

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

**ПОБУДОВА СКІНЧЕННОГО ГІБРИДНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ПРИ НАЯВНОСТІ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРУ В КРАЙОВИХ УМОВАХ ТА УМОВАХ СПРЯЖЕННЯ**

В роботі побудовані власні елементи для лінійного диференціального оператора 2-го порядку самоспряженого типу з кусково-однорідними коефіцієнтами на сегменті з  $n$  точками спряження у випадку, коли спектральний параметр бере участь і в умовах спряження.

In this paper the own elements for linear differential operator of the second order of selfconjugate type with partial-homogeneous coefficients is constructed in the segment with  $n$  conjugate points in the case if spectral parameter takes part in the conjugate conditions.

Скінчені гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку, запроваджені в роботі [1]. В даній статті ми подаємо їх узагальнення на випадок, коли спектральний параметр спеціальним чином входить в крайові умови та умови спряження. Наявність таких інтегральних перетворень дає можливість одержати інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку достатньо широкого класу задач квазістатика й динаміки для областей з м'якими межами.

**Задача Штурма-Ліувілля** на кусково-однорідному сегменті зі спектральним параметром в крайових умовах та умовах спряження. Розглянемо задачу побудови на множині

$$I_n = \{x : x \in \bigcup_{m=1}^{n+1} (a_{m-1}, a_m); a_0 \equiv a, a_{n+1} \equiv b\}$$

обмеженого ненульового розв'язку сепаратної системи лінійних однорідних звичайних диференціальних рівнянь

$$L[u] \equiv \sum_{m=1}^{n+1} \theta(x - a_{m-1})\theta(a_m - x) \times (L_m + b_m^2 \rho_m(x))u_m(x) = 0 \quad (1)$$

за крайовими умовами

$$\left(\tilde{\alpha}_{11}^0 d/dx + \tilde{\beta}_{11}^0\right) u_1 \Big|_{x=a} = 0,$$

$$\left(\tilde{\alpha}_{22}^{n+1} d/dx + \tilde{\beta}_{22}^{n+1}\right) u_{n+1} \Big|_{x=b} = 0 \quad (2)$$

та умовами спряження

$$\left[ \left(\tilde{\alpha}_{j1}^m d/dx + \tilde{\beta}_{j1}^m\right) u_m - \left(\tilde{\alpha}_{j2}^m d/dx + \tilde{\beta}_{j2}^m\right) u_{m+1} \right] \Big|_{x=a_m} = 0; \quad j = 1, 2, m = \overline{1, n}. \quad (3)$$

У рівностях (1) – (3)  $b_m = \sqrt{\lambda^2 + k_m^2} a_m^{-1}$ ,  $k_m^2 \geq 0$ ,  $\lambda$  – числовий (спектральний) параметр,  $L_m = d/dx(p_m(x)d/dx) - q_m(x)$ ,  $a_m > 0$ , функції  $p_m(x)$ ,  $q_m(x)$ ,  $\rho_m(x)$  – дійсні функції дійсної змінної,  $\tilde{\alpha}_{jk}^m = \alpha_{jk}^m - b_m^2 \delta_{jk}^m$ ,  $\tilde{\beta}_{jk}^m = \beta_{jk}^m - b_m^2 \gamma_{jk}^m$ ,  $\alpha_{jk}^m \geq 0$ ,  $\beta_{jk}^m \geq 0$ ,  $\delta_{jk}^m \geq 0$ ,  $\gamma_{jk}^m \geq 0$ ,  $j = 1, 2$ ,  $m = \overline{0, n}$ ,  $k = 1, 2$ . Будемо вважати, що  $d/dx p_m(x)$ ,  $q_m(x)$ ,  $\rho_m(x)$  неперервні на інтервалі  $(a_{m-1}, a_m)$  функції;  $p_m(x) \geq p_0 > 0$ ,  $\rho_m(x) \geq \rho_0 > 0$ .

Розглянемо квадратні матриці:

$$A_{11,k} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}^k & \beta_{11}^k \\ \alpha_{21}^k & \beta_{21}^k \end{bmatrix}, \quad A_{12,k} = \begin{bmatrix} \delta_{11}^k & \gamma_{11}^k \\ \delta_{21}^k & \gamma_{21}^k \end{bmatrix},$$

$$A_{21,k} = \begin{bmatrix} \alpha_{12}^k & \beta_{12}^k \\ \alpha_{22}^k & \beta_{22}^k \end{bmatrix}, \quad A_{22,k} = \begin{bmatrix} \delta_{12}^k & \gamma_{12}^k \\ \delta_{22}^k & \gamma_{22}^k \end{bmatrix}.$$

Введемо до розгляду числа  $c_{ij,k} = -\det A_{ij,k}$ ,  $c_{ij,mn}^{i_1 j_1, k}$  – визначник розміру  $2 \times 2$ ,

перший стовпець в якому  $i_1$  взятий із матриці  $A_{ij,k}$ , а другий стовпець  $j_1$  – із матриці  $A_{mn,k}$ :

$$c_{11,12}^{11,k} = \begin{vmatrix} \alpha_{11}^k & \delta_{11}^k \\ \alpha_{21}^k & \delta_{21}^k \end{vmatrix} = \alpha_{11}^k \delta_{21}^k - \alpha_{21}^k \delta_{11}^k,$$

$$c_{11,21}^{11,k} = \begin{vmatrix} \alpha_{11}^k & \alpha_{12}^k \\ \alpha_{21}^k & \alpha_{22}^k \end{vmatrix} = \alpha_{11}^k \alpha_{22}^k - \alpha_{21}^k \alpha_{12}^k.$$

$$c_{11,21}^{22,k} = \begin{vmatrix} \beta_{11}^k & \beta_{12}^k \\ \beta_{21}^k & \beta_{22}^k \end{vmatrix} = \beta_{11}^k \beta_{22}^k - \beta_{21}^k \beta_{12}^k,$$

$$c_{21,22}^{22,k} = \beta_{12}^k \gamma_{22}^k - \beta_{22}^k \delta_{12}^k.$$

Вимагаємо виконання умов на коефіцієнти:

$$c_{11,k} \cdot c_{21,k} > 0, \quad c_{12,k} = 0, \quad c_{22,k} = 0;$$

$$c_{11,12}^{12,k} = c_{11,12}^{21,k}.$$

**Означення 1.** Розв'язком крайової задачі (1) – (3) назвемо вектор-функцію  $V(x, \beta) = \{V_1(x, \beta); V_2(x, \beta); \dots; V_{n+1}(x, \beta)\}$  з такими властивостями: 1) функції  $V_j(x, \beta)$  задовольняють однорідне рівняння

$$(L_m + b_m^2)V_m(x, \beta) = 0, \quad x \in [a_{m-1}, a_m] \quad (4)$$

та умови спряження (3); 2) справджуються крайові умови

$$\left( \tilde{\alpha}_{11}^0 d/dx + \tilde{\beta}_{11}^0 \right) V_1(x, \beta) \Big|_{x=a_0} = 0,$$

$$\left( \tilde{\alpha}_{22}^{n+1} d/dx + \tilde{\beta}_{22}^{n+1} \right) V_{n+1}(x, \beta) \Big|_{x=b} = 0. \quad (5)$$

Виділимо з рівняння (1) гібридний диференціальний оператор (ГДО)

$$\mathfrak{M} = \sum_{m=1}^{n+1} \theta(x - a_{m-1}) \theta(a_m - x) L_m. \quad (6)$$

**Означення 2.** Областю визначення ГДО  $\mathfrak{M}$  назвемо множину  $G$  вектор-функцій  $g(x) = \{g_1(x); g_2(x); \dots; g_{n+1}(x)\}$ , які задовольняють умови: 1) вектор-функція  $f(x) = \{L_1[g_1(x)]; L_2[g_2(x)]; \dots; L_n[g_n(x)]; L_{n+1}[g_{n+1}(x)]\}$  неперервна на множині  $I_n$ ; 2) функції  $g_j(x)$  задовольняють умови спряження (3) та крайові умови (2).

