Діхтярук М.М.,
Поплавська О.А.
Хмельницький національний університет,
м. Хмельницький , Україна

АНАЛОГ ЗАДАЧІ МЕЛАНА ДЛЯ ПРУЖНОЇ СМУГИ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ ПІДСИЛЕННОЮ ПРУЖНОЮ НАКЛАДКОЮ

УДК 539.3

В даній статті в рамках лінеаризованної теорії пружності досліджується вплив пружних переміщень і напружень для пружної смуги з початковим (залишковим) напруженням від дії зосередженої вертикальної сили. Всі дослідження виконані для стисливих і нестисливих тіл у випадку пружних потенціалів довільної структури в загальному вигляді для теорії великих (кінцевих) початкових деформацій.

Ключові слова: лінеаризована теорія пружності, початкові (залишкові) напруження, контактні задачі, інтегральні перетворення Фур'є.

Вступ

Наявність початкових напружень позначається на всьому напружено деформівному стані тіл, тому може впливати на міцність конструкцій, призводити до внутрішньої втрати стійкості, сприяти локальному руйнуванню матеріалу. Врахування залишкових напружень при розрахунках елементів конструкцій, машин і споруд дає можливість більш ефективно врахувати міцності ресурси матеріалів шляхом правильної оцінки запасів міцності. Дослідження впливу початкових (залишкових) напружень стали активно проводитися в нашій країні і за кордоном лише в кінці XX століття. Необхідно відзначити, що в загальному випадку, строга постановка таких задач вимагає залучення апарату нелінійної теорії пружності, що сильно ускладнює побудову аналітичних розв'язків.

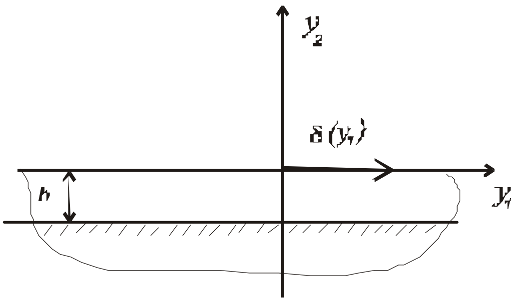

Рис. 1 – Контактна взаємодія попередньо напруженої смуги з стрингером під дією горизонтальної сил

Однак, за умови великих початкових напружень (деформацій) можна обмежитися розглядом лінеаризованної теорії пружності [1]. В дійсній статті в рамках лінеаризованної теорії пружності викладається постановка і розв`язок задачі про контактну взаємодію пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями з скінченною накладкою (стрингером), в випадку дії на неї горизонтальної зосередженої сили (аналог задачі Мелана).

Всі дослідження виконані для стисливих і нестисливих тіл у випадку пружних потенціалів довільної структури в загальному вигляді для теорії великих (кінечних) початкових деформацій. Для переходу до різних варіантів теорії малих початкових деформацій необхідно ввести спрощення, зазначене в [1].

Мета і постановка задачі

Метою даної роботи є продовження подальшого розвитку теорії контактної взаємодії пружних накладок з попередньо напруженою смугою. В результаті дії на пружну накладку зосередженої горизонтальної сили, з'ясувати впливу початкових (залишкових) напружень на закон розподілу контактних зусиль під підкріплюючими елементами по лінії безпосереднього контакту. У випадку деяких пружних потенціалів найпростішої структури провести чисельні розрахунки і побудувати графіки.

Виклад матеріалів досліджень

Граничні умови і вихідні співвідношення. Нехай на тонку пружну нескінчену накладку діє тільки горизонтальна зосереджена сила $q_0(y_1) = Q\delta(y_1)$, що є аналогом відомої задачі Мелана [4] для півплощини лінійної теорії пружності. Таким чином, використавши розв'язок задачі про розподіл тангенціальних контактних напружень, викликаних від дії горизонтальної зосередженої сили P в пружній смузі з початковими (залишковими) напруженнями. Врахувавши закон розподілу компонент вектора переміщення і тензора деформації в внутрішніх точках пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями від дії зосередженої тангенціальної сили, прикладеної до пружної смуги. Поклавши в формулах [2, 3] $\alpha_0 = 0,\ n_0 = 0$, одержимо наступні вирази для компонент вектора переміщень і тензора деформацій:

