Література

1. Еськов А.Л. Максимизация рыночной стоимости украинских предприятий как эффективный инструмент управления бизнесом / А.Л. Еськов, Рыжиков В.С., Макарова В.А. // Вісник економічної науки України. – 2011. – № 2. – С. 41–45.
2. Євдокимов В.В. Концепція інтегрованої системи бухгалтерського обліку: теорія, методологія, організація : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня докт. екон. наук : 08.00.09 / В.В. Євдокимов // Житомир. держ. технол. ун-т. – Житомир, 2011. – 37 с.
3. Жук В.М. Концепція розвитку бухгалтерського обліку в аграрному секторі економіки : [монографія] / Жук В.М. – К. : ННЦ ІАЕ, 2009. – 648 с.
4. Катренко А.В. Системний аналіз об'єктів та процесів комп'ютеризації : [навчальний посібник] / Катренко А.В. – Львів : "Новий світ – 2000". – 424 с.
5. Малюга Н.М. Концепція розвитку бухгалтерського обліку в Україні: теоретико-методологічні основи : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня докт. екон. наук : 08.06.04. / Малюга Н.М. – К., 2006. – 36 с.
6. Мендрул О.Г. Управління вартістю підприємств: теоретичні та практичні аспекти : автореф. … дис. на здобуття наук. ступеня докт. екон. наук : 08.06.01. / Мендрул О.Г. – К., 2003. – 36 с.
7. Моссаковський В. Концепція обліку в Україні / В. Моссаковський, Т. Кононенко // Бухгалтерський облік і аудит. – 2004. – №11. – С. 8–14.
8. Пархоменко В.М. Концепція розвитку бухгалтерського обліку, контролю та аналізу витрат на якість продукції : автореф. дис. на здобуття наук. ступення докт. екон. наук : 08.00.09 / В.М. Пархоменко // Житомир. держ. технол. ун-т. – Житомир, 2011. – 36 с.
9. Сопко В.В. Концепція бухгалтерського обліку пасивів (капіталу, власності) в управлінні підприємницькою діяльністю : Автореф. дис. на здобуття наук. ступеня докт. екон. наук : спец. 08.00.09. / Сопко В.В. – К., 2008. – 31 с.
10. Шпак В.А. Організація бухгалтерського обліку: концептуальний підхід : [монографія] / Шпак В.А. – К. : Бізнес Медіа Консалтинг, 2011. – 312 с.

Надійшла 03.05.2012; статтю представляє к. е. н. Озеран В. О.

УДК 330.47

В. М. ПІДГОРОДЕЦЬКА
Хмельницький національний університет

МОДЕЛЬ ДИНАМІКИ ВНУТРІШНЬОГО ВАЛОВОГО ПРОДУКТУ З АНАЛІТИЧНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ (ВИПАДОК ПРОСТИХ КОРЕНІВ ХАРАКТЕРИСТИЧНОГО РІВНЯННЯ)

В статті висвітлюється узагальнений метод переходу від інваріантної форми зображення математичної моделі динаміки внутрішнього валового продукту до її аналітичної форми.

The generalized method of proceeding from invariant form of representation the mathematical dynamics of domestic gross revenue to its analytic form is analyzed in this article.

Ключові слова: динамічна модель, ВВП, інваріантна форма

Постановка задачі. Введемо на розгляд інваріантну форму динамічної моделі внутрішнього валового продукту (ВВП)

$$y(t)=k_1(t)\cdot k_2(t)\cdot\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\left(\frac{dk_1(t)}{dt}k_2(t)+k_1(t)\right)\cdot\frac{dy(t)}{dt}+x_n(t)\,,\; y(t_0)=y_0\ge 0\;\; y'(t_0)=y'_0. \tag{1}$$

За цією моделлю, в якій екзогенні величини $k_1(t)$ і $k_2(t)$ містять логарифмічні функції, в статті [2] вивчено динаміку ВВП при все можливих сполученнях початкових даних. Дослідження базувались на основі аналітичної форми моделі $y=\beta_1\cdot\frac{1+t^2}{t^2}+\beta_2\cdot t-0{,}5a\cdot t\ln t$, де β_1,β_2 визначаються з початкових умов, та основ математичного аналізу.

