

МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОСОБЛИВОСТІ ТЕРТЯ ПРИ ПЕРЕХОДІ ВІД ЗЧЕПЛЕННЯ ДО
ПРОКОВЗУВАННЯ (ОГЛЯД)

Розглядається особливості статичного тертя та момент переходу у ковзання. Систематизовані теоретичні і експериментальні труднощі для моделювання знакозмінного руху при малих мікро переміщеннях. Описані сучасні моделі статичного тертя з врахуванням всіх особливостей квазістатичного тертя.

Вступ

В умовах малоамплітудного фретингу швидкість мікропроковзування поверхонь є дуже малою навіть при великих частотах коливань. Так при гармонічному законі коливань з частотою 100 Гц і амплітуді відносних переміщень 10 мкм , максимальна швидкість проковзування $2\pi \text{ мм/с}$. Для імпульсних коливань, наприклад, у вигляді трикутника, швидкість для даних умов буде сталою і дорівнюватиме 1 мм/с . Такі малі відносні швидкості разом з малими мікро переміщеннями мають принципові особливості, які впливають на загальну картину фретинг-процесів у номінально — нерухомому фрикційному контакті (ННФК). Для розуміння природи фретингу, умов його ініціювання та подальшої еволюції контакту необхідно врахувати наступні ключові моменти:

- залежність тертя від відносної швидкості;
- ефект пам'яті при терті або часове запізнення критичної амплітуди проковзування;
- невизначеність або багатозначність сил тертя при нульовій швидкості;
- час перебування контакту в умовах статичного тертя;
- попереднє зміщення поверхонь.

Графічне зображення найбільш суттєвих особливостей малих швидкостей проковзування показано на рис. 1.

Сила тертя взагалі може змінювати своє значення в широких границях і залежить від відносної швидкості ковзання та часом перебування у статичному стані або спокою. Перша особливість, як правило, характеризується падаючою характеристикою тертя (на рис. 1, а $Q = f(\dot{Q})$), друга характеризує тертя статичне (рис. 1, б), яке залежить від часу тривання спокою, яке передує ковзанню.

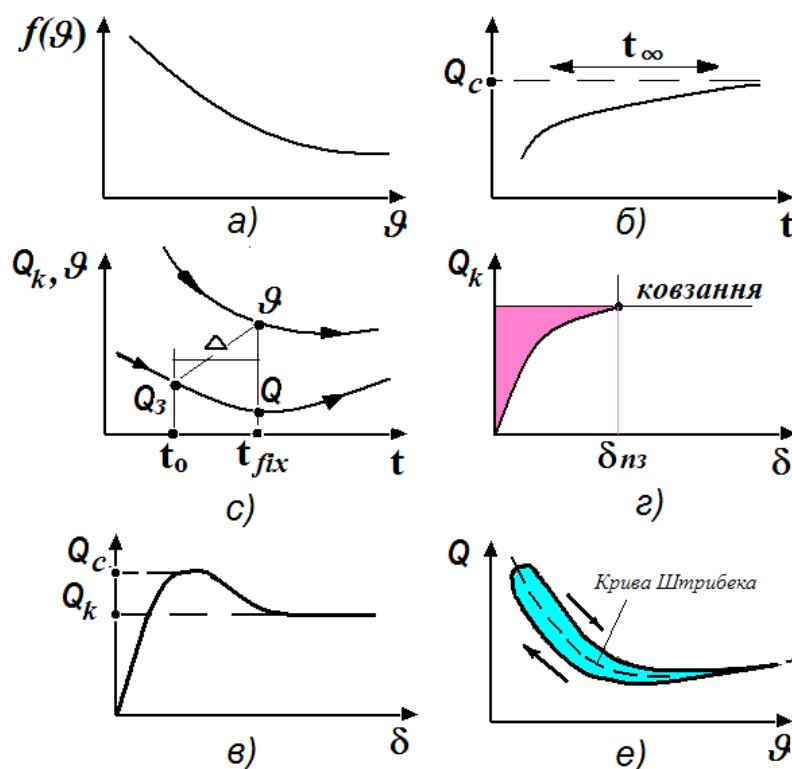


Рис. 1. Особливості моделювання фрикційної системи з малими швидкостями проковзування

Ефект пам'яті тертя або часове затримання схематично пояснюється на рис. 1, с. У фіксований момент часу t_{fix} відносній швидкості ϑ повинна відповідати сила тертя Q . Насправді, сила тертя Q_3 запізнюється на деякий час Δ . В експерименті цей ефект проявляється у виникненні гістерезисної петлі, яка показана на рис. 1, е. При ковзанні зміна сили тертя буде запізнюватись за змінами швидкості або навантаження. Сила тертя є меншою при зменшенні швидкості і більшою при її збільшенні.

