, \quad (4)$$

т.е. элементы матрицы, искомого вектора и правой части имеют некоторые неизвестные абсолютные погрешности  $\Delta\mathbf{A}$ ,  $\Delta\mathbf{x}$ ,  $\Delta\mathbf{y}$ , зависящие от точности контрольно-измерительной аппаратуры и других факторов, и малые по сравнению с истинными значениями этих величин  $\mathbf{A}_0$ ,  $\mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{y}_0$ . Обозначим относительные погрешности  $\delta_A = \|\Delta\mathbf{A}\|/\|\mathbf{A}_0\|$ ,  $\delta_x = \|\Delta\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}_0\|$ ,  $\delta_y = \|\Delta\mathbf{y}\|/\|\mathbf{y}_0\|$ . После несложных преобразований получаем

$$\delta_x \leq \text{cond}(\mathbf{A}_0)\delta_y + [\text{cond}(\mathbf{A}_0)]^2\delta_A, \quad (5)$$

где  $\text{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}_0^{-1}\| \cdot \|\mathbf{A}_0\|$  – число обусловленности матрицы  $\mathbf{A}$ . Если элементы матрицы заданы точно, неравенство (5) принимает вид

$$\delta_x \leq \text{cond}(\mathbf{A})\delta_y. \quad (6)$$

Здесь представлена количественная взаимосвязь точности решения, выбранной математической модели и точности измерительной аппаратуры. Из (6) видно, что максимальная относительная погрешность решения равна

$$(\delta_x)_{\max} = \text{cond}(\mathbf{A}_0)\delta_y. \quad (7)$$

Зависимость (7) позволяет выбрать по двум заданным факторам третий. Например, для существующей математической модели и заданной точности решения подобрать необходимую для успешного измерения аппаратуру или по имеющейся аппаратуре и математической модели оценить точность решения, а также по заданной точности метода и имеющейся измерительной аппаратуре оценить эффективность выбранной модели.

Известно [2], что число обусловленности матрицы в евклидовой форме равно отношению максимального и минимального модуля ее собственных чисел

$$\text{cond}(\mathbf{A}) = (\max|\lambda_i|)/(\min|\lambda_i|), \quad (8)$$

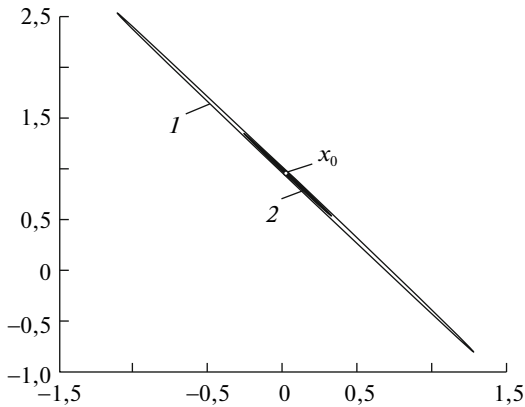
т.е. с ростом размерности матрицы вероятен рост и числа обусловленности, и, соответственно, погрешности решения.

Поскольку из (6) невозможно точно определить максимально возможное расстояние между приближенным и истинным решениями, так как истинные значения априори неизвестны, то более содержательные результаты можно получить при вычислении оценок абсолютной погрешности решения. В частности, при  $m = n$  абсолютную ошибку решения можно определить как

$$\sigma_{\min}\|\Delta\mathbf{x}\|_{\max} = \|\Delta\mathbf{y}\|, \quad (9)$$

$\sigma_{\min} > 0$  – наименьшее сингулярное число в сингулярном разложении  $\mathbf{A}$  [1].

**Построение приближенных решений с заданной точностью.** Поскольку найти точное решение при плохой обусловленности (1) и ошибках измерений невозможно в принципе, речь может идти лишь о приближенном решении. При этом, в зависимости от характера исходной информации, возможен как детерминированный, так и вероятностный подход. Учитывая, что экспериментальные данные всегда случайны, наиболее естественной представляется постановка обратных задач в рамках теории статистической оценки неизвестных параметров. В отличие от самих числовых характеристик оценки являются случайными, и их значения зависят от объема экспери-



**Рис. 1.** Иллюстрация решений систем линейных алгебраических уравнений: 1 – область допустимых оценок; 2 – область, образованная оценками по методу наименьших квадратов

ментальных данных, а законы распределения вероятности – от распределения вероятности самих случайных чисел или значений измеряемых величин.

