

**РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ПЛАСТИЧНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ  
ПОЛІЕТИЛЕНУ ПІД ДІЄЮ ВАЛКІВ ПРОФІЛЮ РЕЛО**

Присвячено розробці моделі напружено-деформованого стану полімерного матеріалу при впливі на нього робочих органів перероблювального обладнання. Отримана математична модель зміни структури полімерів під дією навантаження розтягу, за допомогою якої можна розраховувати поля напружень та деформацій поліетилену.

**Ключові слова:** валки, поліетилен, переробка, напруження, деформація, поле, руйнування.

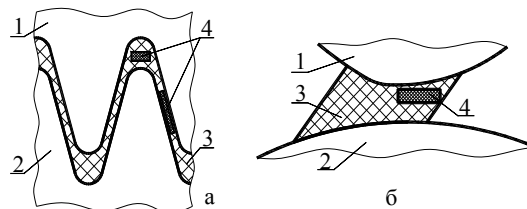
M. E. SKIBA, A. YU. KRAVCHUK  
Khmelnytsky National University

**DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL MODEL OF PLASTIC DEFORMATION  
OF POLYETHYLENE BY RILE OF PROFILE**

It is devoted to the development of a model of stress-strain state of polymer material under the influence of working bodies of processing equipment on it. The mathematical model of the change of the structure of polymers under the influence of tensile loading is obtained, with the help of which it is possible to calculate stress fields and deformations of polyethylene.

Key words: rolls, polyethylene, processing, stress, deformation, field, destruction.

Розглянемо модель напружено-деформованого стану нескінченно малого об'єму полімеру, що умовно вирізаний із полімерних відходів, які перероблюються в пристроях із зубчастими валками та валками профілю Рело (рис. 1). В пристрої із зубчастими валками матеріал спочатку витягується, а потім стискається, що дозволяє створити і зафіксувати в матеріалі орієнтовану надмолекулярну структуру. Після цього орієнтований полімерний матеріал поступає в пристрій із валками Рело, де він піддається деформаціям стиску і зсуву, при яких його структура руйнується в поперечному до попередньої орієнтації напрямку [1].



1, 2 – верхній і нижній валки; 3 – полімерні відходи; 4 – нескінченно малий об'єм полімеру  
Рис. 1. Схема деформації полімеру між зубчастими валками (а) і валками профілю Рело (б)

Під впливом складного напружено-деформованого стану в полімерних матеріалах виникають в'язкопружні та пластичні деформації.

Для інтерпретування в'язкопружного напружено-деформованого стану полімеру будемо використовувати співвідношення між напруженнями і деформаціями у вигляді інтегралів Стілтєса, записаних у тензорній формі [2]:

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^t E_{ijkl}(t-\tau) \cdot \left[ \frac{d\varepsilon_{kl}(\tau)}{d\tau} \right] \cdot d\tau; \quad \varepsilon_{ij}(t) = \int_0^t J_{ijkl}(t-\tau) \cdot \left[ \frac{d\sigma_{kl}(\tau)}{d\tau} \right] \cdot d\tau \quad (1)$$

де  $\tau$  – час релаксації;  $E_{ijkl}$ ,  $J_{ijkl}$  – відповідно функції релаксації і повзучості, які утворюють тензори четвертого порядку.

При  $-\infty < t < 0$  тензори  $E_{ijkl}$ ,  $J_{ijkl}$  дорівнюють нулю, тобто  $E_{ijkl}(t) = J_{ijkl}(t) = 0$ , і кожен елемент цих тензорів має обмежену варіацію в будь-якому замкнутому підінтервалі з області  $-\infty < t < \infty$ .

Напруження, що виникають у полімерному матеріалі в процесі його обробки (рис. 2), визначимо з виразу узагальненого закону Гука таким чином:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, \quad (2)$$

де  $\sigma_{ij}$  і  $\varepsilon_{ij}$  – тензори другого рангу, відповідно, напруження і деформацій;  $C_{ijkl}$  – тензор коефіцієнтів четвертого рангу, що описує в'язкопружні властивості полімерних матеріалів.

Полімер будемо розглядати як трансверсально ізотропний матеріал (в'язкопружні константи в напрямках 1 і 2 еквівалентні), що дозволяє описати його за допомогою п'яти в'язко-пружних констант. Деформація полімерних відходів у валкових пристроях відбувається в умовах плоского напруженого стану, що дозволяє записати:  $\sigma_{33} = 0$ ;  $\sigma_{23} = 0$ ;  $\sigma_{13} = 0$ .

