Романюк В.В.
Хмельницький національний університет,
м. Хмельницький, Україна

МОДЕЛЮВАННЯ ДІЇ НОРМОВАНОГО ОДИНИЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА ТРИ КОЛОНИ ОДНАКОВОЇ ВИСОТИ У БУДІВЕЛЬНІЙ КОНСТРУКЦІЇ І ЗНАХОДЖЕННЯ ОПТИМАЛЬНОЇ ПЛОЩІ КОЖНОЇ ОПОРИ

Постановка проблеми дослідження

Розрахунок стійкості та оптимізація будівельних конструкцій є надактуальною задачею прикладної математики. Існує задача оптимального використання будівельних ресурсів у конструкції, що складається з декількох елементів однакової геометричної форми, на які діє відоме навантаження. Втім, це навантаження розподіляється не обов'язково рівномірно на елементи конструкції, форма яких є найпростішою і, зокрема, має вид циліндричних або призматичних стержнів. Надалі умовно будемо вважати, що елементами будівельної конструкції, на яку діятиме нормоване одиничне навантаження, є колони однакової висоти і, взагалі кажучи, різного діаметру. Слушним буде зауважити, що за нормоване одиничне навантаження прийматиметься максимально можливе або допустиме нормоване навантаження на опори (колони) конструкції. У цій роботі розглядатимемо задачу оптимального використання будівельного матеріалу, з якого виготовляють колони, що у мінімальній своїй кількості слугують опорами. Ця кількість, зрозуміло, дорівнює трьом.

Наявні публікації з представленою задачею

Виявляється, що ефект стискаючого зусилля або навантаження, що діє на опори, можна моделювати за допомогою антагоністичної гри. В [1, с. 144] наведено формулу для обчислення частки від граничного навантаження на i-й елемент будівельної конструкції з площею поперечного перерізу y_i, на який діє стискаюче зусилля x_i. За згаданою формулою ця частка:

$$T_i\left(x_i,\, y_i\right) = \beta\,\frac{x_i}{y_i^2}\,, \tag{1}$$

де β є коефіцієнтом, куди включено механічні властивості матеріалу колони. Використовуючи (1), можна побудувати антагоністичну гру, де першим гравцем виступатимуть випадкові явища, що зумовлюють не обов'язково рівномірний розподіл одиничного нормованого навантаження на три опори конструкції. Другим гравцем у майбутній грі буде проектувальник, перед яким стоятиме задача вибрати площу поперечного перерізу кожної з трьох колон так, щоб мінімізувати максимально можливий дисбаланс у навантаженні на опори. Але тут необхідно зауважити, що саме обмеження по верхньому значенню площі поперечного перерізу кожної колони або обмеження по сумарній кількості наявного матеріалу, з якого виготовляють опори, і породжує антагоністичну гру [2].

Формулювання мети розпочатого дослідження

Нехай $\left[a_i;\, b_i\right] \subset \left[0;\, 1\right]$ є сегментом усіх можливих нормованих навантажень, які можуть стискувати i-ту колону. Тоді $x_1 \in \left[a_1;\, b_1\right]$ та $x_2 \in \left[a_2;\, b_2\right]$, а $x_3 = 1 - \left(x_1 + x_2\right)$. Сумарну площу поперечних перерізів трьох колон теж віднормуємо й отримаємо $y_1 \in \left[a_1;\, b_1\right]$, $y_2 \in \left[a_2;\, b_2\right]$, а $y_3 = 1 - \left(y_1 + y_2\right)$. Зауважимо, що тут мають місце умови:

$$0 < a_1 < b_1 < 1\,,\ 0 < a_2 < b_2 < 1\,,\ b_1 + b_2 < 1 \tag{2}$$

як наслідок зазначених строгих включень в одиничний сегмент, а також того, що навантаження на третю колону не може бути недодатним. Ядром відповідної антагоністичної гри є гіперповерхня:

$$T\left(\mathbf{X},\, \mathbf{Y}\right) = T\left(x_1,\, x_2;\, y_1,\, y_2\right) = \max\left\{\beta\,\frac{x_1}{y_1^2},\, \beta\,\frac{x_2}{y_2^2},\, \beta\,\frac{1 - x_1 - x_2}{\left(1 - y_1 - y_2\right)^2}\right\} =$$

$$= \beta \max\left\{\frac{x_1}{y_1^2},\ \frac{x_2}{y_2^2},\ \frac{1-x_1-x_2}{\left(1-y_1-y_2\right)^2}\right\}, \tag{3}$$