Все известные методы решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений, называемые регуляризирующими алгоритмами (например, [3–6]), по сути направлены на повышение устойчивости системы путем снижения числа обусловленности матрицы.

Учитывая же статистический характер измеренных выходных характеристик, можно применить новые подходы к повышению точности решения систем алгебраических уравнений, суть которых состоит в следующем. Поскольку при  $m = n$  задача неустойчивая, предлагается увеличить информацию об объекте, увеличив количество уравнений  $n \gg m$ , получая при этом переопределенную систему уравнений. На практике это означает увеличение количества измерений. В строгом смысле переопределенная система является несовместной, следовательно, решение следует искать в виде единого объекта  $\hat{x}$ , при подстановке которого вместо  $x$  в левую часть (1) достигается наиболее точное представление всей совокупности экспериментальных данных [7]. Для этого используем метод максимального правдоподобия. Хотя оценка по методу максимального правдоподобия является неустойчивой, ее область всегда уже, чем область допустимых оценок для (2). Более того, максимально правдоподобная оценка приближается к  $x$  с ростом количества реализаций  $n$ . Максимизация правдоподобия требует, чтобы невязка  $(\hat{x} - x_0)^2$  была минимальной, и для случая нормального распределения погрешностей такой оценкой является оценка по методу наименьших квадратов.

На рис. 1 представлены результаты численного эксперимента для системы линейных алгебраических уравнений с  $\text{cond}(A) = 86,99$ , в котором были смоделированы результаты измерений при  $n = 1000$ . Центр области, образованной из оценок наименьших квадратов, находится несколько в стороне от  $x_0$ , при этом с ростом  $n$   $\hat{x} \rightarrow x_0$ .

Оценки (7), (8) и (9) дают лишь максимально возможную погрешность и не позволяют судить о том, насколько далеко или близко конкретное решение от истинного. Полученный расчетный результат зависит, в частности, от той конкретной и неизвестной ошибки, которая имеет место в момент измерений. В другой момент времени погрешность измерения одного и того же параметра, осуществляемого тем же прибором, может оказаться другой. Но значения погрешностей измеряемых величин ограничены сверху классом точности прибора, то есть могут рассматриваться как случайные величины с математическим ожиданием, равным их истинному значению, и средним квадратичным отклонением, равным третьей части точности измерительного прибора. Поэтому элементы, полученные в результате решения системы (1) по многократно повторяемым в одинаковых условиях измерениям элементов  $Y$  и  $A$ , могут приобретать произвольные значения внутри ограниченной области, величина которой определяет-

ся оценками (7) и (9), т.е. рассматриваться как случайные величины, которые подчиняются определенным законам распределения. Если для каждого из искомым факторов, которые рассматриваются как случайные величины, найти математическое ожидание, то они и будут ближе всего к истинным результатам.

На практике часто имеется возможность провести некоторое количество измерений  $l$  так, что  $l = k * m$ ,  $k \in \mathbf{N}$ , т.е. провести  $k$  измерений для каждого из параметров  $y_i$ . В этом случае вместо нахождения оценки по методу наименьших квадратов из (2) предлагается принять  $m = n$  и искать инверсное решение (3), при этом вместо  $y_i$  подставлять его усредненное значение  $\bar{y}_i = \sum_{j=1}^k y_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Полученная оценка  $\hat{x}$  совпадает с оценкой по методу наименьших квадратов. Данный метод является фактически статистическим методом регуляризации.

Оценка  $\hat{x}$  позволит перейти к методу обеспечения заданной точности решения (1), т.е. определения необходимого количества измерений при заданной точности решения. На практике с ростом  $k$  точность будет увеличиваться, пока случайная ошибка не станет сравнима с систематической, которую можно оценить, например, сравнивая решение прямой задачи с известными входными величинами, полученное методом Монте-Карло, с измеренными. Учет систематической погрешности позволит уточнить решение обратной задачи. В общем случае для увеличения точности решения (1) целесообразно совмещать предложенный метод и известные методы регуляризации.