Дослідження в [1, 2] супроводжувались без висвітлення математичного апарату, з допомогою якого здійснюється перехід від інваріантної до аналітичної форми зображення математичної моделі. При цьому автори плекали надію про те, що читач ознайомлений з основами теорії диференціальних рівнянь в рамках вузівського курсу. Цього курсу цілком достатньо для розуміння методів побудови розв'язків диференціальних рівнянь порядків вище першого зі сталими коефіцієнтами. Однак, не зважаючи на всепоглинаючу інформатизацію суспільства, з подивом слід констатувати, що загальні методи побудови та дослідження розв'язків диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, на превеликий жаль, не знайшли належного відображення у вітчизняній та іноземній математичній літературі сьогодення. У зв'язку з цим виникає потреба у висвітленні узагальнюючого методу переходу від інваріантної форми зображення математичної моделі динаміки ВВП до її аналітичної форми.

В даній роботі ми обмежимось дослідженням випадку простих коренів характеристичного рівняння (основи теорії диференціальних рівнянь), яке випливає з інваріантної форми динамічної моделі ВВП при цілком певних припущеннях.

Випадок простих коренів характеристичного рівняння. З метою спрощення математичних викладок та узгодженості з основами аналітичної теорії диференціальних рівнянь введемо позначення:

$$L=\sum_{j=0}^{2} a_j(t)\cdot\frac{d^{2-j}}{dt^{2-j}} \text{ (диференціальний оператор)},\; k_1(t)\cdot k_2(t)=a_0(t),$$
$$\frac{dk_1(t)}{dt}k_2(t)+k_1(t)=a_1(t),\qquad -1=a_2(t),\quad -s_n(t)=f(t)$$

і перепишемо інваріантну форму моделі (1) в наступній формі:

$$L(y)\equiv\sum_{j=0}^{2} a_j(t)\cdot\frac{d^{2-j}y}{dt^{2-j}}=f(t). \tag{2}$$

Нехай функції $a_j(t), j=0,1; f(t)$ допускають представлення Лорана відповідно

$$a_j(t)=t^{\pi_j}\sum_{s=0}^{\infty} a_{js}^{\kappa}\cdot t^s,\; \pi_j\in Z,\; j=0,1,2;\qquad f(t)=t^{\pi^*}\cdot\sum_{s=0}^{\infty} f_s^{\kappa}\cdot t^s,\; \pi^*\in Z. \tag{3}$$

Замінюючи в лівій частині (2) y на t^{ρ} і $a_j(t)$ $j=0,1,2$ їх зображеннями із (3) та упорядковуючи належним чином доданки, одержимо вираз

$$L^{\kappa}\left[t^{\rho}\right]=t^{\rho+\tilde{\pi}}\sum_{s=0}^{\infty} F_s^{\kappa}(\rho)\cdot t^s, \tag{4}$$

де $\tilde{\pi}=\min\limits_{j}(\pi_j-2+j)$, $F_s^{\kappa}(\rho)$ – лінійні комбінації коефіцієнтів a_{js}^{κ} із (3). Цей вираз прийнято в аналітичній теорії називати характеристичною функцією, а рівність

$$F_0^{\kappa}(\rho)=0 \tag{5}$$

характеристичним рівнянням динамічної моделі (2)–(3) відносно особливої точки $\zeta_{\kappa}=0.$

Шляхом безпосередньої підстановки неважко переконатись, що ряд

$$y_{\sigma}^{\kappa}(t)=t^{\rho_{\sigma}^{\kappa}}\cdot\sum_{i=0}^{\infty} a_{\sigma_i}^{\kappa}\cdot t^i \tag{6}$$

є розв'язком однорідного диференціального рівняння

$$L(y)\equiv\sum_{j=0}^{2}\sum_{s=0}^{\infty} a_{js}^{\kappa}t^{\pi_j+s}\frac{d^{2-j}y}{dt^{2-j}}=0, \tag{7}$$

якщо лише ρ_{σ}^{κ} – корінь характеристичного рівняння (5), а коефіцієнти $a_{\sigma_i}^{\kappa}$ задовільняють співвідношення

$$\sum_{r=0}^{i} F_r^{\kappa}(\rho_{\sigma}^{\kappa}+i-r)\cdot a_{i-r}^{\kappa}=0,\quad i=0,1,2\ldots. \tag{8}$$