Розміри площі петлі збільшуються із збільшенням нормального навантаження, в'язкості і частоти. Такі петлі в 1990 році отримав D. P. Hess і A. Soom [1]. Числові значення часових затримок зустрічаються у дуже не багатьох працях, що пов'язано з певними труднощами реалізації експерименту. В. Eriksson в 1991 році [2] отримав часові інтервали, протягом яких тіла знаходяться в стані повного зчеплення до моменту переходу в стан ковзання, а також вперше навів дані по часових затримках.

Попереднє зміщення характеризується залежністю $Q_K = f(\delta)$ (рис. 1, г) і при досягненні критичного значення відносного зміщення настає момент чистого ковзання. Значення $\delta_{нз}$ може приймати значення від долей мікрметра до величини переміщення центральної точки контакту в момент переходу від часткового проковзування до чистого зсуву контакту.

На сьогодні існує деяка невизначеність попереднього зміщення для структурного контакту, так як при визначеному зміщенні тіла в цілому, точки його контакту диференційовані. Одні точки знаходяться в стані зчеплення, тобто для них $\delta < \delta_{нз}$, інші перебувають у відносному ковзанні $\delta \geq \delta_{нз}$. Ця проблема на сьогодні є

не дослідженою. Відчувається також дефіцит експериментальних даних, які б дали числові значення мікро зміщень поверхонь при різних історіях навантаження контакту. Принципову залежність $Q_K = f(\delta)$ отримав в 1951 році Ernest Rabinowicz (рис. 1, в) [3]. Він показав, що сила, яка зсуває тіло одне відносно іншого проходить через максимум. Таке значення сили він назвав силою статичного тертя або рушійною силою тертя (break – away force). V. I. Johannes експериментально отримав залежність сили статичного тертя від швидкості зростання рушійної сили [4]. Вигляд цієї залежності показано на рис. 2 (а, б). подібний результат підтвердив у 1976 році R. S. H. Richardson [5].

Особливості моделювання статичного тертя.

Класичні моделі тертя складаються із функціональних залежностей різних параметрів, кожен з яких описує відповідні аспекти сили тертя. Головні тези полягають в тому, що будь – якому руху опирається сила тертя, її величина не залежить від швидкості і площі контакту. Це можна описати простим виразом:

$$Q = Q_c \text{sign}(\vartheta)$$

де сила тертя Q пропорційна нормальному навантаженню P : $Q_c = \mu P$

Наведено основні моделі статичного тертя (рис. 3)

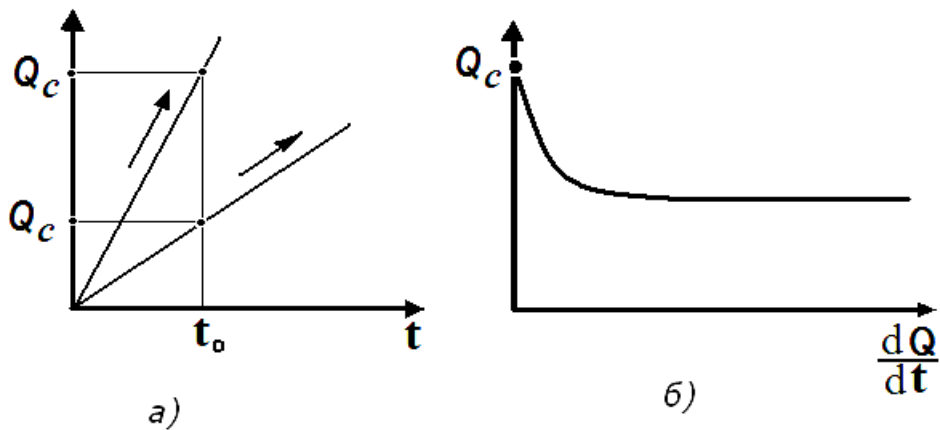


Рис. 2. Вплив швидкості зростання сили зсуву на максимальну силу тертя при якій контакт переходить в ковзаючий (а). Експериментальний вигляд цієї залежності (б) [3].