**Обеспечение заданной точности решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений.** Из (7) очевидно, что для повышения точности решения нужно уменьшать  $\text{cond}(\mathbf{A})$  или  $\delta_y$ . Методы улучшения обусловленности матрицы  $\mathbf{A}$  достаточно широко описаны в литературе, мы же рассмотрим пути уменьшения  $\delta_y$ . Возникает вопрос, какое количество измерений необходимо для достижения заданной точности решения (1). Будем считать плотность распределения  $y_i$  нормальной  $y_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Тогда  $\mathbf{y}$  является многомерной нормальной величиной  $\mathbf{y} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ , где  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{M}(\mathbf{y})$  – вектор математического ожидания,  $\boldsymbol{\Sigma} = \text{cov}(\mathbf{y})$  – ковариационная матрица размера  $n \times n$ . Для уменьшения  $\delta_y$ , а значит  $\|\Delta \mathbf{y}\|$ , предлагается для  $\mathbf{y}$  производить  $k$  измерений, и вместо  $\mathbf{y}$  в (1) подставлять его выборочную оценку  $\mathbf{M}(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^k y_i$ . При этом относительная ошибка  $\delta_y \approx \|\mathbf{M}(\mathbf{y}) - \mathbf{y}_0\|/\|\mathbf{y}_0\|$ .

Количество измерений  $k$  величины  $\mathbf{y}$ , необходимых для достижения заданной точности  $\delta_x$ , можно установить следующим образом. Известно, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{M}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}_0$ . В реальных задачах при ограниченном  $k$  оценка  $\mathbf{M}(\mathbf{y})$  позволяет определить математическое ожидание с некоторой погрешностью. Следовательно, вычисление  $\delta_y$  можно заменить нахождением относительной погрешности оценки математического ожидания. Оценим ее, для чего выразим  $\mathbf{M}(\mathbf{y})$ , вычисленное по  $k$  измерениям, по рекуррентной формуле

$$\mathbf{M}(\mathbf{y})_k = [(k-1)\mathbf{M}(\mathbf{y})_{k-1} + \mathbf{y}_k]k^{-1}, \quad (10)$$

где  $\mathbf{M}(\mathbf{y})_k$  – оценка математического ожидания при объеме выборки  $k$ ,  $\mathbf{M}(\mathbf{y})_{k-1}$  – оценка математического ожидания при объеме выборки  $k-1$ .

Определим абсолютное значение относительной погрешности оценивания математического ожидания как

$$\delta_y = \left\| (\mathbf{M}(\mathbf{y})_k - \mathbf{M}(\mathbf{y})_{k-1})\mathbf{y}_0^{-1} \right\|. \quad (11)$$

Из (10) и (11), учитывая, что максимально возможное значение ошибки составляет  $\|\mathbf{M}(\mathbf{y})_{k-1}(k\mathbf{y}_0)^{-1}\|$ , имеем после ряда преобразований  $\delta_y \leq \|\mathbf{M}(\mathbf{y})_{k-1}(k\mathbf{y}_0)^{-1}\|$ .

Так как  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{M}(\mathbf{y})_{k-1} = \mathbf{y}_0$ , то для больших значений  $k$  можно принять  $\delta_y \leq 1/k$ . Отсюда для обеспечения заданной точности  $\delta_y$  измерений вектора  $\mathbf{y}$  количество измерений должно составлять  $k \geq 1/\delta_y$ , а для обеспечения заданной точности  $\delta_x$  решения системы (1), соответственно,

$$k \geq \text{cond}(\mathbf{A})/\delta_x. \quad (12)$$

Неравенство (12) не требует априорной информации о  $\mathbf{x}_0$ , нужно лишь знать число обусловленности матрицы  $\mathbf{A}$  и желаемое значение относительной погрешности результата. Соотношение (12) может быть применено для обеспечения заданной точности решения при относительно небольших  $\text{cond}(\mathbf{A})$ , но в случае очень больших чисел обусловленности возникают трудности. Например, при 5% точности результата и  $\text{cond}(\mathbf{A}) = 1000$ , необходимое количество измерений  $k = 20000$ , что часто практически не осуществимо. В таком случае предлагается приближенный статистический алгоритм расчета необходимого количества измерений при заданной точности решения систем алгебраических уравнений. Алгоритм базируется на оценке количества измерений  $k$ , необходимых для получения  $\mathbf{M}(\mathbf{y})$  с заданными погрешностью и доверительной вероятностью, чем и достигается меньшее значение  $k$ . В случае нормальной плотности распределения  $y_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $\mathbf{y}$  есть многомерная нормальная величина с плотностью распределения

$$f(\mathbf{y}) = (\sqrt{(2\pi)^n |\boldsymbol{\Sigma}|})^{-1} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})\right], \quad \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n,$$

где  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{M}(\mathbf{y})$  – вектор математического ожидания  $\mathbf{y}$ ,  $\boldsymbol{\Sigma} = \text{cov}(\mathbf{y})$  – квадратная неотрицательно определенная симметричная ковариационная матрица размером  $n \times n$ , на диагонали которой располагаются дисперсии компонент вектора, а внешнедиагональные элементы являются ковариациями между компонентами  $y_i$ ,  $|\boldsymbol{\Sigma}| = \det(\boldsymbol{\Sigma})$  – определитель матрицы  $\boldsymbol{\Sigma}$ , а  $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$  – обратная к ней матрица.