Отже, парі $\rho_1^\kappa, \rho_2^\kappa$ – різних (простих) коренів характеристичного рівняння (5) відповідає пара лінійно незалежних розв'язків $y_1^\kappa(t), y_2^\kappa(t)$, що мають зображення виду (6). Тут же слід відзначити, що число коренів характеристичного рівняння можна визначити заздалегідь, перевіривши виконання умови

$$-\min_j\left(\pi_j - \pi_0\right)/\, j - 1 \le 0. \tag{9}$$

При виконанні такої нерівності ряди в (6), де $\sigma = 1, 2,$ зображатимуть деякі функції $\varphi_1^\kappa(t), \varphi_2^\kappa(t).$ Це дозволяє представити загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння (7), що відповідає неоднорідному (2), у вигляді

$$y_o(t) = c_1 \cdot t^{\rho_1^\kappa} \cdot \varphi_1^\kappa(t) + c_2 \cdot t^{\rho_2^\kappa} \cdot \varphi_2^\kappa(t), \tag{10}$$

в якому c_1, c_2 – довільні константи, що визначаються з початкових умов задачі Коші.

Перехід від інваріантної форми моделі динаміки внутрішнього валового продукту до її аналітичної форми будемо вважати завершеним, якщо обґрунтуємо спосіб відшукання частинного розв'язку неоднорідного диференціального рівняння (2), права частина якого має зображення в (3).

Безпосередньою перевіркою можна переконатись в справедливості наступних тверджень.

Якщо число $\pi^* - \tilde{\pi},$ де $\tilde{\pi} = \min(\pi_j - 2 + j)$, не є коренем характеристичного рівняння (5), тобто $F_0^\kappa(\pi^* - \tilde{\pi}) \ne 0$, то існує частинний розв'язок диференціального рівняння (2)-(3) вигляду

$$\tilde{y}^\kappa(t) = t^{\pi^* - \tilde{\pi}} \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s^\kappa \cdot t^s. \tag{11}$$

Якщо ж $\pi^* - \tilde{\pi}$ – корінь характеристичного рівняння (5), то існує частинний формальний розв'язок такого вигляду

$$\tilde{y}^\kappa(t) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(t^\rho \cdot \alpha_s^\kappa(\rho)\right)_{|\rho = \pi^* - \tilde{\pi}} \cdot t^s. \tag{12}$$

Як і вище відзначимо, що при виконанні нерівності (9) побудований в такий спосіб ряд зображатиме деяку аналітичну в околі нуля функцію.

Розглянемо випадок, коли число $\pi^* - \tilde{\pi}$ не є коренем характеристичного рівняння. Позначаючи через $\phi^\kappa(t)$ функцію, до якої наближається ряд із вже знайденими коефіцієнтами, подамо модель динаміки внутрішнього валового продукту в аналітичній формі:

$$y(t) = c_1 \cdot t^{\rho_1^\kappa} \cdot \varphi_1^\kappa(t) + c_2 \cdot t^{\rho_2^\kappa} \cdot \varphi_2^\kappa(t) + t^{\pi^* + \tilde{\pi}} \cdot \phi^\kappa(t), \tag{13}$$

Крайова задача. Для дослідження на основі моделі (13) можливого ходу розвитку економічної системи за певний період часу T необхідно передбачити значення хоча б одного економічного показника в початковий $t = t_0$ та в кінцевий $t = t_T$ момент часу та пов'язати його з невідомими величинами. Нагадаємо, що час в будь-який момент t визначається формулою $t = [t] + \{t\},$ де $[t]$ – ціла, $\{t\}$ – дробова частина року. Скажімо, якщо розробляється короткостроковий прогноз на початку січня поточного року, то $[t] = 0,\ \{t\} = N/12$, де N – номер місяця.

Виходячи з економічного змісту величин $y(t), s(t), i(t)$ та $s_n(t)$ і гіпотез [1-2] стосовно їх взаємозв'язку, введемо умови

$$y(t_0) - k_1(t_0) \cdot y'(t_0) = \lambda_0; \quad y(t_T) - k_1(t_T) \cdot y'(t_T) = \lambda_T, \tag{14}$$

де λ_0, λ_T – сталі величини, $k_1(t_0), k_1(t_T)$ – величини, що розраховуються за відомою функцією $k_1(t)$.