$$u_1(y_1,z_1)=-\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(m_0\left(\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}}\right)+\bar{s}_1\zeta\right)-\xi_5\left(\bar{s}_1\zeta+\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}}\right)\right)\right)ch\alpha z_1+\right.$$

$$+m_0\left(\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}}\right)+\bar{s}_1\zeta\right)\cdot\alpha z_1 sh\alpha z_1+\alpha z_1\left((m_0-\xi_5)ch^2\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}}\right)+m_0\varphi_1^2\right)\cdot\frac{sh\alpha z_1}{\alpha z_1}+$$

$$\left.+\left(m_0ch^2\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}}\right)-\xi_2sh^2\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}}\right)-\xi_5\right)ch\alpha z_1\right]\cdot\Delta_1^{-1}(\alpha)\cdot e^{-i\alpha y_1}d\alpha, \tag{1}$$

$$u_2(y_1,z_1)=-\frac{m_1}{2\pi\sqrt{n_1}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\xi_2ch^2\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}}\right)+(\xi_2-\xi_5-\xi_2-s_1)sh^2\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}}\right)-\right.\right.$$

$$\left.-\xi_5s_1+m_0\varphi_1^2\right)\cdot ch\alpha z_1+\left(m_0ch^2\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}}\right)-\xi_2sh^2\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}}\right)-\xi_5\right)(\alpha z_1)sh\alpha z_1+\alpha z_1\times$$

$$\left.\times\left(\left(m_0ch^2\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}}\right)-\xi_2sh^2\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}}\right)-\xi_5\right)ch\alpha z_1\right)\right]\cdot\xi_1^{-1}(\alpha)\cdot e^{-i\alpha y_1}d\alpha, \tag{2}$$

$$Q_{22}(y_1,z_1)=\frac{c_{44}(1+m_1)l_1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\alpha\left[m_0\left(\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}}\right)+\bar{s}_1\zeta\right)(\alpha z_1)sh\alpha z_1+\alpha z_1\left(m_0\varphi_1^2+\xi_5\bar{s}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\xi_2\bar{s}sh^2\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}}\right)\right)\cdot\frac{sh\alpha z_1}{\alpha z_1}+\left(m_0ch^2\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}}\right)-\xi_2sh^2\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}}\right)-\xi_5\right)\cdot ch\alpha z_1\right]\cdot\Delta_1^{-1}(\alpha)\cdot e^{-i\alpha y_1}d\alpha, \tag{3}$$

$$Q_{21}(y_1,z_1)=\frac{-ic_{44}(1+m_1)}{2\pi\sqrt{n_1}}\int_{-\infty}^{\infty}\alpha\cdot\left[m_0\left(\xi_1(\alpha)ch\alpha z_1+\left(ch^2\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}}\right)-S_1sh^2\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}}\right)-s\right)\right)\cdot(\alpha z_1)sh\alpha z_1+\right.$$

$$\left.+\alpha z_1\left(\left(\bar{s}_1\zeta+\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}}\right)\right)(\xi_4-\xi_5)\right)\frac{sh\alpha z_1}{\alpha z_1}+m_0\left(\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}}\right)-ch\alpha z_1\right)\right]\cdot\xi_1^{-1}(\alpha)\cdot e^{-i\alpha y_1}d\alpha. \tag{4}$$

для $n_1\neq n_2$, $(\alpha_0=0)$

$$u_1(y_1,z_1)=\frac{-i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}m_0\left[\left(-ss_1\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}}\right)\zeta_2-s\zeta_3\right)ch\alpha z_1+\left(s_1\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}}\right)\zeta_2+\zeta_3\right)\times\right.$$

$$\times ch\alpha z_2+\alpha z_1\left(\left(-s_1ch\left(2\cdot\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_2}}\right)\right)+ss_1\zeta_1+s\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}}\right)\zeta_4\right)sh\alpha z_1+\left(s\varphi_1^2sh^2\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}}\right)-sch^2\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}}\right)-s_1\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}}\right)\zeta_4+\zeta_3\right)\frac{sh\alpha z_2}{\alpha z_1}\right]\Delta_2^{-1}(\alpha)\cdot e^{-i\alpha y_1}d\alpha, \tag{5}$$