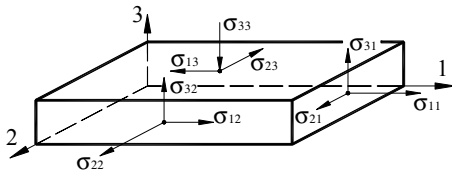


Рис. 2. В'язкопружна деформація нескінченно малого об'єму полімеру

Підставляючи ці умови в рівняння (2), отримаємо систему рівнянь, що описує поведінку полімеру при створенні в ньому складного напружено-деформованого стану за допомогою чотирьох в'язкопружних констант:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E_{11} & -\nu_{21}/E_{22} & 0 \\ -\nu_{12}/E_{11} & 1/E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

де  $E_1, E_2, G_{12}$  – релаксаційні модулі полімерного матеріалу, що визначаються за рівняннями, отриманими в [1].

Із рівняння (3) визначимо деформації в орієнтованому полімерному матеріалі, на який діють напруження стиску і зсуву:

$$\epsilon_1 = \sigma_1/E_1 - \sigma_2\nu_{21}/E_2; \quad \epsilon_2 = -\sigma_1\nu_{12}/E_1 + \sigma_2/E_2; \quad \gamma_{12} = \sigma_{12}/G_{12}, \quad (4)$$

Оскільки зовнішнє навантаження, що приводить до деформації полімеру, задане, то нормальні напруження  $\sigma_1, \sigma_2$  та напруження зсуву  $\sigma_{12}$  мають бути еквівалентними середньому нормальному або тангенціальному напруженню. В результаті деяких перетворень виразів (4), враховуючи рівність напружень і деформацій у паралельних площинах полімеру, отримаємо [3]:

$$\sigma_1 = -\frac{4\hat{\sigma}}{E_1 h_2} \left( \frac{A_{22} + \nu_{12} A_{12}}{A_{11} A_{22} + A_{12}^2} \right), \quad \sigma_2 = -\frac{4\hat{\sigma}}{E_2 h_2} \left( \frac{A_{12} + \nu_{12} A_{11}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \right), \quad \sigma_{12} = \frac{4\hat{\sigma}}{h_2 G_{12} A_{33}}. \quad (5)$$

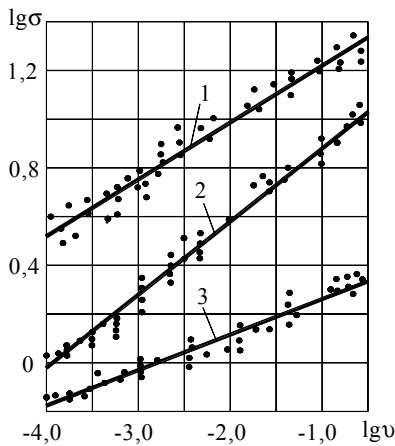
де  $A_{11} = 4/E_1 \cdot h_2$ ;  $A_{22} = 4/E_2 \cdot h_2$ ;  $A_{33} = 4/G_{12} \cdot h_2$ ;  $A_{12} = A_{21} = -4\nu_{12}/E_1 \cdot h_2$ ,  $\hat{\sigma} = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$  – еквівалентне напруження розтягу.

З рівняння (3), враховуючи рівняння (5), отримаємо такі вирази для визначення нормальних і дотичних напружень:

$$\sigma_1 = \epsilon_1 \cdot E_1^2 h_2 \cdot \frac{\frac{1}{E_1 E_2 h_2^2} - \left( \frac{\nu_{12}}{E_1 h_2} \right)^2}{\frac{1}{E_2 h_2} - \frac{\nu_{12}^2}{E_1 h_2}}, \quad \sigma_2 = \epsilon_2 \cdot E_1^2 h_2 \cdot \frac{\frac{1}{E_1 E_2 h_2^2} - \left( \frac{\nu_{12}}{E_1 h_2} \right)^2}{\frac{\nu_{12}^2}{E_1 h_2} - \frac{\nu_{12}^2}{E_2 h_2}}, \quad \sigma_{12} = \epsilon_{12} \cdot G_{12}, \quad (6)$$

де  $\nu_{12}$  – коефіцієнт Пуассона.