Для елементів  $u(x) \in G$  та  $v(x) \in G$  визначимо скалярний добуток

$$(u(x), v(x)) = \int_a^b u(x)v(x)\sigma(x) \equiv \sum_{i=1}^{n+1} \int_{a_{i-1}}^{a_i} u_i(x)v_i(x)\sigma_i dx, \quad (7)$$

де числа  $\sigma_i > 0$  підлягають визначенню.

**Теорема 1.** Якщо  $u(x) \in G$ ,  $v(x) \in G$ , то справджується базова тотожність

$$\begin{aligned} & [u'_k(x)v_k(x) - u_k(x)v'_k(x)]_{x=a_k} = \\ & = \frac{c_{21,k}}{c_{11,k}} [u'_{k+1}(x)v_{k+1}(x) - u_{k+1}(x)v'_{k+1}(x)]_{x=a_k}. \end{aligned} \quad (8)$$

**Доведення.** Прийmemo позначення:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{11}^m &= \tilde{\alpha}_{11}^m \tilde{\alpha}_{22}^m - \tilde{\alpha}_{21}^m \tilde{\alpha}_{12}^m, \quad \tilde{\alpha}_{12}^m = \tilde{\alpha}_{11}^m \tilde{\beta}_{22}^m - \tilde{\alpha}_{21}^m \tilde{\beta}_{12}^m, \\ \tilde{\alpha}_{21}^m &= \tilde{\beta}_{11}^m \tilde{\alpha}_{22}^m - \tilde{\beta}_{21}^m \tilde{\alpha}_{12}^m, \quad \tilde{\alpha}_{22}^m = \tilde{\beta}_{11}^m \tilde{\beta}_{22}^m - \tilde{\beta}_{21}^m \tilde{\beta}_{12}^m. \end{aligned}$$

Запишемо для  $u(x)$  умови спряження:

$$\begin{aligned} & \tilde{\alpha}_{11}^m u'_m(a_m) + \tilde{\beta}_{11}^m u_m(a_m) = \\ & = \tilde{\alpha}_{12}^m u'_{m+1}(a_m) + \tilde{\beta}_{12}^m u_{m+1}(a_m), \\ & \tilde{\alpha}_{21}^m u'_m(a_m) + \tilde{\beta}_{21}^m u_m(a_m) = \\ & = \tilde{\alpha}_{22}^m u'_{m+1}(a_m) + \tilde{\beta}_{22}^m u_{m+1}(a_m). \end{aligned} \quad (9)$$

Визначник алгебраїчної системи (9)

$$\begin{aligned} d_m &= \tilde{\alpha}_{11}^m \tilde{\beta}_{21}^m - \tilde{\alpha}_{21}^m \tilde{\beta}_{11}^m = \\ & = (\alpha_{11}^m - b_m^2 \delta_{11}^m)(\beta_{21}^m - b_m^2 \gamma_{21}^m) - \\ & - (\alpha_{21}^m - b_m^2 \delta_{21}^m)(\beta_{11}^m - b_m^2 \gamma_{11}^m) = \\ & = \alpha_{11}^m \beta_{21}^m - \alpha_{21}^m \beta_{11}^m + b_m^2 [-\alpha_{11}^m \gamma_{21}^m - \delta_{11}^m \beta_{21}^m + \\ & + \alpha_{21}^m \gamma_{11}^m + \beta_{11}^m \delta_{21}^m] + b_m^4 (\delta_{11}^m \gamma_{21}^m - \delta_{21}^m \gamma_{11}^m) = \\ & = -c_{11,m} + b_m^2 (-c_{11,12}^{12,m} + c_{11,12}^{21,m}) + b_m^4 c_{12,m} = \\ & = -c_{11,m} \neq 0. \end{aligned}$$

За правилами Крамера маємо співвідношення:

$$u_m(a_m) = -c_{11,m}^{-1} (\tilde{\alpha}_{11}^m u'_{m+1}(a_m) + \tilde{\alpha}_{12}^m u_{m+1}(a_m)),$$

$$u'_m(a_m) = c_{11,m}^{-1}(\tilde{a}_{21}^m u'_{m+1}(a_m) + \tilde{a}_{22}^m u_{m+1}(a_m)). \quad (10)$$

Такі ж рівності мають місце для компонент  $v_m(x)$  вектор-функції  $v(x) \in G$ :

$$v_m(a_m) = -c_{11,m}^{-1}(\tilde{a}_{11}^m v'_{m+1}(a_m) + \tilde{a}_{12}^m v_{m+1}(a_m)),$$

$$v'_m(a_m) = c_{11,m}^{-1}(\tilde{a}_{21}^m v'_{m+1}(a_m) + \tilde{a}_{22}^m v_{m+1}(a_m)). \quad (11)$$

Із рівностей (10), (11) безпосередньо одержуємо:

$$\begin{aligned} & u'_m(a_m)v_m(a_m) - u_m(a_m)v'_m(a_m) = \\ & = c_{11,m}^{-2}(\tilde{a}_{11}^m \tilde{a}_{22}^m - \tilde{a}_{12}^m \tilde{a}_{21}^m)[u'_{m+1}(a_m)v_{m+1}(a_m) - \\ & \quad - u_{m+1}(a_m)v'_{m+1}(a_m)]. \quad (12) \end{aligned}$$