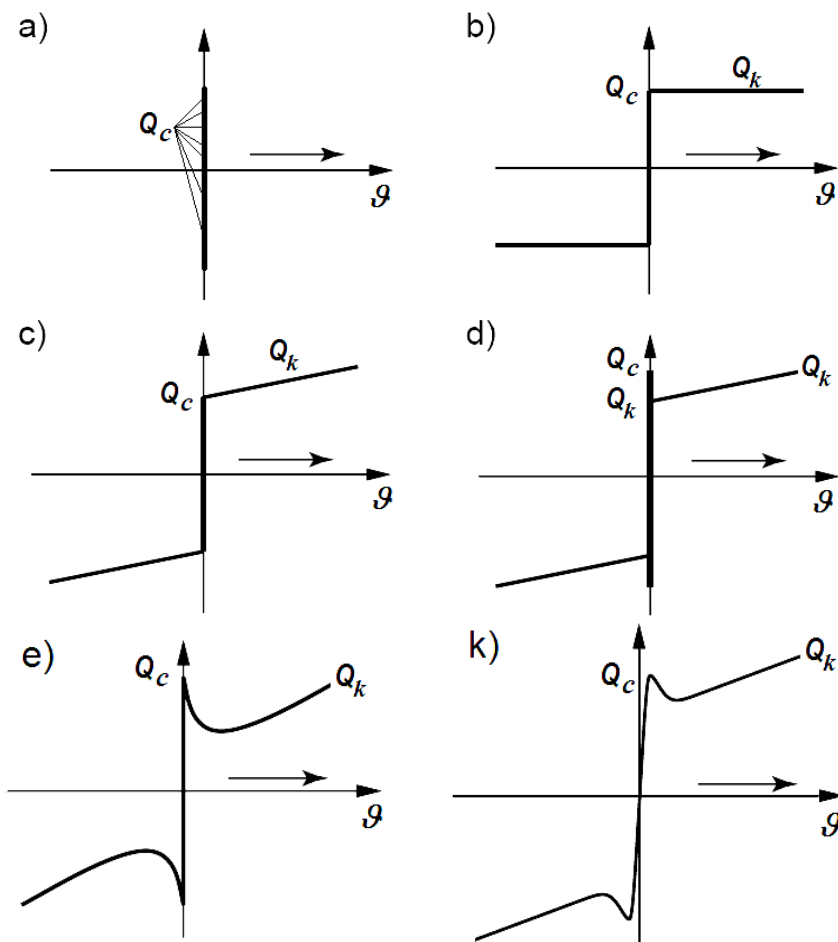


Рис. 3. Основні закони статичного тертя

- а) багатозначність тертя при $\mathcal{G} = 0$;
- б) закон Кулона;
- в) закон Кулона + в'язке тертя;
- г) стрибок сили тертя в момент зрушення + Кулонове тертя + в'язке тертя;
- е) гладкий закон переходу від статичного тертя до кінематичного (Штрибек ефект);
- к) неперервна модель тертя.

Для випадку відсутності відносного руху ($\mathcal{G} = \dot{x} = 0$) сила тертя може замінити будь – які значення, які за модулем менше статичного тертя (рис. 3, а). Якою би малою не була сила, що прикладається до тіла, перед тим як воно перейде до чистого ковзання будуть відбуватися мікрозміщення окремих ділянок номінальної площини контакту. В такому разі виникає черговий формальний парадокс: у відсутності відносної швидкості відбувається зміщення однієї поверхні відносно іншої.