котра задається на паралелепіпеді:

$$\mathbf{X}\times\mathbf{Y} = \prod_{s=1}^{2}\left[a_1;b_1\right]\times\left[a_2;b_2\right] \tag{4}$$

з умовами (2). Цей паралелепіпед, очевидно, є підмножиною одиничного гіперкуба $\prod_{k=1}^{4}\left[0;1\right]$. Мета розпочатого дослідження співпадає з метою проектувальника, якому необхідно розв’язати антагоністичну гру з ядром (3) на паралелепіпеді (4) з умовами (2). Проте тут існує потреба у знаходженні лише оптимальних стратегій другого гравця (і навіть не обов’язково знаходити оптимальне значення гри), а оптимальні стратегії першого гравця нас не цікавлять.

Обґрунтування строгої опуклості гри з ядром (3) на паралелепіпеді (4)

Відомо, що у строго опуклій грі другий гравець володіє чистою оптимальною стратегією, і притому єдиною [1, 3, 4]. Покажемо, що ядро (3) на паралелепіпеді (4) з умовами (2) є опуклою функцією змінних y_1 та y_2. Маємо другі частинні похідні частин гіперповерхні (3) під знаком максимуму:

$$\frac{\partial^2}{\partial y_s^2}\left(\frac{x_s}{y_s^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y_s}\left(-\frac{2x_s}{y_s^3}\right) = \frac{6x_s}{y_s^4},\ s\in\{1,\ 2\}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y_s^2}\left(\frac{1-x_1-x_2}{\left(1-y_1-y_2\right)^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y_s}\left(\frac{2\left(1-x_1-x_2\right)}{\left(1-y_1-y_2\right)^3}\right) = \frac{6\left(1-x_1-x_2\right)}{\left(1-y_1-y_2\right)^4},\ s\in\{1,\ 2\}. \tag{6}$$

Очевидно, що (5) і (6) набувають додатних значень при довільному $y_s\in\left[a_s;\ b_s\right]$, $s\in\{1,\ 2\}$, оскільки ще й $x_s\in\left[a_s;\ b_s\right]$ за умов (2). Тому умова $\frac{\partial^2}{\partial y_s^2}T\left(x_1,\ x_2;\ y_1,\ y_2\right)>0$ строгої опуклості даної антагоністичної гри виконана $\forall\ \mathbf{Y}\in\left[a_1;\ b_1\right]\times\left[a_2;\ b_2\right]$. Отже, гра з ядром (3) на паралелепіпеді (4) з умовами (2) є строго опуклою, і у ній проектувальник має єдину чисту оптимальну стратегію $\mathbf{Y}_* = \left[y_1^*\ \ y_2^*\right]$, де $\mathbf{Y}_*\in\left[a_1;\ b_1\right]\times\left[a_2;\ b_2\right]$.

Оптимальна стратегія проектувальника

Знаходимо максимум ядра (3) на множині $\mathbf{X} = \left[a_1;\ b_1\right]\times\left[a_2;\ b_2\right]$. Маємо:

$$\max_{\mathbf{X}\in\boldsymbol{X}} T\left(\mathbf{X},\ \mathbf{Y}\right) = \beta\max_{\mathbf{X}\in\boldsymbol{X}}\left\{\max\left\{\frac{x_1}{y_1^2},\ \frac{x_2}{y_2^2},\ \frac{1-x_1-x_2}{\left(1-y_1-y_2\right)^2}\right\}\right\} =$$