В силу умов на коефіцієнти

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{11}^m \tilde{a}_{22}^m - \tilde{a}_{12}^m \tilde{a}_{21}^m &= (\tilde{\alpha}_{11}^m \tilde{\alpha}_{22}^m - \tilde{\alpha}_{21}^m \tilde{\alpha}_{12}^m)(\tilde{\beta}_{11}^m \tilde{\beta}_{22}^m - \\ & - \tilde{\beta}_{21}^m \tilde{\beta}_{12}^m) - (\tilde{\alpha}_{11}^m \tilde{\beta}_{22}^m - \tilde{\alpha}_{21}^m \tilde{\beta}_{12}^m)(\tilde{\beta}_{11}^m \tilde{\alpha}_{22}^m - \tilde{\beta}_{21}^m \tilde{\alpha}_{12}^m) = \\ & = -\tilde{\alpha}_{11}^m \tilde{\alpha}_{22}^m \tilde{\beta}_{21}^m \tilde{\beta}_{12}^m - \tilde{\alpha}_{21}^m \tilde{\alpha}_{12}^m \tilde{\beta}_{11}^m \tilde{\beta}_{22}^m + \tilde{\alpha}_{11}^m \tilde{\beta}_{22}^m \tilde{\alpha}_{12}^m \tilde{\beta}_{21}^m + \\ & + \tilde{\alpha}_{21}^m \tilde{\alpha}_{22}^m \tilde{\beta}_{11}^m \tilde{\beta}_{12}^m = -\tilde{\alpha}_{11}^m \tilde{\beta}_{21}^m (\tilde{\alpha}_{22}^m \tilde{\beta}_{12}^m - \tilde{\alpha}_{12}^m \tilde{\beta}_{22}^m) + \\ & + \tilde{\alpha}_{21}^m \tilde{\beta}_{11}^m (\tilde{\alpha}_{22}^m \tilde{\beta}_{12}^m - \tilde{\alpha}_{12}^m \tilde{\beta}_{22}^m) = c_{21,m} c_{11,m} \end{aligned}$$

Рівність (12) при  $m = k$  набуває вигляду (8).

**Теорема 2.** Якщо виконані умови на коефіцієнти, то ГДО  $\mathfrak{M}$  самоспряжений.

**Доведення.** Нехай  $u(x) \in G$  та  $v(x) \in G$ . Розглянемо скалярний добуток

$$I = (\mathfrak{M}[u], v(x)) = \sum_{m=1}^{n+1} \int_{a_{m-1}}^{u_m} L_m[u_m] \cdot v_m(x) \sigma_m dx.$$

Проінтегруємо двічі частинами під знаком інтегралів:

$$\begin{aligned} I &= \sum_{m=1}^{n+1} \sigma_m [p_m(x)(u'_m(x)v_m(x) - \\ & - u_m(x)v'_m(x))]_{a_{m-1}}^{u_m} + (u, \mathfrak{M}[v]) = (u, \mathfrak{M}[v]) + \\ & + \sigma_{n+1} p_{n+1}(b)[u'_{n+1}(b)v_{n+1}(b) - u_{n+1}(b)v'_{n+1}(b)] - \\ & - \sigma_1 p_1(a)[u'_1(a)v_1(a) - u_1(a)v'_1(a)] + \\ & + \sum_{j=1}^n \{ \sigma_j p_j(a_j)[u'_j(a_j)v_j(a_j) - u_j(a_j)v'_j(a_j)] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \sigma_{j+1} p_{j+1}(a_j)[u'_{j+1}(a_j)v_{j+1}(a_j) - \\ & - u_{j+1}(a_j)v'_{j+1}(a_j)] \}. \quad (13) \end{aligned}$$

Якщо  $\alpha_{22}^{n+1} = 0$ , то, поклавши  $\beta_{22}^{n+1} = 1$ , маємо:

$$\begin{aligned} u'_{n+1}(b)v_{n+1}(b) - u_{n+1}(b)v'_{n+1}(b) &= \\ & = u'_{n+1}(b) \cdot 0 + 0 \cdot v'_{n+1}(b) = 0. \end{aligned}$$

Якщо  $\alpha_{22}^{n+1} \neq 0$ , то

$$\begin{aligned} & u'_{n+1}(b)v_{n+1}(b) - u_{n+1}(b)v'_{n+1}(b) = \\ & = \frac{1}{\alpha_{22}^{n+1}} [\alpha_{22}^{n+1} u'_{n+1}(b) + \beta_{22}^{n+1} u_{n+1}(b)] v_{n+1}(b) - \\ & - \frac{\beta_{22}^{n+1}}{\alpha_{22}^{n+1}} u_{n+1}(b) v_{n+1}(b) - u_{n+1}(b) v'_{n+1}(b) = \\ & = (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} \cdot 0 \cdot v_{n+1}(b) - (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} u_{n+1}(b) \times \\ & \quad \times [\alpha_{22}^{n+1} v'_{n+1}(b) + \beta_{22}^{n+1} v_{n+1}(b)] = 0. \end{aligned}$$

Аналогічні міркування показують, що  $u'_1(a)v_1(a) - u_1(a)v'_1(a) = 0$ .

В силу базової тотожності (8)

$$\begin{aligned} & \sigma_j p_j(a_j)[u'_j(a_j)v_j(a_j) - u_j(a_j)v'_j(a_j)] = \\ & = \sigma_j p_j(a_j) \frac{c_{21,j}}{c_{11,j}} [u'_{j+1}(a_j)v_{j+1}(a_j) - \\ & - v'_{j+1}(a_j)u_{j+1}(a_j)]. \end{aligned}$$

Внаслідок цього маємо суму:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n [\sigma_j p_j(a_j) \frac{c_{21,j}}{c_{11,j}} - \sigma_{j+1} p_{j+1}(a_j)] \times \\ & \times [u'_{j+1}(a_j)v_{j+1}(a_j) - u_{j+1}(a_j)v'_{j+1}(a_j)]. \end{aligned}$$

Звідси випливає рівність

$$\sigma_j p_j(a_j) \frac{c_{21,j}}{c_{11,j}} - \sigma_{j+1} p_{j+1}(a_j) = 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Якщо покласти  $\sigma_{n+1} p_{n+1}(a_n) = 1$ , то маємо рекурентні співвідношення

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} &= \frac{1}{p_{n+1}(a_n)}, \quad \sigma_j = \prod_{m=j}^n \frac{c_{11,m} p_{m+1}(a_m)}{c_{21,m} p_{m+1}(a_{m+1})} \times \\ & \times \frac{p_{n+1}(a_{n+1})}{p_j(a_j) p_{n+1}(a_n)}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (14) \end{aligned}$$

При такому виборі чисел  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \sigma_{n+1}$  рівність (13) набуває вигляду:

$$(\mathfrak{M}[u], v(x)) = (u, \mathfrak{M}[v(x)]).$$

Значить, оператор  $\mathfrak{M}$  самоспряжений. Отже, його спектр дійсний [2].

**Висновок.** Для того, щоб ГДО  $\mathfrak{M}$  був самоспряженим, необхідно й досить, щоб числа  $\sigma_j$  визначалися із рекурентних співвідношень (13).

Фундаментальну систему розв'язків для рівняння

$$[L_m + b_m^2 \rho_m(x)]u_m(x) = 0, \quad m = \overline{1, n+1} \quad (15)$$

утворюють регулярні функції  $u_{1m}(x, b_m)$  та  $u_{2m}(x, b_m)$  [3].