При количестве измерений  $k$  выборочная ковариационная матрица

$$\boldsymbol{\Sigma} = (k-1)^{-1} \sum_{i=1}^k (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})^T, \quad \text{где } \bar{\mathbf{y}} = k^{-1} \sum_{i=1}^k \mathbf{y}_i. \quad (13)$$

Основным методом оценки параметров многомерных случайных величин является метод выборочного анализа, согласно которому анализируется выборка, и результаты анализа распространяются на всю генеральную совокупность исследуемого случайного вектора. Оценим доверительную область для  $\boldsymbol{\mu}$ . Пусть найден вектор выборочных средних  $\bar{\mathbf{y}}$  и матрица оценок ковариаций  $\boldsymbol{\Sigma}$ . Для  $n > 1$  при построении доверительной области используют статистику  $T^2$  Хотеллинга, связанную при заданной доверительной вероятности  $P$  с  $F$ -статистикой Фишера зависимостью

$$T^2 = [n(k-1)/(k-n)]F. \quad (14)$$

где  $k$  – объем выборки. Учитывая (14), доверительная область для  $\boldsymbol{\mu}$  с вероятностью  $P$  описывается следующим уравнением поверхности

$$(\bar{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\mu}) = [n(k-1)/(k(k-n))]F_{1-P}, \quad (15)$$

где  $F_{1-P}$  – значение  $F$  при уровне значимости  $\alpha = 1 - P$  и числах степеней свободы  $f_1 = n$  и  $f_2 = k - n$ . Доверительная область определяется в  $\mathbf{R}^n$  – это  $n$ -мерный эллипсоид с центром в  $\bar{\mathbf{y}}$ , поскольку  $(\bar{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\mu})$  представляет собой положительно определенную квадратичную форму.

Зависимость (15) пригодна для определения допустимой погрешности  $\delta_y = \|\bar{y} - \mu\|/\|\mu\|$  при условии наличия результатов  $k$  измерений. В допущении  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{M}(\Delta y) = 0, \mu = y_0$  (15) преобразуется к виду

$$(\Delta y)^T \Sigma^{-1} \Delta y = [n(k-1)/(k(k-n))] F_{1-p}. \quad (16)$$

Из (16) можно приближенно найти необходимое количество измерений  $k$  для достижения заданной точности решения (1), для чего предлагается итерационный алгоритм. Этот алгоритм применяется для заданной доверительной вероятности  $P$  и допустимой ошибки решения  $\|\Delta x_{\text{доп}}\|$ . Перед началом алгоритма производится  $k$  измерений вектора  $y \in \mathbf{R}^n$ . Работу алгоритма можно представить в виде трех повторяющихся шагов.

**Шаг 1 (вычисление ошибки).** Рассчитывают выборочное среднее  $\bar{y}^{(t)}$ , обратную ковариационную матрицу  $(\Sigma^{-1})^{(t)}$ , значение  $F$ -статистики Фишера  $(F_{1-p})^{(t)}$ , используя (17), вычисляют  $\mu^{(t)}$  и ошибку измерений  $\Delta y^{(t)} = \bar{y}^{(t)} - \mu^{(t)}$ , и с помощью (9) находят значение максимальной ошибки решения  $\|\Delta x\|^{(t)}$ .

**Шаг 2 (сравнение).** Максимальную ошибку решения  $\|\Delta x\|^{(t)}$  сравнивают с допустимой ошибкой  $\|\Delta x_{\text{доп}}\|$ . Если  $\|\Delta x\|^{(t)} \leq \|\Delta x_{\text{доп}}\|$ , то получена удовлетворительная точность; если  $\|\Delta x\|^{(t)} > \|\Delta x_{\text{доп}}\|$ , то вычисляют коэффициент уменьшения ошибки  $\xi = \|\Delta x\|^{(t)}/\|\Delta x_{\text{доп}}\|$ .