$$= \beta\max\left\{\max_{x_1\in[a_1;\,b_1]}\frac{x_1}{y_1^2},\ \max_{x_2\in[a_2;\,b_2]}\frac{x_2}{y_2^2},\ \max_{\mathbf{X}\in\boldsymbol{X}}\frac{1-x_1-x_2}{\left(1-y_1-y_2\right)^2}\right\} = \beta\max\left\{\frac{b_1}{y_1^2},\ \frac{b_2}{y_2^2},\ \frac{1-a_1-a_2}{\left(1-y_1-y_2\right)^2}\right\}. \tag{7}$$

Нехай $\mathbf{Y}_* = \left[y_1^*\ \ y_2^*\right]$ є оптимальною стратегією проектувальника. Тоді, згідно з [1, с. 140 - 143], оптимальне значення v_* цієї гри досягається на кожній із компонент під знаком максимуму у (7) при $\left[y_1\ \ y_2\right] = \left[y_1^*\ \ y_2^*\right]$. Отже:

$$v_* = \beta \frac{b_1}{\left(y_1^*\right)^2} = \beta \frac{b_2}{\left(y_2^*\right)^2} = \beta \frac{1 - a_1 - a_2}{\left(1 - y_1^* - y_2^*\right)^2}, \tag{8}$$

звідки

$$y_1^* = \sqrt{\frac{\beta b_1}{v_*}}, \tag{9}$$

$$y_2^* = \sqrt{\frac{\beta b_2}{v_*}}, \tag{10}$$

$$1 - y_1^* - y_2^* = \sqrt{\frac{\beta \left(1 - a_1 - a_2\right)}{v_*}}. \tag{11}$$

Просумувавши ліві і праві частини співвідношень (9) - (11), отримуємо:

$$1 = \sqrt{\frac{\beta b_1}{v_*}} + \sqrt{\frac{\beta b_2}{v_*}} + \sqrt{\frac{\beta \left(1 - a_1 - a_2\right)}{v_*}} = \sqrt{\beta} \frac{\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \sqrt{1 - a_1 - a_2}}{\sqrt{v_*}}, \tag{12}$$

звідки

$$v_* = \beta \left(\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \sqrt{1 - a_1 - a_2} \right)^2. \tag{13}$$

Таким чином, компонентами оптимальної стратегії проектувальника є:

$$y_1^* = \frac{\sqrt{b_1}}{\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \sqrt{1 - a_1 - a_2}}, \tag{14}$$

$$y_2^* = \frac{\sqrt{b_2}}{\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \sqrt{1 - a_1 - a_2}}, \tag{15}$$

які, щоправда, мають місце тільки при:

$$\frac{\sqrt{b_1}}{\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \sqrt{1 - a_1 - a_2}} \in \left[a_1; b_1 \right], \tag{16}$$

$$\frac{\sqrt{b_2}}{\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \sqrt{1 - a_1 - a_2}} \in \left[a_2; b_2 \right]. \tag{17}$$

Справді, при $\left[y_1 \quad y_2 \right] = \left[y_1^* \quad y_2^* \right]$ усі компоненти під знаком максимуму у (7) повинні бути рівними, тому:

$$\frac{b_1}{\left(y_1^*\right)^2} = \frac{b_2}{\left(y_2^*\right)^2}, \tag{18}$$

$$\frac{b_2}{\left(y_2^*\right)^2} = \frac{1 - a_1 - a_2}{\left(1 - y_1^* - y_2^*\right)^2}, \tag{19}$$

$$y_1^* = \sqrt{\frac{b_1}{b_2}} y_2^*,$$

$$y_2^* = \sqrt{\frac{b_2}{1 - a_1 - a_2}} \left(1 - y_1^* - y_2^*\right) = \sqrt{\frac{b_2}{1 - a_1 - a_2}} \left(1 - \sqrt{\frac{b_1}{b_2}} y_2^* - y_2^*\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{b_2}{1-a_1-a_2}} - \sqrt{\frac{b_2}{1-a_1-a_2}}\left(1+\sqrt{\frac{b_1}{b_2}}\right)y_2^*,$$

$$y_2^*\left(1+\frac{\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2}}{\sqrt{1-a_1-a_2}}\right) = \sqrt{\frac{b_2}{1-a_1-a_2}},$$

$$y_2^* = \frac{\sqrt{b_2}}{\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2}+\sqrt{1-a_1-a_2}}.$$