Загальним розв'язком рівняння (10) є функція

$$V_m(x, \lambda) = A_m u_{1m}(x, b_m) + B_m u_{2m}(x, b_m), \quad m = \overline{1, n+1}. \quad (16)$$

Визначимо функції

$$U_{ik,s}^{m1}(a_m, b_m(\lambda)) = (\tilde{\alpha}_{ik}^m d/dx + \tilde{\beta}_{ik}^m) u_{1s}(x, b_m) \Big|_{x=a_m}$$

$$U_{ik,s}^{m2}(a_m, b_m(\lambda)) = (\tilde{\alpha}_{ik}^m d/dx + \tilde{\beta}_{ik}^m) u_{2s}(x, b_m) \Big|_{x=a_m}$$

Крайові умови (2) та умови спряження (3) для визначення  $(2n+2)$  невідомих  $A_m, B_m$  ( $m = \overline{1, n+1}$ ) дають алгебраїчну систему з  $(2n+2)$  рівнянь:

$$U_{11,1}^{01}(a, b_1(\lambda))A_1 + U_{11,1}^{02}(a, b_1(\lambda))B_1 = 0,$$

$$k = 1, 2, m = \overline{1, n},$$

$$U_{j1,m}^{m1}(a_m, b_m)A_m + U_{j1,m}^{m2}(a_m, b_m)B_m - U_{j2,m+1}^{m1}(a_m, b_{m+1})A_{m+1} - U_{j2,m+1}^{m2}(a_m, b_{m+1})B_{m+1} = 0, \quad (17)$$

$$U_{22,n+1}^{n+1,1}(b, b_{n+1})A_{n+1} + U_{22,n+1}^{n+1,2}(b, b_{n+1})B_{n+1} = 0.$$

Для того, щоб алгебраїчна система (12) мала ненульові розв'язки, необхідно й досить, щоб її визначник був рівний нулю [4]:

$$\Delta_n(\lambda) = 0. \quad (18)$$

Оскільки параметр  $\lambda$  входить в систему (1) аналітично, то фундаментальна система розв'язків

$$\{u_{1m}(x, \lambda); u_2(x, \lambda)\}_{m=1}^{n+1}$$

є цілими функціями цього параметра на площині  $\lambda$ . Тоді функції  $U_{ik,s}^{mj}(a_m, \lambda)$  теж є цілими аналітичними функціями параметра  $\lambda$ . Тому  $\Delta_n(\lambda)$  – ціла аналітична функція параметра  $\lambda$ . Оскільки  $\Delta_n(\lambda) \neq 0$ , то згідно теореми про нулі аналітичної функції [3], корені трансцендентного рівняння (13) є ізольованими точками на площині  $\lambda$ . Отже, множина власних чисел крайової задачі (1) – (3) не більше, ніж зліченна, й не має жодної скінченної граничної точки на площині  $\lambda$ . Іншими словами, точкою згущення нулів трансцендентного рівняння (13) є нескінченно віддалена точка.

**Висновок.** Власні числа оператора  $L$  дійсні й утворюють дискретну множину.

Введемо до розгляду функції:

$$\Psi_{ij}^m(a_m, b_m, b_{m+1}) = U_{12,m+1}^{mi}(a_m, b_{m+1}) \times$$

$$\times U_{21,m}^{mj}(a_m, b_m) - U_{11,m}^{mj}(a_m, b_m) U_{22,m+1}^{mi}(a_m, b_{m+1})$$

$$k_1^{(0)}(a_0, \lambda) = U_{11,1}^{01}(a, b_1),$$

$$k_2^{(0)}(a_0, \lambda) = U_{11,1}^{02}(a, b_1), a_0 = a,$$

$$k_j^{(1)}(a_0, a_1, b_1, b_2) = k_1^{(0)}(a_0, \lambda) \Psi_{j2}^1(a_1, b_1, b_2) - k_2^{(0)}(a_0, \lambda) \Psi_{j1}^1(a_1, b_1, b_2), \quad j = 1, 2,$$

$$\dots \dots \dots k_j^{(p)}(a_0, a_1, \dots, a_p; b_1, b_2, \dots, b_{p+1}) =$$

$$= k_1^{(p-1)}(a_0, a_1, \dots, a_{p-1}; b_1, b_2, \dots, b_p) \times \Psi_{j2}^p(a_p, b_p, b_{p+1}) - k_2^{(p-1)}(a_0, a_1, \dots, a_{p-1}; b_1, b_2, \dots, b_p) \times \Psi_{j1}^p(a_p, b_p, b_{p+1}), \quad p = \overline{1, n}.$$

Для знаходження власних чисел ГДО  $\mathfrak{M}$  маємо рекурентні співвідношення:

$$\Delta_n(\lambda) \equiv U_{22,n+1}^{n+1,2}(a_{n+1}, b_{n+1}) k_1^{(n)}(a_0, a_1, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1}) - U_{22,n+1}^{n+1,1}(a_{n+1}, b_{n+1}) \times$$

$$\times k_2^{(n)}(a_0, a_1, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1}) = 0. \quad (19)$$

Корінь  $\lambda_j$  ( $b_{mj} = \sqrt{\lambda_j^2 + b_m^2}$ ) рівняння (19) підставимо в алгебраїчну систему (17) й відкинемо останнє рівняння внаслідок лінійної залежності. Покладемо  $A_1 = A_0 U_{11,1}^{02}(a_0, b_{1j})$ ,  $B_1 = -A_0 U_{11,1}^{01}(a_0, b_{1j})$ , де величина  $A_0$  підлягає визначенню. Перше рівняння стає тотожністю, а решта утворюють попарно сепаратну систему:

$$U_{i2,m+1}^{m1}(a_m, b_{m+1,j})A_{m+1} + U_{i2,m+1}^{m2}(a_m, b_{m+1,j})B_{m+1} = U_{i1,m}^{m1}(a_m, b_{mj})A_m + U_{i1,m}^{m2}(a_m, b_{mj})B_m, \quad m = \overline{1, n}, i = 1, 2. \quad (20)$$

Визначник алгебраїчної системи (20)

$$\Delta_{m+1}(\lambda_j) \equiv U_{12,m+1}^{m1}(a_m, b_{m+1,j}) \times U_{22,m+1}^{m2}(a_m, b_{m+1,j}) - U_{22,m+1}^{m1}(a_m, b_{m+1,j}) U_{12,m+1}^{m2}(a_m, b_{m+1,j}) = c_{21,m} W[u_{1,m+1}(x, b_{m+1,j}), u_{2,m+1}(x, b_{m+1,j})] \equiv c_{21,m} \delta_{m+1}(\lambda_j) \neq 0. \quad (21)$$

Отже, алгебраїчна системи (20) має єдиний розв'язок. Згідно правил Крамера знаходимо:

$$A_2 = \frac{A_0}{c_{21,1} \delta_2(\lambda_j)} k_2^{(1)}(a_0, a_1, b_{1j}, b_{2j}),$$

$$B_2 = -\frac{A_0}{c_{21,1} \delta_2(\lambda_j)} k_1^{(1)}(a_0, a_1, b_{1j}, b_{2j}),$$

$$A_3 = \frac{A_0}{\Delta_2(\lambda_j) \Delta_3(\lambda_j)} k_2^{(2)}(a_0, a_1, a_2; b_{1j}, b_{2j}, b_{3j}),$$

$$B_3 = -\frac{A_0}{\Delta_2(\lambda_j) \Delta_3(\lambda_j)} k_1^{(2)}(a_0, a_1, a_2; b_{1j}, b_{2j}, b_{3j}),$$