$$u_2(y_1,z_1)=\frac{m_1}{2\pi\sqrt{n_1}}\int_{-\infty}^{\infty}m_0\left[\left(-s_1ch\left(2\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_2}}\right)\right)+ss_1\zeta_1+s\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}}\right)\zeta_4\right)ch\alpha z_1+\right.$$

$$+\left(s\varphi_1^2 sh^2\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}}\right)-sch^2\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}}\right)-s_1\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}}\right)\zeta_4+\zeta_3\right)s_1 ch\alpha z_2+\alpha z_1\Big(\big(-ss_1\times$$

$$\times\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}}\right)\zeta_2-s\zeta_3\big)sh\alpha z_1+\left(s_1\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}}\right)\zeta_2+\zeta_3\right)s\,\frac{sh\alpha z_1}{\alpha z_1}\Big)\Big]\cdot\Delta_2^{-1}(\alpha)\cdot e^{-i\alpha y_1}d\alpha, \qquad (6)$$

$$Q_{22}(y_1,z_j)=\frac{c_{44}(1+m_1)l_1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\alpha m_0\left[\left(-ss_1\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}}\right)\zeta_2-s\zeta_3\right)ch\alpha z_1+\left(s_1\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}}\right)\zeta_2+\zeta_3\right)\times\right.$$

$$\times\, sch\alpha z_2+\alpha z_1\left(\left(-s_1ch\left(2\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_2}}\right)\right)\right)+ss_1\zeta+s\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}}\right)\zeta_4\right)sh\alpha z_1+\Big(s\varphi_1^2 sh^2-$$

$$\left.-sch^2\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}}\right)-s_1\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}}\right)\zeta_4+\zeta_3\Big)\cdot s\,\frac{sh\alpha z_1}{\alpha z_1}\right)\Bigg]\cdot\Delta_2^{-1}(\alpha)\cdot e^{-i\alpha y_1}d\alpha, \qquad (7)$$

$$Q_{21}(y_1,z_j)=\frac{-i\cdot c_{44}(1+m_1)}{2\pi\sqrt{n_1}}\int_{-\infty}^{\infty}\alpha m_0\left[\left(-s_1ch\left(2\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_2}}\right)\right)+ss_2\zeta+s\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}}\right)\zeta_4\right)ch\alpha z_1+\right.$$

$$+\left(s\varphi_1^2 sh^2\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}}\right)-sch^2\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}}\right)-s_1\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}}\right)\zeta_4+\zeta_3\right)s_0ch\alpha z_1\left(\left(-ss_1\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}}\right)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\,\zeta_2-s\zeta_3\big)sh\alpha z_1+\left(s_1\left(-\frac{\alpha t}{\sqrt{n_1}}\right)\zeta_2+\zeta_3\right)s_0\,\frac{sh\alpha z_2}{\alpha z_1}\right)\Bigg]\cdot\Delta_2^{-1}(\alpha)\cdot e^{-i\alpha y_1}d\alpha. \qquad (8)$$

Для конкретних пружних потенціалів: гармонічного, Бартенєва – Хазановича, Трелоара згідно формул [2, 3] проведено розрахунки і побудовано графіки (рис. 2, 3, 4).

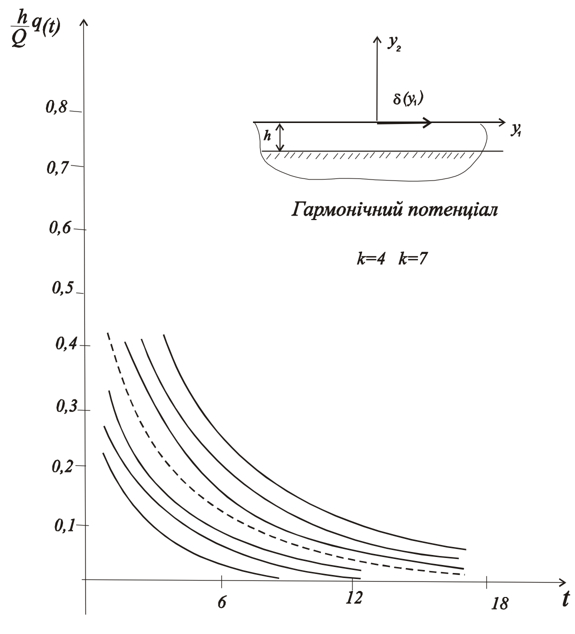

Рис. 2 – Кконтактна взаємодія під дією горизонтальної сили у випадку гармонійного потенціалу