Зазначимо, що завдяки опуклості гіперповерхні (3) по змінним y_1 та y_2 при:

$$\frac{\sqrt{b_1}}{\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2}+\sqrt{1-a_1-a_2}} < a_1, \tag{20}$$

буде $y_1^* = a_1$. Так само при:

$$\frac{\sqrt{b_2}}{\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2}+\sqrt{1-a_1-a_2}} < a_2, \tag{21}$$

буде $y_2^* = a_2$, при:

$$\frac{\sqrt{b_1}}{\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2}+\sqrt{1-a_1-a_2}} > b_1, \tag{22}$$

буде $y_1^* = b_1$, а при:

$$\frac{\sqrt{b_2}}{\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2}+\sqrt{1-a_1-a_2}} > b_2, \tag{23}$$

буде $y_2^* = b_2$.

Отже, при (16) і (17) оптимальною стратегією проектувальника є:

$$\mathbf{Y}_* = \left[\frac{\sqrt{b_1}}{\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2}+\sqrt{1-a_1-a_2}} \quad \frac{\sqrt{b_2}}{\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2}+\sqrt{1-a_1-a_2}}\right]. \tag{24}$$

При невиконанні хоча одного зі співвідношень (16) і (17) слід враховувати різні випадки, які досліджуватимемо нижче.

Розглянемо випадок $y_1^* = a_1$ при (17) та (20). Оскільки (18) і (19) мають місце для (14) і (15), то при (20) буде подвійна нерівність:

$$\frac{b_1}{a_1^2} < \frac{b_2}{\left(y_2^*\right)^2} < \frac{1-a_1-a_2}{\left(1-a_1-y_2^*\right)^2}. \tag{25}$$

Бачимо, що другий гравець ще має змогу зменшити максимальний виграш першого гравця. Тому, згідно з (8), точка y_2^* визначатиметься з рівності:

$$\frac{b_2}{\left(y_2^*\right)^2} = \frac{1-a_1-a_2}{\left(1-a_1-y_2^*\right)^2}. \tag{26}$$

Із (25) маємо квадратне рівняння:

$$b_2\left[1-2\left(a_1+y_2^*\right)+a_1^2+2a_1y_2^*+\left(y_2^*\right)^2\right]-\left(y_2^*\right)^2\left(1-a_1-a_2\right)=0 \qquad (27)$$

відносно змінної y_2^*. Рівняння (27) подаємо у формі:

$$\left(y_2^*\right)^2\left(b_2+a_1+a_2-1\right)+2b_2y_2^*\left(a_1-1\right)+b_2\left(1-2a_1+a_1^2\right)=$$
$$=\left(y_2^*\right)^2\left(b_2+a_1+a_2-1\right)+2b_2y_2^*\left(a_1-1\right)+b_2\left(1-a_1\right)^2=0. \qquad (28)$$

Дискримінант рівняння (28):

$$D=4b_2^2\left(a_1-1\right)^2-4\left(b_2+a_1+a_2-1\right)b_2\left(1-a_1\right)^2=$$
$$=4b_2\left(1-a_1\right)^2\left(b_2-b_2-a_1-a_2+1\right)=4b_2\left(1-a_1\right)^2\left(1-a_1-a_2\right)=0. \qquad (29)$$