.....

$$A_{m+1} = \frac{A_0}{\prod_{i=2}^{m+1} \Delta_i(\lambda_j)} k_2^{(m)}(a_0, a_1, a_2, \dots, a_m; b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{m+1,j}), m = \overline{1, n},$$

$$B_{m+1} = -\frac{A_0}{\prod_{i=2}^{m+1} c_{21,i-1} \Delta_i(\lambda_j)} \times$$

$$k_1^{(m)}(a_0, a_1, a_2, \dots, a_m; b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{m+1,j}).$$

$$\text{Покладемо } A_0 = \prod_{i=2}^{n+1} \Delta_i(\lambda_j) \equiv$$

$$\prod_{i=2}^{n+1} c_{21,i-1} \delta_i(\lambda_j). \text{ Одержуємо:}$$

$$V_{m+1}(x, \lambda_j) = A_{m+1} u_{1,m+1}(x, b_{m+1,j}) + B_{m+1} u_{2,m+1}(x, b_{m+1,j}) = \left[ \prod_{i=m+2}^{n+1} c_{21,i-1} \delta_i(\lambda_j) \right] \{ k_2^{(m)}(a_1, a_1, \dots, a_m; b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{m+1,j}) u_{1,m+1}(x, b_{m+1,j}) - k_1^{(m)}(a_1, a_1, \dots, a_m; b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{m+1,j}) \times u_{2,m+1}(x, b_{m+1,j}) \}; \quad m = \overline{0, n-1}, \quad (22)$$

$$V_{n+1}(x, \lambda_j) = k_2^{(n)}(a_1, a_1, \dots, a_n; b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{n+1,j}) u_{1,n+1}(x, b_{n+1,j}) - k_1^{(n)}(a_1, a_1, \dots, a_n; b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{n+1,j}) \times u_{2,n+1}(x, b_{n+1,j}).$$

За відомими  $V_m(x, \lambda_j)$  ( $m = \overline{1, n+1}$ ) стає відомою власна вектор-функція  $V(x, \lambda_j)$ , що відповідає власному числу  $\lambda_j$ :

$$V(x, \lambda_j) = \sum_{m=1}^{n+1} \theta(x - a_{m-1}) \theta(a_m - x) V_m(x, \lambda_j). \quad (23)$$

Обчислимо квадрат норми власної функції  $V(x, \lambda_j)$ .

Для  $\lambda_i \neq \lambda_j$  розглянемо  $V_m(x, \lambda_i)$  та  $V_m(x, \lambda_j)$ . За побудовою функція  $V_m(x, \lambda_i)$  задовольняє рівняння

$$[L_m + a_m^{-2}(\lambda_i^2 + k_m^2) \rho_m(x)] V_m(x, \lambda_i) = 0, \quad (24)$$

а функція  $V_m(x, \lambda_j)$  задовольняє рівняння

$$[L_m + a_m^{-2}(\lambda_j^2 + k_m^2) \rho_m(x)] V_m(x, \lambda_j) = 0. \quad (25)$$

Рівняння (24) помножимо на функцію  $V_m(x, \lambda_j)$ , а рівняння (25) помножимо на функцію  $V_m(x, \lambda_i)$  й відніmemo від першого друге:

$$V_m(x, \lambda_j) L_m [V_m(x, \lambda_i)] - V_m(x, \lambda_i) L_m [V_m(x, \lambda_j)] +$$

$$+[b_m^2(\lambda_i) - b_m^2(\lambda_j)]V_m(x, \lambda_i)V_m(x, \lambda_j) = 0.$$

Одержану рівність перепишемо так:

$$\begin{aligned} [b_m^2(\lambda_i) - b_m^2(\lambda_j)]V_m(x, \lambda_i)V_m(x, \lambda_j)\rho_m(x) = \\ = \frac{d}{dx} \left\{ p_m(x) \left[ V_m(x, \lambda_i) \frac{dV_m(x, \lambda_j)}{dx} - \right. \right. \\ \left. \left. - V_m(x, \lambda_j) \frac{dV_m(x, \lambda_i)}{dx} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Рівність (26) помножимо на  $\sigma_m dx$  та проінтегруємо по  $x$  від  $x = a_{m-1}$  до  $x = a_m$ :

$$\begin{aligned} \int_{a_{m-1}}^{a_m} V_m(x, \lambda_i)V_m(x, \lambda_j)\sigma_m \rho_m(x) dx = \\ = \frac{\sigma_m p_m(x)}{b_m^2(\lambda_i) - b_m^2(\lambda_j)} \left[ V_m(x, \lambda_i) \frac{dV_m(x, \lambda_j)}{dx} - \right. \\ \left. - V_m(x, \lambda_j) \frac{dV_m(x, \lambda_i)}{dx} \right] \Big|_{a_{m-1}}^{a_m}. \end{aligned}$$

Просумуємо по  $m$  від  $m = 1$  до  $m = n + 1$ :

$$\begin{aligned} \int_a^b V(x, \lambda_i)V(x, \lambda_j)\sigma(x)\rho(x) dx = \\ = \sum_{m=1}^{n+1} \frac{\sigma_m p_m(x)}{b_m^2(\lambda_i) - b_m^2(\lambda_j)} \left[ V_m(x, \lambda_i) \frac{dV_m(x, \lambda_j)}{dx} - \right. \\ \left. - V_m(x, \lambda_j) \frac{dV_m(x, \lambda_i)}{dx} \right] \Big|_{a_{m-1}}^{a_m}. \end{aligned} \quad (27)$$

Праву частину рівності (27) зобразимо у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_n = - \frac{a_{n+1}^2 \sigma_{n+1} p_{n+1}(a_{n+1})}{\lambda_i^2 - \lambda_j^2} \times \\ \times [-V_{n+1}(a_{n+1}, \lambda_i)V'_{n+1}(a_{n+1}, \lambda_j) + V_{n+1}(a_{n+1}, \lambda_j) \times \\ \times V'_{n+1}(a_{n+1}, \lambda_i)] + \sum_{s=1}^n \left\{ \frac{a_s^2 \sigma_s p_s(a_s)}{\lambda_i^2 - \lambda_j^2} [V_s(a_s, \lambda_i) \times \right. \\ \times V'_s(a_s, \lambda_j) - V_s(a_s, \lambda_j)V'_s(a_s, \lambda_i)] - \\ \left. - \frac{a_{s+1}^2 \sigma_{s+1} p_{s+1}(a_{s+1})}{\lambda_i^2 - \lambda_j^2} [V_{s+1}(a_{s+1}, \lambda_i)V'_{s+1}(a_{s+1}, \lambda_j) - \right. \\ \left. - V_{s+1}(a_{s+1}, \lambda_j)V'_{s+1}(a_{s+1}, \lambda_i)] \right\} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \frac{a_1^2 \sigma_1 p_1(a_0)}{\lambda_i^2 - \lambda_j^2} [-V_1(a_0, \lambda_i)V'_1(a_0, \lambda_j) + \\ + V_1(a_0, \lambda_j)V'_1(a_0, \lambda_i)]. \end{aligned} \quad (28)$$