**Шаг 3 (исправление и уточнение).** Вычисляют “исправленный” вектор ошибок  $\Delta y^{(t+1)} = \Delta y^{(t)}/\xi$  и далее из (16) — значение  $k^{(t+1)}$ . Так как  $k^{(t+1)}$  было рассчитано по результатам первого шага  $t$ , оно требует уточнения, поэтому методом Монте-Карло генерируют  $k^{(t+1)}$  векторов экспериментальных данных с ошибками измерений, равными ошибкам проведенных  $k$  экспериментов.

Итерационный процесс прекращается, когда  $\|\Delta x\|^{(t)} \leq \|\Delta x_{\text{доп}}\|$ . Сходимость алгоритма достигается гарантированным существованием решения уравнения (16). Алгоритм может быть реализован на основе известных методов оптимизации и использовании компьютерных программ, например, Matlab.

**Определение эксцентриситета в проблеме балансировки ротора турбонасосного агрегата.** Изложенный метод решения обратных задач был применен для снижения виброактивности турбонасосного агрегата ТНА-150. С этой целью определялся эксцентриситет ротора, а также его упруго-инерционные параметры с последующим расчетом критических частот. Турбонасосные агрегаты, содержащие быстровращающиеся роторы, широко применяются в ракетной, авиационной, химической и других отраслях техники. Исследуемый тип агрегата имел повышенную вибрацию, вызванную дисбалансом ротора, и необходимо было снизить деформации ротора, напряжения и нагрузку на его подшипники до 300 Н за счет компенсации эксплуатационных эксцентриситетов и дисбалансов наиболее массивных деталей, установленных на валу.

Вал турбоагрегата, вращающийся на двух подшипниках, несет на себе крыльчатки двух ступеней компрессора и диск осевой турбины (рис. 2). Именно в этих местах сосредоточены основные массы и дисбалансы, поэтому была выбрана трехмассовая расчетная схема ротора (рис. 3). Чтобы выбранная математическая модель колебаний ротора стала эффективной, была проведена идентификация его упруго-инерционных характеристик путем измерения прогибов на четырех частотах вращения  $\omega_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ .

Для уравнений движения ротора были использованы уравнения теории изгиба [8], в результате для каждого из трех сечений ротора (рис. 3), в проекциях на две взаимно перпендикулярные плоскости были записаны уравнения, связывающие неизвестные распределения жесткости  $EJ$ , массы  $m$  и эксцентриситета  $e$  с прогибами  $u$  ротора

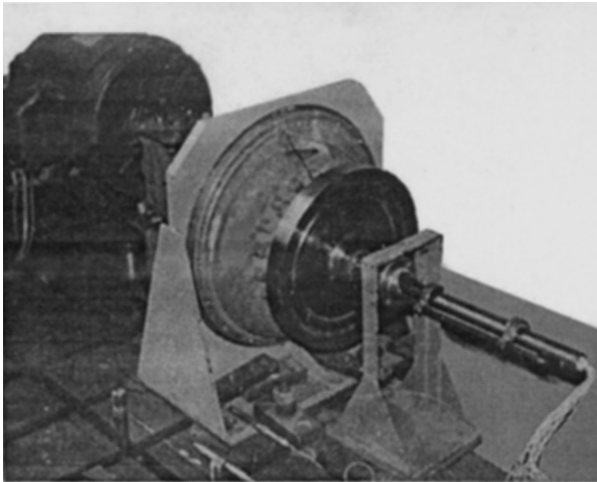


Рис. 2. Внешний вид ротора турбонасосного агрегата ТНА-150

$$\alpha_0 K''_{zz}(Z, \omega_j) + 2\alpha_1 K'(Z, \omega_j) + \alpha_2 K(Z, \omega_j) - e_y \omega^2 = \omega_j^2 y, \quad (17)$$

где  $\alpha_i = \alpha_i(Z) = \frac{1}{m} \cdot \frac{d^{(i)} EJ}{dZ^i}$ ,  $i = 0, 1, 2$ , – статические коэффициенты влияния,

$K(Z, \omega) = y''/[1 + (y')^2]^{3/2}$  – кривизна упругой линии ротора,  $Z$  – координата сечения ротора, отсчитываемая вдоль оси вращения.

В сечениях ротора А, Б, В измерили прогибы во всем диапазоне частот вращения 0–18000 об/мин. и отобрали их значения при 14100, 15000, 15600 и 16000 об/мин. Проекции этих прогибов и их производные подставили в две системы уравнений (17) для каждого сечения, получая при этом системы из четырех независимых уравнений.