Тоді коренями рівняння (28) є:

$$y_2^{*\langle 1\rangle}=\frac{2b_2\left(1-a_1\right)-\sqrt{D}}{2\left(b_2+a_1+a_2-1\right)}=\frac{2b_2\left(1-a_1\right)-2\left(1-a_1\right)\sqrt{b_2\left(1-a_1-a_2\right)}}{2\left(b_2+a_1+a_2-1\right)}=$$
$$=\frac{\left(1-a_1\right)\sqrt{b_2}\left(\sqrt{b_2}-\sqrt{1-a_1-a_2}\right)}{\left(\sqrt{b_2}+\sqrt{1-a_1-a_2}\right)\left(\sqrt{b_2}-\sqrt{1-a_1-a_2}\right)}=\frac{\left(1-a_1\right)\sqrt{b_2}}{\sqrt{b_2}+\sqrt{1-a_1-a_2}}; \qquad (30)$$

$$y_2^{*\langle 2\rangle}=\frac{2b_2\left(1-a_1\right)+\sqrt{D}}{2\left(b_2+a_1+a_2-1\right)}=\frac{2b_2\left(1-a_1\right)+2\left(1-a_1\right)\sqrt{b_2\left(1-a_1-a_2\right)}}{2\left(b_2+a_1+a_2-1\right)}=$$
$$=\frac{\left(1-a_1\right)\sqrt{b_2}\left(\sqrt{b_2}+\sqrt{1-a_1-a_2}\right)}{\left(\sqrt{b_2}+\sqrt{1-a_1-a_2}\right)\left(\sqrt{b_2}-\sqrt{1-a_1-a_2}\right)}=\frac{\left(1-a_1\right)\sqrt{b_2}}{\sqrt{b_2}-\sqrt{1-a_1-a_2}}. \qquad (31)$$

Покажемо, що корінь (31) не належить сегменту $\left[a_2; b_2\right]$ і тому не може надалі розглядатись. Якщо $b_2<1-a_1-a_2$, то $y_2^{*\langle 2\rangle}<0$. З іншого боку, при $b_2>1-a_1-a_2$ і припущенні того, що $y_2^{*\langle 2\rangle}>b_2$, матимемо:

$$\frac{1-a_1}{\sqrt{b_2}-\sqrt{1-a_1-a_2}}>\sqrt{b_2},$$
$$1-a_1>b_2-\sqrt{b_2\left(1-a_1-a_2\right)},$$
$$\sqrt{b_2\left(1-a_1-a_2\right)}>b_2+a_1-1. \qquad (32)$$

Але із умов (2) випливає і нерівність $b_2+a_1<1$, тобто $b_2+a_1-1<0$, що означає справедливість нерівності (32). Для того, щоб вирівняти нерівність (25) у рівність (26), необхідно знижувати значення y_2^* за (15). Але у нас $y_2^*\in\left[a_2; b_2\right]$, тому $y_2^{*\langle 1\rangle}<b_2$. Тоді при $y_2^{*\langle 1\rangle}\in\left[a_2; b_2\right)$ буде $y_2^*=y_2^{*\langle 1\rangle}$:

$$\mathbf{Y}_*=\left[a_1\quad\frac{\left(1-a_1\right)\sqrt{b_2}}{\sqrt{b_2}+\sqrt{1-a_1-a_2}}\right]. \qquad (33)$$

При $y_2^{*\langle 1\rangle} < a_2$ оптимальною стратегією проектувальника буде:

$$\mathbf{Y}_* = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}. \tag{34}$$

При одночасному виконанні (16) і (21) отримуємо симетричний випадок, у якому нерівність:

$$\frac{b_2}{a_2^2} < \frac{b_1}{\left(y_1^*\right)^2} < \frac{1 - a_1 - a_2}{\left(1 - y_1^* - a_2\right)^2} \tag{35}$$

необхідно вирівняти до рівності:

$$\frac{b_1}{\left(y_1^*\right)^2} = \frac{1 - a_1 - a_2}{\left(1 - y_1^* - a_2\right)^2} \tag{36}$$