Функції  $V_m(x, \lambda)$  задовольняють умови спряження. В силу рівностей (10) маємо співвідношення:

$$\begin{aligned} V_s(a_s, \lambda_i) = -c_{11,s}^{-1} [\tilde{a}_{11}^s(\lambda_i)V'_{s+1}(a_s, \lambda_i) + \\ + \tilde{a}_{12}^s(\lambda_i)V_{s+1}(a_s, \lambda_i)], \\ V'_s(a_s, \lambda_i) = c_{11,s}^{-1} [\tilde{a}_{21}^s(\lambda_i)V'_{s+1}(a_s, \lambda_i) + \\ + \tilde{a}_{22}^s(\lambda_i)V_{s+1}(a_s, \lambda_i)], \\ V_s(a_s, \lambda_j) = -c_{11,s}^{-1} [\tilde{a}_{11}^s(\lambda_j)V'_{s+1}(a_s, \lambda_j) + \\ + \tilde{a}_{12}^s(\lambda_j)V_{s+1}(a_s, \lambda_j)], \\ V'_s(a_s, \lambda_j) = c_{11,s}^{-1} [\tilde{a}_{21}^s(\lambda_j)V'_{s+1}(a_s, \lambda_j) + \\ + \tilde{a}_{22}^s(\lambda_j)V_{s+1}(a_s, \lambda_j)]. \end{aligned} \quad (29)$$

На основі рівностей (29) безпосередніми підрахунками знаходимо:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{11}^s(q_{sj})\tilde{\beta}_{11}^s(q_{si}) - \tilde{\alpha}_{11}^s(q_{si})\tilde{\beta}_{11}^s(q_{sj}) = \\ = (q_{sj} - q_{si})_R C_{11,12}^{11,s}, \\ \tilde{\alpha}_{21}^s(q_{si})\tilde{\beta}_{11}^s(q_{sj}) - \tilde{\alpha}_{11}^s(q_{sj})\tilde{\beta}_{21}^s(q_{si}) = \\ = c_{11,s} + {}_R C_{11,12}^{12,s} q_{si} - {}_R C_{11,12}^{21,s} q_{sj}, \\ \tilde{\alpha}_{21}^s(q_{sj})\tilde{\beta}_{11}^s(q_{si}) - \tilde{\alpha}_{11}^s(q_{si})\tilde{\beta}_{21}^s(q_{sj}) = \\ = c_{11,s} + {}_R C_{11,12}^{12,s} q_{sj} - {}_R C_{11,12}^{21,s} q_{si}, \\ \tilde{\alpha}_{21}^s(q_{sj})\tilde{\beta}_{21}^s(q_{si}) - \tilde{\alpha}_{21}^s(q_{si})\tilde{\beta}_{21}^s(q_{sj}) = \\ = (q_{sj} - q_{si})_R C_{11,12}^{22,s} \end{aligned} \quad (30)$$

Буква  $R$  означає, що беруться елементи із рядків:  ${}_R C_{11,12}^{11} = \alpha_{11}^s \gamma_{11}^s - \beta_{11}^s \delta_{11}^s$  - визначник другого порядку, в якому перший рядок утворюють елементи першого рядка матриці  $A_{11,s}$ , а другий рядок - елементи першого рядка матриці  $A_{12,s}, \dots$

Зауважимо, що із рівності  $C_{11,12}^{12,s} = C_{11,12}^{21,s}$  одразу випливає рівність  ${}_R C_{11,12}^{12,s} = {}_R C_{11,12}^{21,s}$ .

Розглянемо вираз

$$I_s \equiv V_s(a_s, \lambda_i)V'_s(a_s, \lambda_j) - V_s(a_s, \lambda_j)V'_s(a_s, \lambda_i). \quad (31)$$

В силу співвідношень (29) маємо:

$$I_s = \frac{1}{c_{11,s}^2} \{ [\tilde{a}_{11}^s(\lambda_j) \tilde{a}_{21}^s(\lambda_i) - \tilde{a}_{11}^s(\lambda_i) \tilde{a}_{21}^s(\lambda_j)] \times \\ \times V'_{s+1}(a_s, \lambda_i) V'_{s+1}(a_s, \lambda_j) + [\tilde{a}_{12}^s(\lambda_j) \tilde{a}_{22}^s(\lambda_i) - \\ - \tilde{a}_{12}^s(\lambda_i) \tilde{a}_{22}^s(\lambda_j)] V_{s+1}(a_s, \lambda_i) V_{s+1}(a_s, \lambda_j) + \\ + [\tilde{a}_{11}^s(\lambda_j) \tilde{a}_{22}^s(\lambda_i) - \tilde{a}_{12}^s(\lambda_i) \tilde{a}_{21}^s(\lambda_j)] V'_{s+1}(a_s, \lambda_j) \times \\ \times V_{s+1}(a_s, \lambda_i) - [\tilde{a}_{11}^s(\lambda_i) \tilde{a}_{22}^s(\lambda_j) - \tilde{a}_{21}^s(\lambda_i) \tilde{a}_{12}^s(\lambda_j)] \times \\ \times V'_{s+1}(a_s, \lambda_i) V_{s+1}(a_s, \lambda_j) \}.$$

На основі рівностей (25) встановлюємо:

1)

$$\tilde{a}_{11}^s(\lambda_j) \tilde{a}_{21}^s(\lambda_i) - \tilde{a}_{11}^s(\lambda_i) \tilde{a}_{21}^s(\lambda_j) = (q_{sj} - q_{si}) \times \\ \times \{ \tilde{\alpha}_{22}^s(q_{si}) \tilde{\alpha}_{22}^s(q_{sj}) R C_{11,12}^{11,s} + \tilde{\alpha}_{12}^s(q_{si}) \tilde{\alpha}_{12}^s(q_{sj}) \times \\ \times R C_{11,12}^{22,s} - R C_{11,12}^{12,s} [\tilde{\alpha}_{12}^s(q_{si}) \tilde{\alpha}_{22}^s(q_{sj}) + \tilde{\alpha}_{12}^s(q_{sj}) \times \\ \times \tilde{\alpha}_{22}^s(q_{si})] - c_{11,s} C_{21,22}^{11,s} \},$$

2)

$$\tilde{a}_{11}^s(\lambda_j) \tilde{a}_{22}^s(\lambda_i) - \tilde{a}_{12}^s(\lambda_i) \tilde{a}_{22}^s(\lambda_j) = (q_{sj} - q_{si}) \times \\ \times \{ \tilde{\beta}_{22}^s(q_{si}) \tilde{\beta}_{22}^s(q_{sj}) R C_{11,12}^{11,s} + \tilde{\beta}_{12}^s(q_{si}) \tilde{\beta}_{12}^s(q_{sj}) \times \\ \times R C_{11,12}^{22,s} - R C_{11,12}^{12,s} [\tilde{\beta}_{12}^s(q_{si}) \tilde{\beta}_{22}^s(q_{sj}) + \tilde{\beta}_{12}^s(q_{sj}) \times \\ \times \tilde{\beta}_{22}^s(q_{si})] - c_{11,s} C_{21,22}^{11,s} \}, \quad (33)$$

3)

$$\tilde{a}_{11}^s(\lambda_j) \tilde{a}_{22}^s(\lambda_i) - \tilde{a}_{12}^s(\lambda_i) \tilde{a}_{21}^s(\lambda_j) = (q_{sj} - q_{si}) \times \\ \times \{ \tilde{\alpha}_{22}^s(q_{sj}) \tilde{\beta}_{22}^s(q_{si}) R C_{11,12}^{11,s} + \tilde{\alpha}_{12}^s(q_{sj}) \tilde{\beta}_{12}^s(q_{si}) \times \\ \times R C_{11,12}^{22,s} - R C_{11,12}^{12,s} [\tilde{\beta}_{12}^s(q_{si}) \tilde{\alpha}_{22}^s(q_{sj}) + \tilde{\alpha}_{12}^s(q_{sj}) \times \\ \times \tilde{\beta}_{22}^s(q_{si})] - c_{11,s} C_{21,22}^{12,s} \} + c_{11,s} c_{21,s},$$

4)

$$\tilde{a}_{11}^s(\lambda_i) \tilde{a}_{22}^s(\lambda_j) - \tilde{a}_{21}^s(\lambda_i) \tilde{a}_{12}^s(\lambda_j) = -(q_{sj} - q_{si}) \times \\ \times \{ \tilde{\alpha}_{22}^s(q_{si}) \tilde{\beta}_{22}^s(q_{sj}) R C_{11,12}^{11,s} + \tilde{\alpha}_{12}^s(q_{si}) \tilde{\beta}_{12}^s(q_{sj}) \times \\ \times R C_{11,12}^{22,s} - R C_{11,12}^{12,s} [\tilde{\alpha}_{22}^s(q_{si}) \tilde{\beta}_{12}^s(q_{sj}) + \tilde{\alpha}_{12}^s(q_{si}) \times \\ \times \tilde{\beta}_{22}^s(q_{sj})] - c_{11,s} C_{21,22}^{12,s} \} + c_{11,s} c_{21,s}.$$

Підстановка рівностей (32) у вираз (31) дає:

$$c_{11,s}^2 I = (q_{sj} - q_{si}) \{ [R C_{11,12}^{11,s} Z_{22}^s(a_s, \lambda_j) Z_{22}^s(a_s, \lambda_i) +$$

$$+ R C_{11,12}^{22,s} Z_{12}^s(a_s, \lambda_j) Z_{12}^s(a_s, \lambda_i) - R C_{11,12}^{12,s} \times \\ \times [Z_{12}^s(a_s, \lambda_i) Z_{22}^s(a_s, \lambda_j) + Z_{12}^s(a_s, \lambda_j) Z_{22}^s(a_s, \lambda_i)] - \\ - c_{11,s} [C_{21,22}^{11,s} V'_{s+1}(a_s, \lambda_i) V'_{s+1}(a_s, \lambda_j) + C_{21,22}^{12,s} \times \\ \times (V'_{s+1}(a_s, \lambda_j) V_{s+1}(a_s, \lambda_i) + V_{s+1}(a_s, \lambda_j) \times \\ \times V'_{s+1}(a_s, \lambda_i)) + C_{21,22}^{22,s} V_{s+1}(a_s, \lambda_i) V_{s+1}(a_s, \lambda_j)] \} + \\ + c_{11,s} c_{21,s} [V'_{s+1}(a_s, \lambda_j) V_{s+1}(a_s, \lambda_i) - \\ - V'_{s+1}(a_s, \lambda_i) V_{s+1}(a_s, \lambda_j)]. \quad (34)$$

У рівності (34) беруть участь функції

$$Z_{m2}^s(a_s, \lambda_j) = \tilde{\alpha}_{m2}^s(q_{sj}) V'_{s+1}(a_s, \lambda_j) + \\ + \tilde{\beta}_{m2}^s(q_{sj}) V_{s+1}(a_s, \lambda_j), \quad m = 1, 2, \\ Z_{m2}^s(a_s, \lambda_i) = \tilde{\alpha}_{m2}^s(q_{si}) V'_{s+1}(a_s, \lambda_i) + \\ + \tilde{\beta}_{m2}^s(q_{si}) V_{s+1}(a_s, \lambda_i).$$

Оскільки

$$R C_{11,12}^{11,s} R C_{11,22}^{12,s} - R C_{11,12}^{12,s} R C_{11,22}^{21,s} = \\ = c_{11,s} c_{12,s} = c_{11,s} \cdot 0 = 0, \\ C_{21,22}^{11,s} C_{21,22}^{22,s} - C_{21,22}^{12,s} C_{21,22}^{21,s} = \\ = c_{21,s} c_{22,s} = c_{21,s} \cdot 0 = 0,$$

та  $R C_{11,12}^{12,s} = R C_{11,12}^{21,s}$  і  $C_{21,22}^{12,s} = C_{21,22}^{21,s}$ , то маємо рівності:

$$R C_{11,12}^{11,s} R C_{11,22}^{22,s} = (R C_{11,12}^{12,s})^2, \\ C_{21,22}^{11,s} C_{21,22}^{22,s} = (C_{21,22}^{12,s})^2.$$

Вираз  $I$  набуває вигляду:

$$c_{11,s}^2 I = (q_{sj} - q_{si}) \{ \{ \sqrt{R C_{11,12}^{11,s}} Z_{22}^s(a_s, \lambda_j) - \\ - \sqrt{R C_{11,12}^{22,s}} Z_{12}^s(a_s, \lambda_j) \} [ \sqrt{R C_{11,12}^{11,s}} Z_{22}^s(a_s, \lambda_i) \\ - \sqrt{R C_{11,12}^{22,s}} Z_{12}^s(a_s, \lambda_i) ] - c_{11,s} [ ( \sqrt{C_{21,22}^{11,s}} V'_{s+1}(a_s, \lambda_j) + \\ + \sqrt{C_{21,22}^{22,s}} V_{s+1}(a_s, \lambda_j) ) ( \sqrt{C_{21,22}^{11,s}} V'_{s+1}(a_s, \lambda_i) + \\ + \sqrt{C_{21,22}^{22,s}} V_{s+1}(a_s, \lambda_i) ) ] \} + c_{11,s} \cdot c_{21,s} \times \\ \times [ V'_{s+1}(a_s, \lambda_j) V_{s+1}(a_s, \lambda_i) - V'_{s+1}(a_s, \lambda_i) \times \\ \times V_{s+1}(a_s, \lambda_j) ]. \quad (35)$$

Внаслідок вибору чисел  $\sigma_s$

$$a_s^2 \sigma_s p_s(a_s) \cdot \frac{c_{21,s}}{c_{11,s}} - a_{s+1}^2 \sigma_{s+1} p_{s+1}(a_s) = 0.$$