Отримані вирази для розрахунку напружень (6), які створюють в'язкопружні деформації в полімерному матеріалі, можна використовувати для визначення раціональних конструктивних параметрів перероблювального обладнання та ефективних режимів його роботи, при яких забезпечується необхідна орієнтація структури полімеру та його руйнування.



1 –  $T=20^\circ\text{C}$ ; 2 –  $T=50^\circ\text{C}$ ; 3 –  $T=80^\circ\text{C}$

Рис. 3. Залежність руйнівного напруження від швидкості розтягу полівінілхлориду

Після досягнення граничної в'язкопружної деформації для поліетилену та поліпропілену в них виникає пластична деформація. В результаті досягнення граничного значення пластичної деформації згадані вище полімери пластично руйнуються.

Для моделювання процесу пластичної деформації полімерного матеріалу між валками перероблювального пристрою скористаємося відомим з теорії пластичності рівнянням [4, 5]:

$$\sigma_{nm} = \sigma \cdot \delta_{nm} + s_{nm} = \left( \lambda \cdot \xi \cdot \delta_{nm} + 2\mu \cdot e_{nm}^{nl} \right) \cdot t, \quad (7)$$

де  $s_{nm}$  – компоненти девіатора тензора напружень;  $\sigma \delta_{nm}$  – компоненти кульового тензора напружень;  $\sigma$  – гідростатичний тиск;  $\delta_{nm}$  – символ Кронекера;  $\lambda, \mu$  – коефіцієнти Ламе, Па;  $\sigma_{nm}$  та  $e_{nm}$  – компоненти тензора

напружень та тензора швидкостей деформацій,  $c^{-1}$ ;  $\zeta$  – швидкість об’ємної деформації,  $c^{-1}$ ;  $t$  – час дії валків на полімерний матеріал, с.

Вплив температури на активність руху сегментів ланцюгів макромолекул, а отже, на напружено-деформований стан у полімерному матеріалі визначаємо за допомогою рівняння Арреніуса [6]:

$$\eta = \eta_0 \cdot \exp(U/RT), \tag{8}$$

де  $U$  – енергія активації в’язкої течії;  $\eta_0$  – постійна, яка може бути визначена з умови  $T > T_{пл}$ , де  $T_{пл}$  – температура плавлення полімеру.

Діапазон тиску, при якому полімер зміцнюється (зміцнення враховується кульовим тензором напружень  $\sigma \cdot \delta$  (7)), визначався за допомогою побудови граничних поверхонь в області пластичної деформації. В результаті цього встановлено, що значення тиску, який створюється в полімері робочими органами перероблювального обладнання, знаходиться за межами області зміцнювання. Таким чином, в дисертаційній роботі моделювався вплив на полімерний матеріал напружень зсуву, що створюються валками профілю Рело, як наслідок – форма полімеру змінюється аж до його руйнування при цьому об’єм лишається незмінним.

Відповідно до інкрементальної теорії пластичності швидкість пластичної деформації пропорційна девіатору напружень, який є постійним [6]:

$$e_{nm} = d\lambda \cdot s_{nm}, \tag{9}$$

де  $d\lambda$  – множник пропорційності в диференціальній формі.

На основі рівняння Ламе, враховуючи модель Кельвіна для в’язкопружних деформацій полімеру і умову нестисливості та використовуючи гіпотезу квазістаціонарності пластичної деформації, запишемо рівняння, що пов’язують напруження і швидкості деформації таким чином:

$$\partial \tau / \partial x = \eta \cdot \nabla^2 u; \quad \partial \tau / \partial y = \eta \cdot \nabla^2 v, \tag{10}$$

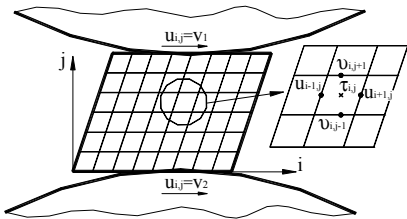


Рис. 4. Сітка фіксованих комірок, що покриває область деформації полімеру

де  $\eta$  – динамічна в’язкість полімерного матеріалу, Па·с;  $u, v$  – компоненти вектора швидкості пластичної деформації, м/с;  $\tau$  – дотичні напруження, що викликають пластичну деформацію, Па.

Наведена вище математична модель процесу пластичної деформації полімеру між валками перероблювального пристрою була розрахована за допомогою скінченнорізницевого методу, згідно з яким всі диференціальні рівняння та граничні умови записуються у скінченних різницях на сітці фіксованих комірок (рис. 4), що покриває область деформованого полімерного матеріалу.