До решения систем уравнений (17) были рассчитаны их числа обусловленности, значения которых оказались в пределах 3,2–6,7. Из этого следует, что возможная погрешность определения неизвестных могла составить до 134% при точности аппаратуры для измерения прогибов 15%. Для повышения точности расчетов был применен разработанный авторами статистический метод повышения устойчивости математических моделей. В данном случае измерения прогибов были повторены не менее 50 раз и найдены математические ожидания значений и фаз этих прогибов. Эти средние значения и были подставлены в уравнения (17). По найденным эксцентриситетам  $e_x$ ,  $e_y$  и коэффициентам влияния  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  для каждого из сечений были найдены значе-

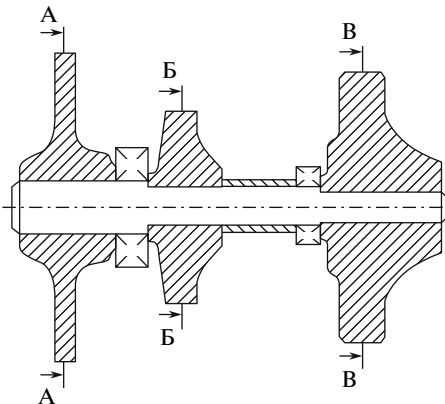


Рис. 3. Расчетная схема турбонасосного агрегата ТНА-150

ния приведенных масс и жесткостей вала, а также массы участков вала вместе с дисками на них  $M_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  в соответствии с формулами

$$m(Z) = M \exp \left( \int_0^Z (\alpha_0)^{-1} \alpha_1 dZ \right), \quad EJ(Z) = m(Z) \alpha_0(Z),$$

где  $M$  – масса ротора.

Результаты решения: для первого сечения:  $e_x = -5 \cdot 10^{-6}$  м;  $e_y = -5,84 \cdot 10^{-6}$  м;  $EJ_1 = 414,7$  Н/м<sup>2</sup>;  $m_1 = 0,22 \cdot 10^{-2}$  кг/м;  $M_1 = 4,05$  кг; для второго сечения:  $e_x = -9 \cdot 10^{-6}$  м;  $e_y = 1,7 \cdot 10^{-6}$  м;  $EJ_2 = 1594$  Н/м<sup>2</sup>;  $m_2 = 0,2 \cdot 10^{-2}$  кг/м;  $M_2 = 2,74$  кг; для третьего сечения:  $e_x = -6,2 \cdot 10^{-6}$  м;  $e_y = 30 \cdot 10^{-6}$  м;  $EJ_3 = 23998$  Н/м<sup>2</sup>;  $m_3 = 0,83 \cdot 10^{-2}$  кг/м;  $M_3 = 11$  кг.

Рассчитанные по найденным значениям  $EJ$ ,  $M$  и  $m$  первая и вторая критические частоты колебаний составили:  $n_1 = 16100$  об/мин,  $n_2 = 25080$  об/мин; погрешность расчетов по сравнению с экспериментально полученными значениями не превысила 3%. В результате проведенной высокочастотной балансировки, предусматривающей компенсацию найденных эксцентриситетов с помощью уравновешивающих масс, прогибы ротора в диапазоне частот вращения 2000–18000 об/мин. снизились в 6 раз, амплитуды вибраций опор – в 4 раза, реакции – в 4,5 раза, статические напряжения в материале вала – в 3,5 раза, динамические – в 3 раза.

**Выводы.** В работе обосновано применение метода наименьших квадратов для повышения устойчивости моделей, заданных системами линейных алгебраических уравнений. Предложены метод обеспечения устойчивости их решения, базирующийся на увеличении количества измерений исходных параметров, а также способ и статистический алгоритм обеспечения заданной точности решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений.

Представлены результаты применения предложенных методов для идентификации эксцентриситетов, жесткостей и масс в задаче снижения виброактивности ротора турбонасосного агрегата.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андрушевский Н.М. Анализ устойчивости решений систем линейных алгебраических уравнений. Учебное пособие. М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова; МАКС Пресс, 2008. 71 с.
2. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: Изд-во ин. лит., 1954. 300 с.
3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
4. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
5. Морозов В.А. Методы регуляризации неустойчивых задач. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та им. М.В. Ломоносова, 1987.
6. Бакушинский А. В., Гончарский А. В. Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989.
7. Тербиж В.Ю. Введение в статистическую теорию обратных задач. М.: Физматлит, 2005. 376 с.
8. Основы балансировочной техники. Т. 2 / Под ред. Щепетильникова В.А. М.: Машиностроение, 1975. С. 179–252.