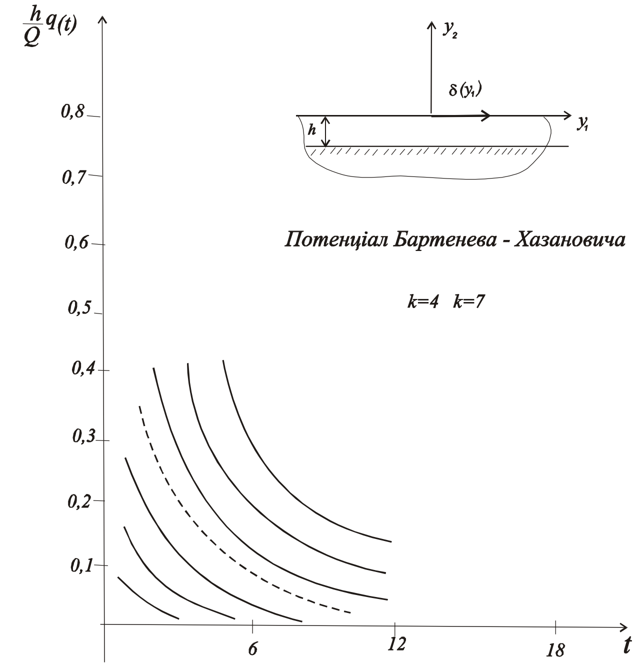

Рис. 3 – Контактна взаємодія під дією горизонтальної сили у випадку потенціалу Бартенєва- Хазановича

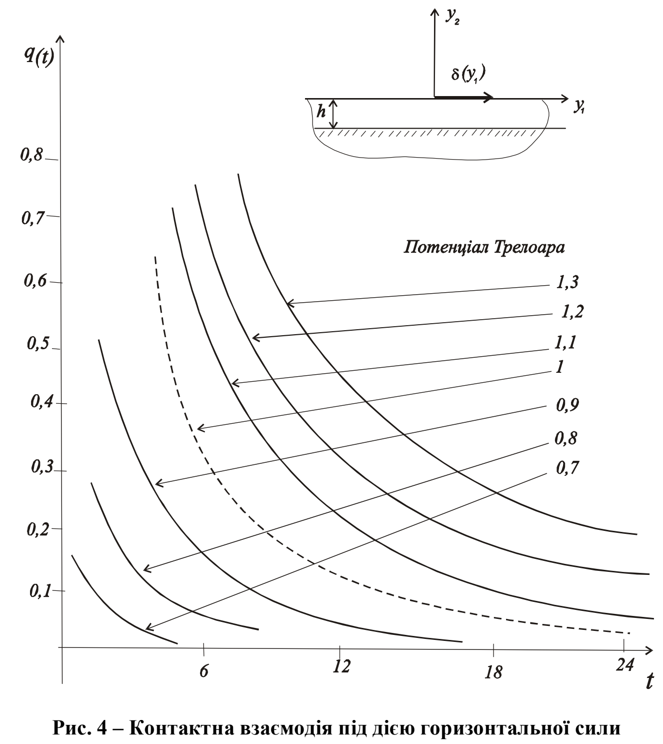

Рис. 4 – Контактна взаємодія під дією горизонтальної сили у випадку потенціалу Трелоара

Тут $\dfrac{h}{Q}q(t)$ – безрозмірні контактні тангенціальні напруження.

Значення:

λ_1 = 1 (на графіках пунктирна лінія) – відповідають класичній теорії пружності співпадає з результатам роботи [4];

λ_1 = 0,7; 0,8; 0,9 – відповідають початковим напруженням стиску;

λ_1 = 1,1; 1,2; 1,3 – відповідають початковим напруженням розтягу;

t – безрозмірна координата початкового напруженого стану в пружних смугах з початковими напруженнями.