за допомогою, очевидно, зниженого значення y_1^*, яке у даному випадку по аналогії з (27) - (30) дорівнює:

$$y_1^{*\langle 1\rangle} = \frac{\left(1 - a_2\right)\sqrt{b_1}}{\sqrt{b_1} + \sqrt{1 - a_1 - a_2}}. \tag{37}$$

Продовжуючи розмірковувати симетрично, отримуємо, що при $y_1^{*\langle 1\rangle} \in \left[a_1; b_1\right)$ буде $y_1^* = y_1^{*\langle 1\rangle}$:

$$\mathbf{Y}_* = \begin{bmatrix} \dfrac{\left(1 - a_2\right)\sqrt{b_1}}{\sqrt{b_1} + \sqrt{1 - a_1 - a_2}} & a_2 \end{bmatrix}. \tag{38}$$

А при $y_1^{*\langle 1\rangle} < a_1$ оптимальною стратегією проектувальника буде (34).

При одночасному виконанні (20) і (21) стратегія (34) залишається оптимальною, а при одночасному виконанні (22) і (23):

$$\mathbf{Y}_* = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix}. \tag{39}$$

При одночасному виконанні (17) і (22) відразу маємо $y_1^* = b_1$. І тут, згідно з (8), справедлива подвійна нерівність:

$$\frac{1}{b_1} > \frac{b_2}{\left(y_2^*\right)^2} > \frac{1 - a_1 - a_2}{\left(1 - b_1 - y_2^*\right)^2}, \tag{40}$$

з якої видно, що другий гравець вже не має ніякої змоги зменшити максимальний виграш першого гравця. Тому тут:

$$\mathbf{Y}_* = \begin{bmatrix} b_1 & \dfrac{\sqrt{b_2}}{\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \sqrt{1 - a_1 - a_2}} \end{bmatrix}. \tag{41}$$

У симетричному випадку, коли одночасно виконані (16) і (23), оптимальною стратегією проектувальника є:

$$\mathbf{Y}_* = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{b_1}}{\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \sqrt{1 - a_1 - a_2}} & b_2 \end{bmatrix}. \tag{42}$$

При одночасному виконанні (20) і (23) буде $\dfrac{b_1}{a_1^2} < \dfrac{1}{b_2}$. Значення $\dfrac{1 - a_1 - a_2}{\left(1 - a_1 - b_2\right)^2}$ може бути як меншим, так і більшим за значення $\frac{1}{b_2}$. При:

$$\frac{1}{b_2} \geqslant \frac{1-a_1-a_2}{\left(1-a_1-b_2\right)^2} \tag{43}$$

другий гравець вже не має ніякої змоги зменшити максимальний виграш першого гравця, і тому:

$$\mathbf{Y}_* = \left[a_1 \quad b_2 \right]. \tag{44}$$

У випадку:

$$\frac{1}{b_2} < \frac{1-a_1-a_2}{\left(1-a_1-b_2\right)^2} \tag{45}$$

другий гравець ще може зменшити максимальний виграш першого гравця за допомогою вирівнювання нерівності (45). А вирівняти її другий гравець може лише за допомогою відступу від точки $y_2 = b_2$ у таку точку y_2^*, для якої буде виконуватись рівність (26), для якої вже маємо (27) — (32). Зрозуміло, що $y_2^{*\langle 1 \rangle} < b_2$ і при $y_2^{*\langle 1 \rangle} \in \left[a_2; b_2 \right)$ оптимальною стратегією проектувальника буде (33), а при $y_2^{*\langle 1 \rangle} < a_2$ вектор (34) є його оптимальною стратегією.

При одночасному виконанні (21) і (22) міркування є симетричними. Тут $\frac{1}{b_1} > \frac{b_2}{a_2^2}$ і при:

$$\frac{1}{b_1} \geqslant \frac{1-a_1-a_2}{\left(1-b_1-a_2\right)^2} \tag{46}$$

другий гравець ніколи не зменшить максимальний виграш першого гравця, що дає:

$$\mathbf{Y}_* = \left[b_1 \quad a_2 \right]. \tag{47}$$

У випадку:

$$\frac{1}{b_1} < \frac{1-a_1-a_2}{\left(1-b_1-a_2\right)^2} \tag{48}$$

при $y_1^{*\langle 1 \rangle} \in \left[a_1; b_1 \right)$ буде (38), а при $y_1^{*\langle 1 \rangle} < a_1$ оптимальною стратегією проектувальника буде (34).