Можливо слід звернутися до зонної моделі тертя і диференціювати фактичний контакт тіл та їх відносне зміщення, принаймні на деякій відстані від інтерфейсу. Тоді відносне зміщення фіксується як на частині контакту в режимі часткового проковзування, так і поза інтерфейсу, наприклад, зміщення центра мас двох тіл. Опосередковано були спроби визначення швидкостей проковзування в роботах М. Wang [6], який

оцінює швидкість мікропроковзування ~ 1 мм/с. Однак, цілісна картина, що об'єднує ці явища на сьогодні відсутня. В зв'язку з чим, розвиток та становлення теорії гістерезисного мікрозміщення, яка позбавлені формальних непорозумінь, тобто без врахування відносної швидкості, є цілком логічним. Класичний вигляд гістерезисних петель показані на рис. 4 для режиму попереднього зміщення (а) та повного проковзування (б). Якщо перше стосується моделі, зображеної на рис. 3,а, то для чисте ковзання описують решта моделей на рис. 3.

Враховуючи, що характерний розмір мікронерівності S по Рабиновичу [3] $\sim 1 \mu\text{m}$, то в роботі [7] була оцінена частота мікропроковзування в стані попереднього зміщення: $1/\nu \approx \frac{S}{g} \approx 10^{-3} \text{ c}$

Термін гістерезис, від старогрецької «затримка в прибутті», вперше ввів в 1882 році Ewing для опису явища феромагнетизму [8]. Залежно від умов навантаження, якості поверхонь та їх природи, попереднє зміщення може коливатися в широких границях: від кількох нанометрів до десятків мікрометрів [9]. Системні дослідження гістерезису при попередньому зміщенні системно відображені в роботах [10, 11] і більш пізніх працях [12,13].

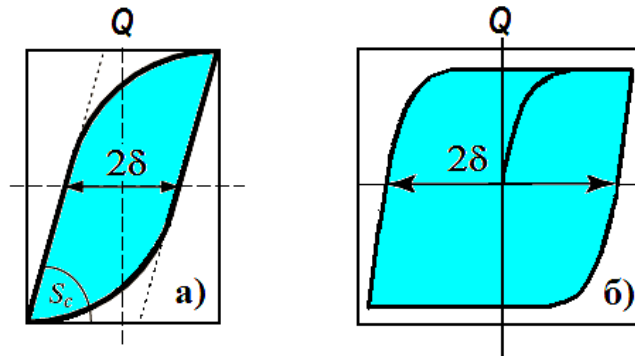


Рис. 4. Вигляд гістерезисних петель для часткового зчеплення поверхонь (а) і повного проковзування (б)

Закон Кулона (рис. 3,б) є найпростішим і більш розповсюдженим для визначення сили тертя при відносному проковзуванні поверхонь. Якщо знехтувати невизначеністю тертя на вертикальному відрізку графіка, то він цілком коректно описує тертя при великих амплітудах зміщення.

В XIX ст. в теорії гідродинаміки було введено поняття в'язкості змащення [14], а силовий компонент в умовах тертя залежно від швидкості ковзання – в'язкого тертя:

$$Q = k \cdot g,$$

де k - коефіцієнт в'язкого тертя.

В'язке тертя разом з Кулоновим представлено на рис. 3,с.

Найкраще експериментальні дані підтверджуються наступною нелінійною залежністю [15]:

$$Q = k|g|^\gamma \text{sign}(g), \gamma - \text{коефіцієнт який залежить від характеристик жорсткості поверхонь.}$$

Ще на початку XIX ст. А.І.Могін висловив думку, що сила статичного тертя є більшою за Кулонове [16]. Тому сила тертя описується системою:

$$Q = \begin{cases} Q_3 & \text{при } g = 0 \text{ та } |Q_3| < Q_C \\ Q_C \text{sign}(Q_3) & \text{при } g = 0 \text{ та } |Q_3| \geq Q_C \end{cases}$$

де Q_3 – зовнішня сила, що прикладається,

Q_C – максимальна статична сила.

Таким чином, сила тертя при $\nu = 0$ є функцією зовнішньої сили і не залежить від швидкості (рис. 3, d).

І в такій постановці функція тертя при зчепленні є багатозначною, яка приймає значення від $-Q_C$ до Q_C . Специфіка зчеплення веде до значних проблем у розв'язуванні рівнянь руху динамічних систем [17]. Це пояснюється складністю механізму зрушення контакту з місця. Перехід від Q_C до Q_K є комбінацією багатьох законів (рис. 1, рис. 3), які формалізувати в єдину залежність практично неможливо. Реальну модель можна побудувати тільки на основі експериментального визначення коефіцієнтів.