Висновки

Дослідження представлені в статті дають можливість зробити узагальнені висновки, що до впливу початкових напружень на закон розподілу контактних зусиль під нескінченним стрингером.

1. В загальному випадку при рівних і нерівних коренях визначального рівняння [1] для розглядуваного в рамка лінеаризованої теорії класу задач сформульовано загальний метод їхнього розв'язування, що дає можливість отримати розв'язок поставлених задач, якщо відомий розв'язок аналогічних лінійних (без початкових напружень) задач.

2. Контактні напруження по лінії контакту з стрингером суттєво залежать від початкових напружень. Більш суттєвий вплив кількісного характеру початкових напружень проявляється в високо еластичних матеріалах порівняно з більш жорсткими матеріалами. Якісний вплив має аналогічний характер.

3. При наближені початкових напружень до значення, що відповідає поверхневої нестійкості, виникають явища « резонансного» характеру, які полягають в тому, що напруження і переміщення в області контакту різко змінюють свої величини, а пружні смуги з початковими напруженнями перебувають в стані нейтральної рівноваги.

Література

1. Гузь А.Н. Контактна взаємодія тіл з початковими напруженнями / А.Н. Гузь, С.Ю. Бабич, В.Б Рудницький // Вища школа. К., 1995. – 305 с.

2. Дихтярук Н.Н. О равновесии полосы с начальными напряжениями, усиленной упругими накладками / Н.Н. Дихтярук // Прикладная механика. – 2004. – № 3. – С. 63 – 70.

3. Дихтярук Н.Н. , Рудницкий В.Б. Упругая полоса с начальными напряжениями, усиленная упругими накладками / Н.Н. Дихтярук , В.Б. Рудницкий // Прикл. механика. – 2002. – № 11. – С. 81 – 88.

4. Melan E., Ein Beitrag zur Theorie geschweiss der Verbindungen. Ingenieur Archiv, 1932, Bd.3,Negt 2. s 126-128.

Надійшла в редакцію 02.03.2018

Dikhtyaruk N.N., Poplavska O.A. **Analog of melan problems for elastic mixture with initial influences with diagnostic lubrication.**

The article is devoted problems of contact interaction of infinite elastic stringer and clamped along one of prestressed strip. The study was performed in the framework of linearized of elasticity theory in a General form for the theory of large (finite) initial deformations and two variants of the theory of small initial deformations with arbitrary structure of elastic potential. The study is carried out in the coordinates of the initial strain associated with Lagrangian coordinates (the natural state). In addition, it is assumed that the interaction with the stringer occurs after the bands appeared, the initial tension and the external load caused in the bands small perturbation of the basic stress strain state.

Based on the assumption that the stringers are loaded at the same time horizontal forces, a fair model of the bending beam in combination with horizontal tension rod, the problem is formulated mathematically as a system of integral-differential equations relative to the unknown contact stresses. Using Fourier transforms, the system is solved in closed from. Expressions of the stresses are represented by Fourier integrals rather simple structure. The influence of initial stresses on the distribution of the contact stresses and the identified effects of concentrated loads.

Key words: linear elasticity theory, initial (residual) stresses, contact problems, integral Fourier transformations.

References

1. Huz A.N. Kontaktna vzaiemodiia til z pochatkovymy napruzhenniamy. A.N. Huz, S Iu. Babych, V.B Rudnytskyi. Vyshcha shkola. K., 1995. 305s.

2. Dihtyaruk N.N. O ravnovesii polosyi s nachalnyimi napryazheniyami, usilennoy uprugimi nakladkami. N.N. Dihtyaruk. Prikladnaya mehanika. 2004. № 3. S. 63 – 70.

3. Dihtyaruk N.N., Rudnitskiy V.B. Uprugaya polosa s nachalnyimi napryazheniyami, usilennaya uprugimi nakladkami. N.N. Dihtyaruk , V.B. Rudnitskiy. Prikladnaya mehanika. 2002. № 11. S. 81 – 88.

4. Melan E., Ein Beitrag zur Theorie geschweiss der Verbindungen. Ingenieur Archiv, 1932, Bd.3, Negt 2. s 126-128.