У результаті цього отримали таку систему рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} u_{i,j} &= 0,25 \cdot [u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - (\tau_{i+1,j} - \tau_{i,j}) \cdot h / \eta_{ij}] ; \\ v_{i,j} &= 0,25 \cdot [v_{i+1,j} + v_{i-1,j} + v_{i,j+1} + v_{i,j-1} - (\tau_{i,j+1} - \tau_{i,j}) \cdot h / \eta_{ij}] ; \\ \tau_{i,j} &= 0,25 \cdot (\tau_{i+1,j} + \tau_{i-1,j} + \tau_{i,j+1} + \tau_{i,j-1}) ; \\ T_{i,j} &= 0,25 \cdot (T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}) ; \\ \eta_{ij} &= \eta_0 \cdot \exp(U/RT_{ij}). \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

До цієї системи рівнянь додаються початкові і граничні умови біля поверхонь валків, що враховують радіуси, кутову швидкість валків і притискне зусилля, яке залежить від мінімальної міжвалкової відстані та від товщини оброблювального матеріалу. Числове моделювання напружено-деформованого стану здійснювалося послідовними кроками протягом певного періоду часу при зміні навантаження. За результатами числового моделювання отримано графіки, що пов’язують швидкість зсувних деформацій, створюваних робочими органами перероблювального обладнання, з дотичними напруженнями, що виникають у матеріалі (рис. 5, 6).

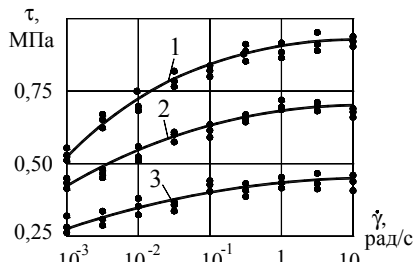


Рис. 5. Залежність зсувного напруження від швидкості деформації поліетилену:  
1 – при температурі  $T = 20^\circ\text{C}$ ;  
2 –  $T = 50^\circ\text{C}$ ; 3 –  $T = 80^\circ\text{C}$

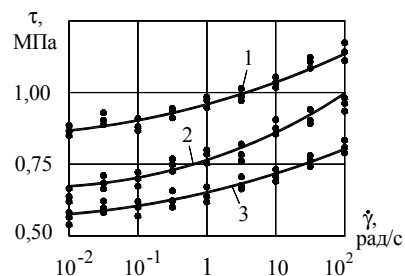
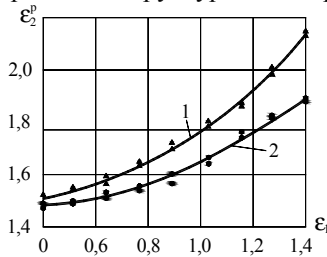


Рис. 6. Залежність зсувного напруження від швидкості деформації поліпропілену:  
1 – при тиску, що створюється валками,  $\sigma = 5 \text{ МПа}$ ;  
2 –  $\sigma = 3,5 \text{ МПа}$ ; 3 –  $\sigma = 2 \text{ МПа}$

З рис. 5, 6 видно, що в результаті збільшення швидкості деформації, яка визначається коловими швидкостями та радіусами валків, збільшується значення максимальних дотичних напружень у матеріалі.

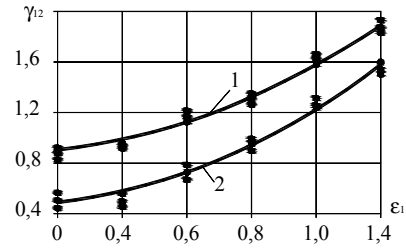
Одночасно спостерігається суттєвий вплив на величину цих напружень температури матеріалу і тиску, що створюється валками.

Важливе значення для проектування перероблювального обладнання має гранична деформація попередньої орієнтації структури полімерного матеріалу (рис. 7, 8).