Експерименти R. S. H. Richardson й ін [5] свідчать, що для достатньо низького рівня зовнішньої сили, тертя відриву є константою і дорівнює статичному тертю. Термін «кінетичне тертя» загалом використовується як сила тертя в режимі ковзання. У випадку швидкозалежної сили тертя під час ковзання, кінетичне тертя називається тертям Кулона Q_K .

В 1902 році Штрибек показав, що сила тертя статичного падає до Кулонового тертя не миттєво, а у вигляді гладкої функції, яка залежить від швидкості [18]. Штрибек вивчав силу тертя для швидкостей стійкого стану у випадку тертя за наявності змащувального матеріалу. Для дуже великих швидкостей, сила тертя зростає зі швидкістю ковзання, як в'язке тертя. Для малих швидкостей, сила тертя спочатку зменшується, проходить мінімум, а потім збільшується при нижчих швидкостях. Ця сила тертя як функція для постійно зростаючої

швидкості називається кривою Штрибека (штрихова лінія на рис. 1,е). Найвідомішим і найчастіше цитованим явищем зумовленим тертям при вібраціях і механізмами зчеплення проковзування є від'ємний нахил кривої Штрибека, так званий Штрибек – ефект або тертя Штрибека (рис. 3,е).

Цей закон є більш загальним чим класичні моделі Амонтона-Кулона та в'язкого тертя:

$$Q = \begin{cases} Q(\dot{\vartheta}) & \text{якщо } \dot{\vartheta} \neq 0 \\ Q_3 & \text{якщо } \dot{\vartheta} = 0 \text{ та } |Q_3| < Q_c \\ Q_c \text{sign}(Q_3) & \text{в протилежному випадку} \end{cases}$$

де $Q(v)$ – деяка функціональна залежність сили опору руху від відносної швидкості. Довгий час використовується наступна нелінійна функція [19]:

$$Q(\dot{\vartheta}) = \text{sign}(\dot{\vartheta}) \left(Q_k + (Q_c - Q_k) e^{-\left| \frac{\dot{\vartheta}}{\dot{\vartheta}_s} \right|^{\delta_S}} \right) + k \dot{\vartheta}$$

де $Q(\dot{\vartheta})$ – крива Штрибека;

$\dot{\vartheta}_s$ – параметр, який називається Штрибек – швидкість;

δ_S – коефіцієнт форми кривої Штрибека.

Завдяки наданню деякого нахилу лінії зчеплення відносно горизонтальної осі, сила тертя буде визначена при будь – якому значенні швидкості (рис. 3,к). Це є вимушений, однак, ефективний спосіб чисельного моделювання швидкоплинних процесів в контактi. З іншого боку, з наближенням лінійних ділянок закону до горизонтальної вісі, тобто $v \approx 0$, дуже різко зростає час при комп'ютерній симуляції за рахунок зменшення кроку інтегрування [20]. Розглянемо найбільш важливі закони тертя при переході від статичного до кінематичного тертя.

Модель Karnopp [21].

Модель Karnopp дозволяє ефективніше мінімізувати невизначеність тертя в момент зчеплення поверхонь ($\dot{\vartheta} = 0$). Модель описує кульову швидкість як мінімально можливий інтервал $-\Delta\dot{\vartheta} < \dot{\vartheta} < \Delta\dot{\vartheta}$. Для швидкостей даного інтервалу система знаходиться в мертвій зоні, тобто ковзання не відбувається (рис. 5)

Аналiтично сила тертя описується виразом:

$$Q(\dot{\vartheta}, Q_3) = \begin{cases} Q_K \text{sign}(v) + k \cdot \dot{\vartheta} & (v < -\Delta\dot{\vartheta}) \\ \max(-Q_c, Q_3) & (-\Delta\dot{\vartheta} < \dot{\vartheta} < 0) \\ \min(+Q_c, Q_3) & (0 < \dot{\vartheta} < \Delta\dot{\vartheta}) \\ Q_K \text{sign}(v) + k \cdot \dot{\vartheta} & \end{cases}$$

Головна перевага моделі Karnopp – це ефективність при комп'ютерній симуляції. Недолік же полягає в тому, що система сильно залежить від другої складової сили тертя $f(Q_3)$, яке буде в стані зчеплення залежати від зовнішнього навантаження, яке в свою чергу є чинником багатьох показників реальної механічної системи. В диференціальних рівняннях це проявляється у нестійкості рішень у фазі зчеплення, що продемонстровано [20].

Так звана модель «перемикача» запропонована Leine [22], власне, є розширеною версією моделі Karnopp. «Перемикач» складається з системи трьох звичайних диференціальних рівнянь: одне описує фазу ковзання, друге – зчеплення і третє – фазу переходу від зчеплення до ковзання.

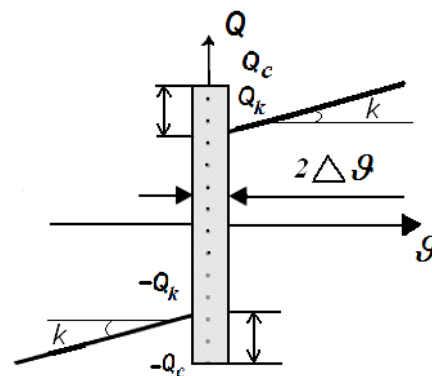


Рис. 5. Логічна схема моделі Karnopp

Модель В. Armstrong [19].

Для того, щоб наблизити феномологічні моделі тертя до тих, в яких реально спостерігаються динамічні властивості номінально – нерухомого контакту, В. Armstrong вводить часові залежності для зчеплення та Штрибек – ефекту. Тертя описується рівняннями:

$$\begin{cases} Q(x) = -cx, & \text{коли } v = \dot{x} = 0 \text{ (зчеплення)} \\ Q(\dot{x}, t) = \left(Q_K + Q_S(\gamma, t_2) \frac{1}{1 + \frac{\dot{x}(t - \tau_L)}{\dot{x}_K}} + k\dot{x} \right) \text{sign}(\dot{x}), & \text{коли } v = \dot{x} \neq 0 \text{ (ковзання)} \end{cases} \quad (2)$$

де

$$Q_C(\gamma, t_2) = Q_S + (Q_{S,\infty} - Q_{S,a}) \frac{t_2}{t_2 + \gamma} \quad (4)$$

Перше рівняння системи описує прямо пропорційну залежність сили опору контакту від зміщення. Друге рівняння – рівень тертя в момент початку відносного зміщення. Рівень статичного тертя Q_C складається при нульовій відносній швидкості протягом часу t_2 (час перебування у стані зчеплення). Тривалість t_2 дає, в свою чергу, значення максимальної сили зсуву в контактї. Q_{St} – значення сили опору при ковзанні в кінці періоду ковзання з врахуванням Штрибек – ефекту і \mathcal{Y} – емпіричний показник. Часова затримка τ_L враховує ефект пам'яті тертя. Таким чином, рівняння (2) описує попереднє зміщення з тангенціальною жорсткістю c , рівняння (3) – тертя Кулона, в'язке тертя, Штрибек – ефект з врахуванням ефекту пам'яті тертя після відносного зсуву, а (4) – максимальний рівень статичного тертя в момент миттєвого переходу до стану ковзання. Модель В. Armstrong ще називають «моделлю семи параметрів», які доречно навести окремо:

Q_C – Кулонове тертя,

$Q_{S,a}$ – значення тертя Штрибека в кінці періоду ковзання,

$Q_{S,\infty}$ – значення тертя Штрибека після тривалого знаходження контакту в спокої (або при повільному зростанні зовнішнього навантаження),

t_2 – час перебування в стані зчеплення,

c – тангенціальна жорсткість статичного контакту,

τ – ефект пам'яті тертя,

\mathcal{Y} – часовий параметр зростання статичного тертя,

Q_S – сила тертя при зсуві.

В оригінальному вигляді всі ці параметри ($Q_S, Q_{S,a}, Q_{S,\infty}, c, \tau, \mathcal{Y}$) крім t_2 в залежностях (2), (3), (4) називаються «моделлю семи параметрів». Тертя ковзання (4) подібне до статичної моделі (1), в якій до Штрибек – ефекту додається затримка в часі і часова залежність максимальної сили зсуву. Таким чином, ця модель також вимагає логічного оператора – перемикача на модель зчеплення або на модель ковзання. Автори констатують виникнення значних труднощів для коректного визначення початкових умов в кожен момент переходу зчеплення – проковзування і навпаки.

Реологічна модель статичного тертя Костогриза.

Костогриз запропонував одновірну модель квазістатичного в напруженнях і переміщеннях. Аналогічно явищу затримки тертя, Костогриз враховує властивість деформації контакту випереджувати зростання напруження в контактї. Останнє розглядається як результат мікроскопічного фрикційного проковзування в окремо взятих точках контакту [10]. Під час тангенціального навантаження відношення в умовах попереднього зміщення тангенціального напруження до сили тертя буде

$$\frac{\tau_i}{\rho_i \mu_i} < 1 \quad (5)$$

Автор виводить поняття коефіцієнту запасу сили тертя для i -го елемента

$$\lambda_i = \frac{\rho_i \mu_i}{\tau_i} \quad (6)$$

При $\lambda_{i=1}$ настає момент переходу контакту до чистого ковзання. Тоді рівняння статичного тертя буде наступним:

$$\begin{cases} \tau = \rho \mu \left[E - \frac{n}{\lambda \cdot (n+1)} E \frac{n+1}{n} \right] & \text{при } v = 0 \\ \tau = \rho \mu, & \text{при } v \neq 0 \end{cases} \quad (7)$$

де n – параметр пластичності контакту, який визначається з експериментальної залежності «напруження

– навантаження – розвантаження». Значення λ знаходиться в границях $0 < \lambda < e$ і визначається також через n : $\lambda = (n+1)^{\frac{1}{n}}$.

Аналогічно законам Armstrong і Karnopp можна зробити аналіз для даної моделі. Якщо, $\lambda \rightarrow 1$, тоді $n \rightarrow \infty$, що відповідає катастрофічному зростанню пластичної деформації, яка переходить до повного фрикційного проковзування і відповідає закону Кулона коли $\tau = \rho \cdot \mu$.

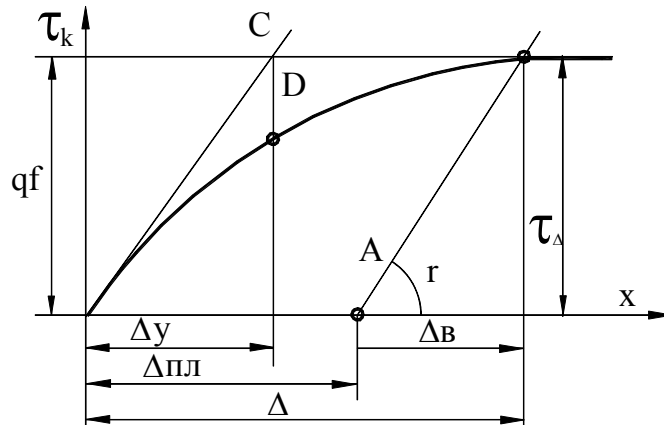


Рис. 6. Загальні співвідношення діаграми «напруження – деформація» для номінально нерухомого фрикційного контакту при статичному навантаженні [10].

В моделі Костогриза умова зчеплення рівноцінна умові $0 \leq E \leq E_{\max}$, де $E = \frac{x}{\Delta u}$ і є відношенням миттєвої деформації до пружної частини повного попереднього зміщення (рис. 6), а $E_{\max} = \frac{\Delta}{\Delta u}$ при переході до ковзання.

Таким чином, в даному огляді представлені сучасні моделі фрикційного контакту в умовах статичного тертя, попереднього зміщення, ковзання, Штрибек – ефекту і т.п. Кожна модель має свої недоліки і переваги залежно від мети їх застосування. В основному ці моделі розвивались для задач прецизійного позиювання в точній механіці, компенсації тертя, динаміки та робототехніці. Тільки окремі праці Костогриза [10], Fourty і Karsa [23,24] Berger [25], стосувалися практичної трибології фретингу в перехідних режимах.