Умови (14) називаються крайовими або граничними умовами, а сама задача (2), (14) – крайовою задачею. За співвідношеннями (14) неможливо одночасно знайти значення $y(t), y'(t)$ ні при $t = t_0$, ні при

$t = t_T$. Тому крайова задача (2), (14) не зводиться до задачі Коші.

Слід відзначити, що крайова задача (2), (14) може мати єдиний розв'язок, нескінченну множину розв'язків і взагалі не мати розв'язків. Економічний інтерес представляє випадок існування і єдиності розв'язку крайової задачі (2), (14). Розглянемо спосіб відшукання такого розв'язку за так званим методом "стрільби".

Нехай $\hat{y}(t)$ – частинний розв'язок рівняння (2), що задовольняє початковим умовам $\hat{y}(t_0) = \mu$, $\hat{y}'(t_0) = (\hat{y}(t_0) - \lambda_0)/k_1(t_0)$, де μ – довільно вибране число; $\breve{y}(t)$ – розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$L(y) \equiv \sum_{j=0}^{2} a_j(t) \cdot \frac{d^{2-j}y}{dt^{2-j}} = 0, \tag{15}$$

що задовольняє початковим умовам $\breve{y}(t_0) = \gamma$, $\breve{y}'(t_0) = \breve{y}(t_0)/k_1(t_0)$, де γ – довільно вибране число.

Тоді при будь-якому c функція

$$y(t) = \hat{y}(t) + c \cdot \breve{y}(t) \tag{16}$$

є розв'язком диференціального рівняння (2), що задовільняє першій із краєвих умов (14).

Константу c підбираємо так, щоб розв'язок (16) задовольняв другій крайовій умові із (14):

$$\hat{y}(t_T) + c \cdot \breve{y}(t_T) - k_1(t_T) \cdot (\hat{y}'(t_T) + c \cdot \breve{y}'(t_T)) = \lambda_T;$$

звідси знаходимо

$$c = \frac{\lambda_T - \hat{y}(t_T) + k_1(t_T) \cdot \hat{y}'(t_T)}{\breve{y}(t_T) - k_1(t_T) \cdot \breve{y}'(t_T)}. \tag{17}$$

Неважко помітити, що $\breve{y}(t_T) - k_1(t_T) \cdot \breve{y}'(t_T) \neq 0$, оскільки в супротивному випадку крайова задача (2), (14) або не має розв'язку, або має нескінченну множину розв'язків. Ми ж розглядаємо випадок, коли ця задача має єдиний розв'язок.

Приклад. Якщо коефіцієнти пропорційності $k_1(t)$ і $k_2(t)$ змінюються за законами $k_1(t) = t \cdot (\alpha - t)$, $k_2(t) = t \cdot (\beta - t)$, то функції $a_0(t)$ і $a_1(t)$ із (2) визначаються формулами:

$$a_0(t) = t^2 \cdot \left(\alpha\beta - (\alpha + \beta) \cdot t + t^2\right), \; a_1(t) = t \cdot \left(\alpha \cdot (1 + \beta) - (1 + 2\beta) \cdot t + 2t^2\right).$$

Вважаючи сальдо протягом першого півріччя поточного року нульовим, перепишемо диференціальне рівняння (2) у вигляді

$$L(y) \equiv t^2 \cdot \left(\alpha\beta - (\alpha + \beta) \cdot t + t^2\right) \cdot y'' + t \cdot \left(\alpha \cdot (1 + \beta) - (1 + 2\beta) \cdot t + 2t^2\right) \cdot y' - y = 0. \tag{18}$$

При $\alpha = 1,25; \beta = 1,5$ це рівняння задовольняється загальним розв'язком

$$y(t) = c_1 \cdot t^{-1,14} \varphi_1(t) + c_2 \cdot t^{0,47} \varphi_2(t), \tag{19}$$

де прийнято $\varphi_1(t) = 1 - 1,88t + 0,05t^2 - 0,25t^3 + \ldots$, $\varphi_2(t) = 1 + 0,24t + 0,09t^2 + 0,03t^3 + \ldots$.

Розробимо прогноз розвитку економічної системи на перше півріччя поточного року, тобто приймемо Т = 6 міс., $t_0 = 1/12$, $t_T = 6/12$.

При крайових умовах

$$y'\left(\frac{1}{12}\right) = 50,4; \qquad y\left(\frac{1}{2}\right) = 6,3 \,. \tag{20}$$

із загального розв'язку (19) виокремлюється частинний розв'язок

$$y(t) = -0{,}16 \cdot t^{-1{,}14}\varphi_1(t) + 7{,}6 \cdot t^{0{,}47}\varphi_2(t), \quad (21)$$

що визначає динаміку розвитку економічної системи на відрізку часу $\frac{1}{12} \le t \le \frac{6}{12}$.

Для табуляції функції (21) і побудови відповідного їй графіка проапроксимуємо функції $\varphi_1(t)$ і $\varphi_2(t)$, що зображуються рядами із (19), відповідними їм поліномами третього степеня. Ця дія цілком правомірна, оскільки відрізок часу $\frac{1}{12} < t < \frac{1}{2}$ належить проміжку аналітичності $-1 < t < 1$ функцій $a_0(t)$ і $a_1(t)$.

Залучаючи засоби Excel, одержуємо наступну геометричну інтепритацію (рис.1) аналітичної моделі динаміки ВВП на протязі першого півріччя поточного року.

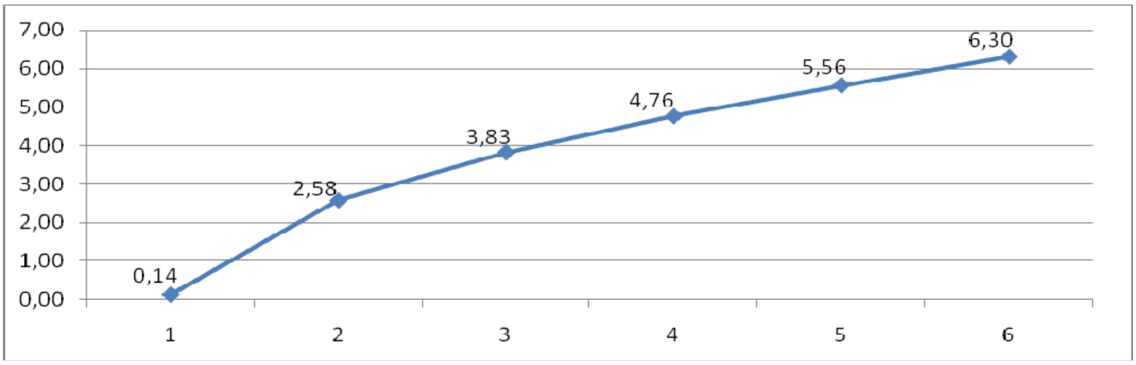

Рис. 1. Динаміка ВВП у % за перше півріччя поточного року

Висновки

1. Аналітично обгрунтовано метод переходу від інваріантної форми моделі динаміки ВВП до її аналітичної форми.
2. Наведено метод розробки прогнозу розвитку економічної системи на певний період часу.
3. На прикладі, наближеного до реалій сьогодення, прогнозовано динаміку ВВП протягом першого півріччя поточного року.

Література

1. Іванюк М.М. Модель динаміки внутрішнього валового продукту зі сталими екзогенними величинами / М.М. Іванюк, В.М. Підгородецька // Вісник Хмельницького національного університету. – 2006. – № 1. – Т. 1. – С. 158–163.
2. Підгородецька В.М. Модель динаміки внутрішнього валового продукту з логарифмічними екзогенними величинами / В.М. Підгородецька, М.М. Іванюк // Вісник Хмельницького національного університету. – 2009. – № 1. – С. 23–26.
3. Іванюк М.М. Методи побудови і дослідження розв'язків систем лінійних диференціальних рівнянь на комплексній площині / Іванюк М.М. – Хмельницький : Поділля, 1997. – 218 с.
4. Іванюк М.М. Про побудову аналітичних розв'язків класу $L_{0\rho}$ систем диференціальних рівнянь і дослідження їх властивостей / М.М. Іванюк // Доповіді Національної академії наук України. – К., 1998. – № 5.– С. 19–24.
5. Іванюк М.М. Метод характеристичної матриці-функції в одній задачі механіки / М.М. Іванюк // Доповіді Національної академії наук України. – 2002. – № 2. – С. 19–25.
6. Качура Є.В. Моделювання макроекономічної динаміки : [навч. посібник] / Є.В. Качура, В.М. Косарів. – К. : Центр навчальної літератури, 2003. – 236 с.

Надійшла 03.05.2012; рецензент: д. е. н. Войнаренко М. П.