1 – швидкість розтягу  $v_1 = v_2 = 1,5 \cdot 10^{-3}$  м/с;  
2 –  $v_1 = 1,5 \cdot 10^{-3}$  м/с,  $v_2 = 3,0 \cdot 10^{-3}$  м/с

Рис. 7. Графіки залежності руйнівної поперечної деформації розтягу для поліетилену від попереднього розтягу



1 – швидкість розтягу  $v_1 = 1,5 \cdot 10^{-3}$  м/с;  $n_2 = 0,15$  с<sup>-1</sup>;  
2 –  $v_1 = 1,5 \cdot 10^{-3}$  м/с,  $n_2 = 0,30$  с<sup>-1</sup>

Рис. 8. Графіки залежності руйнівної поперечної деформації зсуву для поліпропілену від попереднього розтягу

Експериментальні дослідження впливу цієї деформації на деформацію в поперечному напрямку до орієнтації структури показали, що збільшення ступеня попереднього витягування полімерного матеріалу приводить до збільшення значень руйнівних деформацій у поперечному напрямку. В результаті проведених експериментальних досліджень визначено ефективні значення граничної деформації попереднього розтягу, які становлять: для поліетилену  $\varepsilon_1 = 1,3$ ; для поліпропілену  $\varepsilon_1 = 1,2$ ; для полівінілхлориду  $\varepsilon_1 = 0,32$ . При таких значеннях граничної деформації попереднього розтягу поліетилену руйнівна деформація в поперечному напрямку збільшується на 18 %, а величина руйнівного напруження зменшується на 10 %.

#### Висновки.

Таким чином, отримано: аналітичні вирази для визначення руйнівних напружень, що створюють граничні деформації в полімерних відходах, залежно від фізико-механічних характеристик полімеру; числовий метод для визначення дотичних напружень залежно від швидкостей деформацій, які дозволяють визначати раціональні конструктивні параметри перероблювального обладнання при різних технологічних режимах переробки полімерних відходів для отримання частинок з анізотропією експлуатаційних властивостей, які можуть використовуватися як армувальні елементи у виробництві полімерних виробів легкої промисловості.

#### Література

1. Синюк О.М. Метод визначення ефективних властивостей багат шарових полімерних матеріалів / О.М. Синюк, М.Є. Скиба // Вісник Хмельницького національного університету, 2015. – № 6 (231). – С. 54-62.
2. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности: Учеб. пособие / В.И. Самуль. – М.: Высш. школа, 1982. – 264 с.
3. Кристенсен Р.М. Введение в механику композитов / Р.М. Кристенсен. Пер. с англ. А.И. Бейля, Н.П. Жмудя под ред. Ю.М. Тарнопольского. – М.: Мир, 1982. – 336 с.
4. Лурье А. И. Теория упругости / А. И. Лурье. – М.: Наука, 1970. – 940 с.
5. Качанов Л.М. Основы теории пластичности / Л.М. Качанов – М.: Наука, 1969. – 420 с.
6. Стефанов Ю.П. Численное исследование поведения упруго-идеальнопластических тел, содержащих неподвижную и распространяющуюся трещины, под действием квазистатических и динамических растягивающих нагрузок / Ю.П. Стефанов // Физическая мезомеханика – 1998. – Т. 1, № 2. – С. 81-93.

#### References

1. Sy`nyuk O.M. Metod vy`znachennya efekty`vny`x vlasty`vostej bagatosharovy`x polimerny`x materialiv / O.M. Sy`nyuk, M.Ye. Sky`ba // Visnyk`k Xmel`ny`cz`kogo nacional`nogo univ`ersy`tetu, 2015. – # 6 (231). – S. 54-62.
2. Samul` V.I. Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti: Ucheb. posobie / V.I. Samul`. – M.: Vyssh. shkola, 1982. – 264 s.
3. Kristensen R.M. Vvedenie v mekhaniku kompozitov / R.M. Kristensen. Per. s angl. A.I. Bejlya, N.P. Zhmudya pod red. YU.M. Tarnopol'skogo. – M.: Mir, 1982. – 336 s.
4. Lur'e A. I. Teoriya uprugosti / A. I. Lur'e. – M.: Nauka, 1970. – 940 s.
5. Kachanov L.M. Osnovy teorii plastichnosti / L.M. Kachanov – M.: Nauka, 1969. – 420 s.
6. Stefanov YU.P. CHislennoe issledovanie povedeniya uprugo-ideal'noplasticheskikh tel, sodержashchih nepodvizhnyuyu i rasprostranyayushchuyusya treshchiny, pod dejstviem kvazistaticheskikh i dinamicheskikh rastyagivayushchih nagruzok / YU.P. Stefanov // Fizicheskaya mezomekhanika – 1998. – T. 1, № 2. – S. 81-93.

Рецензія/Peer review : 3.11.2018 р.

Надрукована/Printed :21.12.2018 р.

Рецензент: