

СТІЙКІСТЬ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ЕКСЦЕНТРИСИТЕТІВ ГНУЧКИХ РОТОРІВ НА ОСНОВІ КОЕФІЦІЄНТІВ ВПЛИВУ

Горошко А. В., Ройзман В. П.

Хмельницький національний університет, Україна

E-mail: iftomm@ukr.net

Параметрична ідентифікація гнучкого ротора являє собою розв'язання оберненої задачі теорії коливань, коли за рухом динамічної системи, що спостерігається і фіксується, необхідно відновити сили, які викликають цей рух. В зв'язку з цим виникає питання про ідентифікованість динамічної системи, тобто про принципову можливість однозначного визначення векторів невідомих величин, а далі – про надійність ідентифікації, тобто про можливі помилки у визначенні цих величин через те, що часто об'єктивна властивість ідентифікованості не розкривається до кінця внаслідок недосконалості конкретних алгоритмів ідентифікації, що використовуються.

Розглянемо питання стійкості балансування в смислі коректності вибраного алгоритму ідентифікації або прийнятої динамічної моделі ротора, розуміючи під цим той факт, що малі зміни вхідних, отриманих експериментальним шляхом, параметрів, викликають незначні зміни значень дисбалансів або коректуючих мас, що ідентифікуються. Більш строго таке поняття стійкості можна визначити наступним чином. Нехай вхідні параметри a_1, a_2, \dots, a_n зв'язуються з шуканими x_1, x_2, \dots, x_k скалярним або векторним рівнянням виду $f(a_1, a_2, \dots, a_n, x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$.

Вибрана модель є стійкою, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що як тільки $\|\mathbf{A}\| < \delta$, то $\|\mathbf{X}\| < \varepsilon$, де \mathbf{X} - вектор з координатами x_1, x_2, \dots, x_k , \mathbf{A} - вектор з координатами a_1, a_2, \dots, a_n , знак $\|\cdot\|$ означає деяку норму вектора. Аналогічно визначається стійкість не по всім вхідним параметрам, а по одному з них або деякій їх групі, розуміючи під \mathbf{A} вектор, в якому всі координати, за винятком вибраних, є постійними величинами.

Через те, що в більшості відомих методах ідентифікації [1-3], необхідно розв'язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), актуальною проблемою є одержання максимально стійких і точних ідентифікованих даних, оскільки внаслідок некоректності

постановки оберненої задачі і, зокрема, поганої обумовленості СЛАР, можна отримати хибні результати. Розглянемо стійкість і точність ідентифікації ексцентриситетів гнучкого ротора при використанні статичних коефіцієнтів впливу, оскільки тут чіткіше проявляється фізична суть явища.

У роботах [4, 5] показано, що рух гнучкого ротора відносно системи координат, яка обертається разом з ним, одна із осей якої співпадає з віссю ротора, описується рівнянням Фредгольма II роду. Воно може бути с будь-якою наперед заданою точністю апроксимовано СЛАР [6], що означає можливість апроксимації ротора з довільним розподілом параметрів, ротором, що містить невагомий вал, який несе n дисків з масами m_i , і екваторіальними моментами інерції J_i , $i = \overline{1, n}$. Кожен з дисків внаслідок похибок виготовлення має радіальні ексцентриситети e_i і кутові ε_i , тобто відхилення вісі диску від осі, що проходить через центри інерції. При обертанні вал отримує прогини y_i і кути повороту y'_i (рис. 1).

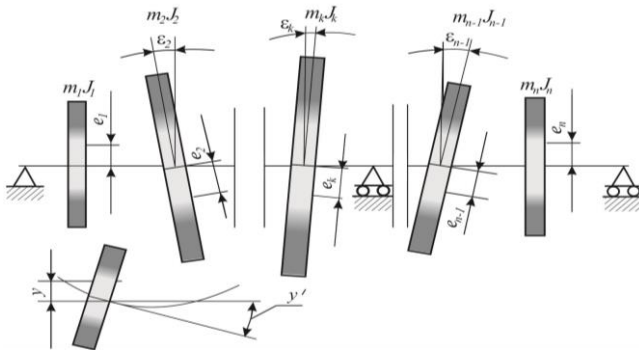


Рис. 1. Схема багатомасового ротора

Для наближеного розв'язання без врахування гіроскопічних моментів рівняння Фредгольма II роду замінюється матричним рівнянням виду

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}(\mathbf{Y} + \mathbf{e})\omega^2, \quad (1)$$

де $\mathbf{Y} = [y_i]_{1 \times n}$, $\mathbf{e} = [e_i]_{1 \times n}$, $\mathbf{A} = [a_{ik}]_1^n$.

В цьому рівнянні координатами вектора \mathbf{Y} є прогини вала ротора в місцях посадки дисків, вектора \mathbf{e} - ексцентриситети цих дисків, а елементи матриці \mathbf{A} являють собою добуток статичних коефіцієнтів впливу на маси відповідних дисків.

Описана модель ідентифікована, тобто існує її єдиний розв'язок, але ця вона буде мати практичне значення лише тоді, коли малі похибки, що виникають при зміні експериментально визначених величини, які входять у рівняння (1) у процесі його розв'язання, викличуть малі похибки при обрахунку ексцентриситетів, тобто коли модель є стійкою відносно вказаних факторів.

Нехай замість системи (1) в дійсності розв'язується система

$$\mathbf{Y} + \Delta\mathbf{Y} = (\omega^2 + \Delta\omega^2)(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})(\mathbf{Y} + \mathbf{e} + \Delta\mathbf{Y} + \Delta\mathbf{e}), \quad (2)$$

тобто всі члени вихідного рівняння мають деякі невідомі похибки, що залежать від точності контрольно-виміральної апаратури і, звичайно ж, ці похибки малі у порівнянні з вимірвальними величинами. Виділимо головний член похибки, віднімаючи від рівняння (2) рівняння (1) і нехтуючи членами другого і вище порядку малості.

$$\Delta\mathbf{Y} = \omega^2 \Delta\mathbf{A}(\mathbf{Y} + \mathbf{e}) + \Delta\omega^2 \mathbf{A}(\mathbf{Y} + \mathbf{e}) + \omega^2 \Delta\mathbf{A}\Delta\mathbf{Y} + \omega^2 \Delta\mathbf{A}\Delta\mathbf{e}.$$

Із рівняння (1) маємо $\mathbf{Y} + \mathbf{e} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Y}/\omega^2$. Після нескладних перетворень, маємо у довільній нормі

$$\|\Delta\mathbf{e}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}\| \cdot \|\Delta\mathbf{Y}\| + \|\mathbf{A}^{-1}\|^2 \cdot \|\Delta\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{Y}\|/\omega^2 + \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\Delta\omega^2\| \cdot \|\Delta\mathbf{Y}\|/\omega^4. \quad (3)$$

З (3) легко отримати

$$\mathbf{Y}/\omega^2 - \mathbf{A}\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{e}, \quad (\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A})\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{e}, \quad \mathbf{Y} = (\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}\mathbf{e}.$$

Тому $\|\mathbf{Y}\| \leq \|(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A})^{-1}\| \cdot \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{e}\|$. Звідси

$$\|\mathbf{e}\| \geq \|\mathbf{Y}\| / \|(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A})^{-1}\| \cdot \|\mathbf{A}\|. \quad (4)$$

Поділивши (3) на (4), отримаємо

$$\begin{aligned} \|\Delta\mathbf{e}\|/\|\mathbf{e}\| &\leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}\|^{-1} \left(\|(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A})^{-1}\| \|\Delta\mathbf{Y}\|/\|\mathbf{Y}\| + \|\mathbf{A}^{-1}\|^2 \|\mathbf{A}\|^2 \times \right. \\ &\times \left. \|(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A})^{-1}\| \|\Delta\mathbf{A}\|/\|\mathbf{A}\|/\omega^2 + \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{A}\| \|(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A})^{-1}\| \|\Delta\omega^2\|/\omega^2/\omega^2 \right) \end{aligned} \quad (5)$$

Відомо, що для довільної квадратної матриці \mathbf{A} добуток норми прямої матриці на обернену є її числом обумовленості $cond(\mathbf{A})$, тобто

$$cond(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}\|^{-1} \geq 1. \quad \text{Тому } \|(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A})\| \|(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A})^{-1}\| \geq 1, \text{ і}$$

$$\begin{aligned} \|\Delta\mathbf{e}\|/\|\mathbf{e}\| &\leq cond(\mathbf{A}) cond(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}) \|\Delta\mathbf{Y}\|/\|\mathbf{Y}\| + \\ &+ cond(\mathbf{A})^2 \left[cond(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}) / \|(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A})\| \right] \|\Delta\mathbf{A}\|/\|\mathbf{A}\|/\omega^2 + \\ &+ cond(\mathbf{A}) \left[cond(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}) / \|(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A})\| \right] \|\Delta\omega^2\|/\omega^2/\omega^2 \end{aligned} \quad (6)$$

В частинних випадках одержуються наступні верхні оцінки відносної похибки ексцентриситетів:

$$\|\Delta \mathbf{e}\|/\|\mathbf{e}\| \leq \text{cond}(\mathbf{A}) \cdot \text{cond}(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}) \cdot \|\Delta \mathbf{Y}\|/\|\mathbf{Y}\| \quad (7)$$

при $\Delta \mathbf{A} = 0$ і $\Delta \omega^2 = 0$,

$$\|\Delta \mathbf{e}\|/\|\mathbf{e}\| \leq \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{\text{cond}(\mathbf{A}) \text{cond}(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}) \cdot |\Delta \omega^2|}{\|\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}\|} \quad (8)$$

при $\Delta \mathbf{Y} = 0$ і $\Delta \mathbf{A} = 0$,

$$\|\Delta \mathbf{e}\|/\|\mathbf{e}\| \leq \frac{1}{\omega^2} \cdot [\text{cond}(\mathbf{A})]^2 \cdot \frac{\text{cond}(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}) \cdot \|\Delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}\|} \quad (9)$$

при $\Delta \mathbf{Y} = 0$ і $\Delta \omega^2 = 0$.

Співвідношення (7) виражає умову стійкості розрахункової моделі за прогином, (8) – за частотою обертання, а (9) – за властивостями матриці \mathbf{A} .

Із теорії матриць відомо, що число обумовленості матриці показує, у скільки разів відносна похибка результату може максимально перевищувати відносну похибку вихідної інформації. Вияснимо фізичний смисл чисел обумовленості матриць \mathbf{A} і $\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}$. Відомо [6], що число обумовленості матриці у евклідовій нормі може виражатись через відношення максимального і мінімального моделей її власних чисел, тобто $\text{cond}(\mathbf{A}) = \left(\max_i |\lambda_i| \right) / \left(\min_i |\lambda_i| \right)$, $\text{cond}(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}) = \left(\max_i |\mu_i| \right) / \left(\min_i |\mu_i| \right)$. Власні ж числа матриці знаходяться із умови рівності нулю визначника, в якому відсутня кутова швидкість

$$\det|\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E}| = 0, \quad (10)$$

де \mathbf{E} - одинична матриця.

Квадрати власних частот обертання описаної вище системи є коренями рівняння

$$\det|\omega_i^2 \mathbf{A} - \mathbf{E}| = 0. \quad (11)$$

Із порівняння рівнянь (10) і (11) видно, що $\lambda_i = 1/\omega_i^2$, $i = \overline{1, n}$. Тоді очевидно, що $\lambda_{\max} = 1/\omega_1^2$, $\lambda_{\min} = 1/\omega_n^2$. тому

$$\text{cond}(\mathbf{A}) \geq \omega_n^2 / \omega_1^2. \quad (12)$$

Отже, число обумовленості матриці \mathbf{A} оцінюється знизу відношенням квадратів максимальної і мінімальної власних частот

обертання даної дискретної моделі ротора. Природно, що чим більше розмірність n , тим точніше ця модель відповідає реальності, але тоді, як видно із (12), зростає і $cond(\mathbf{A})$, і, отже, похибка розв'язку. Отже, з одного боку, апроксимуючи реальний ротор великою кількістю зосереджених мас, ми наближаємо розрахункову схему до реальної конструкції і, відповідно, підвищуємо точність знаходження жорсткостей або коефіцієнтів впливу і всього розрахунку, а, з іншого боку, з ростом n збільшується число обумовленості матриці, тобто зростають похибки розрахунків. Вказане протиріччя є наслідком недосконалості алгоритму ідентифікації і ці міркування слід мати на увазі при обґрунтуванні допустимості описаної ідентифікації дисбалансів гнучких роторів і при врахуванні похибки даного способу балансування, підбираючи розумну з вказаної точки зору кількість дисків, що апроксимують реальний ротор. Це підкреслює той факт, що найбільш прийнятними і стійкими варіантами будуть відносно нескладні розрахункові моделі, які відрізняються тим, що в них використовуються отримані в результаті експериментів точні, еквівалентні даній розрахунковій схемі, значення параметрів: жорсткостей, мас, прогинів і т.д.

Розкриємо тепер фізичний зміст числа обумовленості матриці $\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}$. Маємо

$$\det|\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A} - \mu\mathbf{E}| = 0. \quad (13)$$

Рівняння (13) перетворюється до вигляду

$$0 = \det|\mathbf{A} + (\mu - 1/\omega^2)\mathbf{E}| = \det|\mathbf{A} - (1/\omega^2 - \mu)\mathbf{E}|. \quad (14)$$

Вище було отримано, що корені рівняння (14) мають вигляд $1/\omega^2 - \mu_i = 1/\omega_i^2 \quad \forall i = \overline{1, n}$. Звідси, $\mu_i = 1/\omega^2 - 1/\omega_i^2$ і

$$cond(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}) \geq \left(\max_i |\omega^{-2} - \omega_i^{-2}| \right) / \left(\min_i |\omega^{-2} - \omega_i^{-2}| \right) \quad (15)$$

Як видно, максимальне і мінімальне значення μ_i залежить від вибраної дискретної моделі, тобто кількості мас n , і від частоти обертання, на якій відбувається вимірювання і балансування.

Припускаючи, що $\omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \dots \leq \omega_n^2$, нерівність (15) можна уточнити наступним чином. Якщо $0 < \omega^2 < \omega_1^2$, що мабуть, бажано, то

$$|\omega^{-2} - \omega_i^{-2}| = \omega^{-2} - \omega_i^{-2}, \quad \forall i \in \mathbb{N}. \quad \text{Тоді } cond(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}) \geq \frac{\omega_n^2 - \omega^2}{\omega_1^2 - \omega^2} \cdot \frac{\omega_1^2}{\omega_n^2}.$$

У випадку $\omega_k^2 \leq \omega^2 \leq \omega_{k+1}^2$, модулі власних значень μ_i мають вигляд $|\mu_1| = \omega_1^{-2} - \omega^{-2}, \dots, |\mu_k| = \omega_k^{-2} - \omega^{-2}, |\mu_{k+1}| = \omega^{-2} - \omega_{k+1}^{-2}, |\mu_n| = \omega^{-2} - \omega_n^{-2}$. Очевидно, що $\max_i |\mu_i|$ може мати місце або про $i=1$, або при $i=n$, а $\min_i |\mu_i|$ на розглянутому інтервалі кутових швидкостей має місце або при $i=k$, або при $i=k+1$, причому $|\mu_k| < |\mu_{k+1}|$ при $1/\omega_k^2 - 1/\omega^2 \leq 1/\omega^2 - 1/\omega_{k+1}^2$, тобто при $\omega^2 < 2\omega_k^2 \omega_{k+1}^2 / (\omega_k^2 + \omega_{k+1}^2) = \delta_k$, в іншому випадку $|\mu_k| \geq |\mu_{k+1}|$.

Таким чином

$$\text{cond}(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}) \geq \left| \omega^{-2} - \omega_i^{-2} \right| / \left| \omega^{-2} - \omega_k^{-2} \right| \quad \text{при} \quad \omega_k^2 < \omega^2 < \delta_k, \quad i=1, \text{ або} \\ i=n, \quad \text{cond}(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}) \geq \left| \omega^{-2} - \omega_i^{-2} \right| / \left| \omega^{-2} - \omega_{k+1}^{-2} \right| \quad \text{при} \quad \delta_k < \omega^2 < \omega_{k+1}^2, \\ i=1, \text{ або} \quad i=n.$$

Тобто

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{cond}(\mathbf{A}) \text{cond}(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}) \geq \frac{|\omega_i^2 - \omega^2|}{|\omega_k^2 - \omega^2|} \cdot \frac{\omega_k^2}{\omega_i^2} \cdot \frac{\omega_n^2}{\omega_1^2} = \gamma \quad \text{при} \quad \omega_k^2 < \omega^2 < \delta_k, \quad i=1 \text{ або} \quad i=n, \\ \text{cond}(\mathbf{A}) \text{cond}(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}) \geq \frac{|\omega_i^2 - \omega^2|}{|\omega_{k+1}^2 - \omega^2|} \cdot \frac{\omega_{k+1}^2}{\omega_i^2} \cdot \frac{\omega_n^2}{\omega_1^2} = \gamma \quad \text{при} \quad \delta_k < \omega^2 < \omega_{k+1}^2, \quad i=1 \text{ або} \quad i=n. \end{array} \right. \quad (16)$$

Графік залежності $\gamma = \text{cond}(\mathbf{A}) \text{cond}(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A})$ від ω^2 (рис.

2) показує, що найменш стійкими ділянками частот обертання при балансуванні є області поблизу критичних частот. Найбільш стійкою вибрана модель буде при кутових швидкостях, що визначаються виразом $\omega = \omega_k \cdot \omega_{k+1} \sqrt{2 / (\omega_k^2 + \omega_{k+1}^2)}$. Більш того, алгоритм ідентифікації і метод балансування тим стійкіші, чим більше гнучкість ротора. Дійсно, розглянемо швидкість зростання γ , наприклад, у до критичній ділянці кутових швидкостей обертання ротора.

$$\frac{d\gamma}{d\omega^2} = \frac{\omega_n^2 - \omega_1^2}{(\omega_1^2 - \omega^2)^2} = \frac{\omega_n^2 / \omega_1^2 - 1}{(\omega_1^2 - \omega^2)^2} \cdot \omega_1^2 > 0,$$

Тобто чим менше співвідношення ω_n^2 / ω_1^2 , або чим більше гнучкість ротора, тим меншою є швидкість зростання похибки і навпаки – чим жорсткіше ротор, тим швидше зростає похибка

розрахунку з зростанням частоти обертання при балансуванні і наближенням її до критичної, що продемонстровано на рис. 3.

Формули (7-9) дають можливість вирішення деяких чисто практичних задач, зокрема за формулою (7), якщо заданий клас точності балансування ротора, яким визначається величина $\Delta e/e$ і обрана розрахункова модель, а, отже, $cond(\mathbf{A})cond(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A})$, можна знайти $\Delta \mathbf{Y}/\mathbf{Y}$, тобто відносну похибку апаратури для вимірювання прогинів і підібрати підходящу апаратуру.

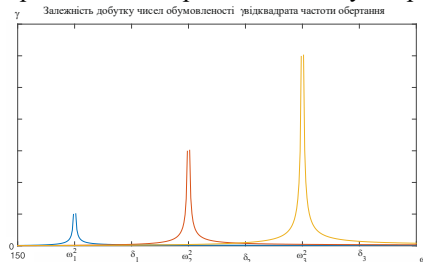


Рис. 2. Залежність добутку чисел обумовленості від квадрата частоти обертання при балансуванні

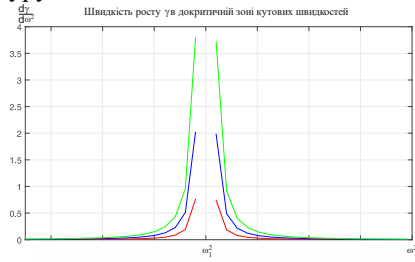


Рис. 3. Швидкість росту похибки ідентифікації для різних значень ω_n^2/ω_1^2

Якщо ж є вимірювальна апаратура і вибрана модель ротора, можна визначити можливу точність балансування.

Нарешті, якщо заданий клас точності балансування і є апаратура для вимірювання прогинів, можна знайти ту розрахункову модель, яка б забезпечила виконання необхідної точності балансування. Це ж відноситься і до формул (8) і (9), де мова йде відповідно про вимірювання частоти обертання і обладнання для вимірювання статичних коефіцієнтів впливу.

Рівняння, яке описує рух гнучкого ротора з врахуванням гіроскопічних сил в матричній формі може бути записане в тому ж вигляді, що і без врахування гіроскопії, тобто у вигляді (1), де тепер вектор-стовпець \mathbf{Y} містить не тільки прогин, але і кут повороту \mathbf{Y}' , тобто $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n]^T$, а вектор-стовпець \mathbf{e} - і радіальні e , і кутові ε - ексцентриситети $\mathbf{e} = [e_1, e_2, \dots, e_n, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n]^T$.

Розв'язок цього рівняння, як і раніше, має вигляд $\mathbf{e} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A})\mathbf{Y}$, але розв'язуючи рівняння (11), можна отримати в 2 рази більше коренів, ніж без врахування гіроскопічного моменту, і таким чином, врахування гіроскопії збільшує число обумовленості

матриці і похибку ідентифікації ексцентриситетів, і цю обставину необхідно мати на увазі при виборі динамічної моделі.

Список використаних джерел

1. Костюк А. Г. Динамика и прочность турбомашин / А. Г. Костюк. – 3-е изд. – М.: Издательский дом МЭИ, 2007. – 476 с.
2. Добрянский Т.В. Динамика авиационных ГТД / Т.В. Добрянский, Т.С. Мартянова – М: Машиностроение, 1989. – 240 с.
3. Воробьев Ю.С. Исследование колебаний систем элементов турбогенераторов / Ю.С. Воробьев, Н.Г. Шульженко – К: Наук. Думка, 1976. – 135 с.
4. Ройзман В.П. Динамика и уравнивание упруго-деформируемых роторов ГТД / В.П. Ройзман – Сб. «Динамика гибких роторов», Изд. «Наука», М., 1972
5. Левит М.Е. Основы балансировочной техники. Том 2. Уравнивание гибких роторов и балансировочное оборудование / М.Е. Левит, В.П. Ройзман, и др. Под ред. В.А. Щепетильникова. - М.: Машиностроение, 1975. – 679 с.
6. Бахвалов Н.С. Численные методы: Анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков - М.: Наука, 1973. - 631 с.