Загальний підсумок та перспектива подальшого дослідження

Якщо сегмент усіх можливих нормованих навантажень, які можуть стискувати кожну з двох колон, підібрано (або спрогнозовано) коректно, то за умов (16) і (17) оптимальною стратегією проектувальника є (24). Оптимальне значення гри (13), котре є максимально можливою часткою від граничного навантаження, тут, як і в інших випадках, не має особливого значення. При (17), (20) та $y_2^{*\langle 1 \rangle} \in \left[a_2; b_2 \right)$, а також при (20), (23), (45) та $y_2^{*\langle 1 \rangle} \in \left[a_2; b_2 \right)$ оптимальною стратегією проектувальника є (33); при (16), (21) та $y_1^{*\langle 1 \rangle} \in \left[a_1; b_1 \right)$, а також при (21), (22), (48) та $y_1^{*\langle 1 \rangle} \in \left[a_1; b_1 \right)$ буде (38). При (17), (20) та $y_2^{*\langle 1 \rangle} < a_2$, а також при (16), (21) та $y_1^{*\langle 1 \rangle} < a_1$ оптимальною стратегією проектувальника є (34); ця ж стратегія залишається оптимальною і при одночасному виконанні (20) і (21); при (20), (23), (45) та $y_2^{*\langle 1 \rangle} < a_2$, а також при (21), (22), (48) та $y_1^{*\langle 1 \rangle} < a_1$ знову буде (34).

Оптимальна стратегія проектувальника (39) має місце тільки при одночасному виконанні (22) і (23). При (20), (23) та (43) буде (44), а (47) має місце при одночасному виконанні (21), (22) та (46). При одночасному виконанні (17) і (22) оптимальною стратегією проектувальника є (41), а при одночасному виконанні (16) і (23) оптимальною стратегією проектувальника є (42). Таким чином, проектувальник, отримуючи потенційні мінімальне та максимальне навантаження на кожну з двох колон, відразу визначає оптимальну площу поперечного перерізу кожної з них, а площа поперечного перерізу третьої колони знаходиться як $y_3^* = 1 - \left(y_1^* + y_2^* \right)$.

Перспектива подальшого дослідження вбачається у проблемі розрахунку повздовжньої стійкості конструкцій з більшою кількістю опор. Там, хоча й, на перший погляд, знаходження оптимальної стратегії проектувальника не є вельми складним завданням, теж можуть не виконуватись умови належності попередньо визначених координат цієї стратегії відповідним сегментам усіх можливих нормованих навантажень на колони. У зв'язку з цим визначення оптимальної площі поперечного перерізу кожної колони у конструкціях з багатьма опорами не є тривіальною задачею, результати якої доцільно використовувати при будівництві опорних конструкцій з нерівномірним розподілом навантажень на них.

Література

1. Воробьёв Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков / Воробьёв Н.Н. − М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. − 272 с.

2. Романюк В. В. Модель визначення оптимального рішення проектувальника у задачі про розрахунок повздовжньої стійкості двох елементів будівельної конструкції при дії на них нормованого стискаючого зусилля / В.В. Романюк // Проблеми трибології. − 2010. − № 1. − С. 42-56.

3. Оуэн Г. Теория игр / Оуэн Г.; [пер. с англ.]. − 2-е изд. − М. : Едиториал УРСС, 2004. − 216 с.

4. Романюк В.В. Розв'язки однієї строго випуклої гри на одиничному квадраті з добутком чистих стратегій / В.В. Романюк // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. − 2007. − № 2. − С. 174-179.

Надійшла 06.04.2010