Література

1. D. P. Hess and A. Soom., Friction at a lubricated line contact operating at oscillating sliding velocities // Journal of Tribology-1990. – P. 112, 147– 152.
2. Eriksson, B.. Optimal Force Control to Improve Hydraulic Drives // Damek Research Group, Dept. of Machine Design, KTH, Sweden-1996
3. Ernest Rabinowicz., The nature of the static and kinetic coefficients of friction // Journal of Applied Physics-1951- 22H111: 1373– 1379
4. V. I. Johannes, M. A. Green, and C. A. Brockley. The role of the rate of application of the tangential force in determining the static friction coefficient // Wear-1973-24: 381– 385
5. R. S. H. Richardson and H. Nolle. Surface friction under time-dependent loads // Wear- 1976-37: 87– 101
6. M. Wang Untersuchungen uber hochfrequente Kontaktschwingungen zwischen rauhen Oberflachen // Doctoral.Thesis -Technische Universitat Berlin -1994.
7. A J McMillan, A Non-Linear Friction Model For Self-Excited Vibrations // Journal of Sound and Vibration – 1997- 205 (3)-323-335
8. Visintin. On hysteresis in elasto-plasticity and in ferromagnetis // . Int. J. of non-linear mechanics-2002 – 37 -1283-1298
9. T. Prajogo. Experimental study of pre-rolling friction for motion-reversal error compensation on machine tool drive systems // Dept. Werktuigkunde Katholieke Universiteit Leuven, Leuven, -1999
10. Костогрыз С.Г. Механика вібраційного тертя в номінально – неподвижному фрикційному контакте. Дис.докт.техн.наук., Хмельницький, 1995.
11. D. D. Rizos and S. D. Fassois, Presliding friction identification based upon the Maxwell slip model structure // Chaos- 2004-v. 14- no. 2- pp. 431– 445.
12. F. Al-Bender, V. Lampaert, S. D. Fassois, D. D. Rizos, K. Worden, D. Engster, A. Hornstein, and U. Parlitz, Measurement and identification of pre-sliding friction dynamics // Nonlinear Dynamics of Production Systems. Weinheim: Wiley- 2004- pp. 349– 367.
13. J.Oh and D. S. Bernstein, Step convergence analysis of nonlinear feedback hysteresis models // Proc.

Amer. Contr. Conf., Portland, OR, -2005,-pp. 697- 702.

14. O. Reynolds. On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp Tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil // Phil. Trans. Royal Soc. — 1886-177:157— 234/

15. Д. Мур. Основы и применения трибоники. — Мир-1978.

16. A.J. Morin. New friction experiments carried out at Metz in 1831— 1833 // Proceedings of the French Royal Academy of Sciences, -1833-v 4,-p.1- 128

17. P. - A. Bliman and M. Sorine. Easy-to-use realistic dry friction models for automatic control // Proceedings of 3rd European Control Conference, Rome, Italy-1995. - P. 3788- 3794

18. R. Stribeck. Die wesentlichen Eigenschaften der Gleit- und Rollenlager- The key qualities of sliding and roller bearings // Zeitschrift des Vereines Seutscher Ingenieure- 1902-46H38,39I: 1342- 48,1432- 37

19. Armstrong-Нйлouvy. Control of Machines with Friction. Kluwer Academic Publishers, Boston, Ma - 1991.

20. Шалапко Ю.І. Вплив Штрибек ефекту на нелінійний осцилятор з сухим тертям при кінематичному збудженні // Вісник Технологічного університету — 2005. — № 1. — С. 35-43

21. Karnopp, Dean Computer Simulation of Stick-Slip Friction in Mechanical Dynamic Systems // Transactions of the ASME-1985- Vol. 107

22. Leine, R.I., van Campen, D.H., de Kraker, A., and van den Steen, L., Stick-Slip Vibrations Induced by Alternate Friction Models // Nonlinear Dynamics -1998-16. - P. 41-54

23. Fouvry, S., Kapsa, P., & Vincent, L. An elastic-plastic shakedown analysis of fretting wear // Wear-2001- 247(1)- 41-54.

24. Fouvry, S., Kapsa, P., & Vincent, L. Analysis of sliding behaviour for fretting loadings - determination of transition criteria // Wear- 1995 - 185 (1-2)- 35-46.

25. E.I.Berger Structural Dynamic Effects on Interface Response: Formulation and Simulation Under Partial Slipping Conditions Journal of Applied Mechanics 2000 - V. 67- Issue 4,-pp. 785-792

Надійшла 16.1.2007 р.