Оскільки  $q_{sj} - q_{si} = \lambda_j^2 + k_s^2 - (\lambda_i^2 + k_s^2) = \lambda_j^2 - \lambda_i^2$ , то сума, яка бере участь у виразі (23), набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 \equiv & - \sum_{s=1}^n a_s^2 \sigma_s p_s(a_s) \bar{c}_{11,s}^2 \{ [\sqrt{{}_R C_{11,12}^{11,s}} Z_{22}^s(a_s, \lambda_j) - \\ & - \sqrt{{}_R C_{11,12}^{22,s}} Z_{12}^s(a_s, \lambda_j)] \times \\ & \times [\sqrt{{}_R C_{11,12}^{11,s}} Z_{22}^s(a_s, \lambda_i) - \sqrt{{}_R C_{11,12}^{22,s}} Z_{12}^s(a_s, \lambda_i)] + \\ & + c_{11,s} [(\sqrt{\bar{C}_{21,22}^{11,s}} V_{s+1}'(a_s, \lambda_j) + \sqrt{\bar{C}_{21,22}^{12,s}} \times \\ & \times V_{s+1}(a_s, \lambda_j) (\sqrt{\bar{C}_{21,22}^{11,s}} V_{s+1}'(a_s, \lambda_i) + \\ & + \sqrt{\bar{C}_{21,22}^{12,s}} V_{s+1}(a_s, \lambda_i)))] \} \equiv -\mathcal{R}_n^*(\lambda_i, \lambda_j), \\ \bar{C}_{21,22}^{11,s} = & -C_{21,22}^{11,s} = \alpha_{22}^s \delta_{12}^s - \alpha_{12}^s \delta_{22}^s \geq 0, \\ \bar{C}_{21,22}^{22,s} = & \beta_{22}^s \gamma_{12}^s - \beta_{12}^s \gamma_{22}^s \geq 0. \end{aligned}$$

Розглянемо вираз

$$\begin{aligned} & [\alpha_{11}^0 V_1'(a_0, \lambda_i) + \beta_{11}^0 V_1(a_0, \lambda_i)] \times \\ & \times [\delta_{11}^0 V_1'(a_0, \lambda_j) + \gamma_{11}^0 V_1(a_0, \lambda_j)] - \\ & - [\alpha_{11}^0 V_1'(a_0, \lambda_j) + \beta_{11}^0 V_1(a_0, \lambda_j)] \times \\ & \times [\delta_{11}^0 V_1'(a_0, \lambda_i) + \gamma_{11}^0 V_1(a_0, \lambda_j)] = \\ & = (\alpha_{11}^0 \gamma_{11}^0 - \beta_{11}^0 \delta_{11}^0) \times \\ & \times [V_1(a_0, \lambda_j) V_1'(a_0, \lambda_i) - V_1(a_0, \lambda_i) V_1'(a_0, \lambda_j)]. \end{aligned} \quad (37)$$

Із крайової умови в точці  $a_0$  маємо рівності:

$$\begin{aligned} & \alpha_{11}^0 V_1'(a_0, \lambda_i) + \beta_{11}^0 V_1(a_0, \lambda_i) = \\ & = q_{1i} [\delta_{11}^0 V_1'(a_0, \lambda_i) + \gamma_{11}^0 V_1(a_0, \lambda_i)], \\ & \alpha_{11}^0 V_1'(a_0, \lambda_j) + \beta_{11}^0 V_1(a_0, \lambda_j) = \\ & = q_{1j} [\delta_{11}^0 V_1'(a_0, \lambda_j) + \gamma_{11}^0 V_1(a_0, \lambda_j)]. \end{aligned} \quad (38)$$

Із (37) внаслідок співвідношень (38) знаходимо:

$$V_1(a_0, \lambda_j) V_1'(a_0, \lambda_i) - V_1(a_0, \lambda_i) V_1'(a_0, \lambda_j) =$$

$$\begin{aligned} & = \frac{q_{1i} - q_{1j}}{\alpha_{11}^0 \gamma_{11}^0 - \beta_{11}^0 \delta_{11}^0} \times \\ & \times [\delta_{11}^0 V_1'(a_0, \lambda_i) + \gamma_{11}^0 V_1(a_0, \lambda_i)] \times \\ & \times [\delta_{11}^0 V_1'(a_0, \lambda_j) + \gamma_{11}^0 V_1(a_0, \lambda_j)]. \end{aligned}$$

Аналогічно знаходимо:

$$\begin{aligned} & V_{n+1}(a_{n+1}, \lambda_j) V_{n+1}'(a_{n+1}, \lambda_i) - \\ & - V_{n+1}(a_{n+1}, \lambda_i) V_{n+1}'(a_{n+1}, \lambda_j) = \\ & = \frac{q_{n+1,i} - q_{n+1,j}}{\alpha_{22}^{n+1} \gamma_{22}^{n+1} - \beta_{22}^{n+1} \delta_{22}^{n+1}} \times \\ & \times [\delta_{22}^{n+1} V_{n+1}'(a_{n+1}, \lambda_i) + \gamma_{22}^{n+1} V_{n+1}(a_{n+1}, \lambda_i)] \times \\ & \times [\delta_{22}^{n+1} V_{n+1}'(a_{n+1}, \lambda_j) + \gamma_{22}^{n+1} V_{n+1}(a_{n+1}, \lambda_j)]. \end{aligned}$$

На основі обчислених співвідношень вираз (28) набуває вигляду:

$$\mathcal{R}_n = - \frac{a_{n+1}^2 \sigma_{n+1} p_{n+1}(a_{n+1})}{\alpha_{22}^{n+1} \gamma_{22}^{n+1} - \beta_{22}^{n+1} \delta_{22}^{n+1}} \times$$

$$\begin{aligned} & \times Z_{22}^{n+1}(a_{n+1}, \lambda_i) Z_{22}^{n+1}(a_{n+1}, \lambda_j) - \\ & - \mathcal{R}_n^*(\lambda_i, \lambda_j) - \frac{a_1^2 \sigma_1 p_1(a_0)}{\beta_{11}^0 \delta_{11}^0 - \alpha_{11}^0 \gamma_{11}^0} \times \end{aligned}$$

$$\times Z_{11}^0(a_0, \lambda_0) Z_{11}^0(a_0, \lambda_j) \equiv -\theta_n(\lambda_i, \lambda_j),$$

$$Z_{11}^0(a_0, \lambda) = \delta_{11}^0 V_1'(a_0, \lambda) + \gamma_{11}^0 V_1(a_0, \lambda),$$

$$\begin{aligned} Z_{22}^{n+1}(a_{n+1}, \lambda) = & \delta_{22}^{n+1} V_{n+1}'(a_{n+1}, \lambda) + \\ & + \gamma_{22}^n V_{n+1}(a_{n+1}, \lambda). \end{aligned}$$

Ми вважаємо, що  $(\alpha_{22}^{n+1} \gamma_{22}^{n+1} - \beta_{22}^{n+1} \delta_{22}^{n+1}) \equiv q_{n+1} > 0$ ,  $(\beta_{11}^0 \delta_{11}^0 - \alpha_{11}^0 \gamma_{11}^0) \equiv q_0 > 0$ .

Повертаючись до рівностей (22), маємо:

$$\int_a^b V(x, \lambda_i) V(x, \lambda_j) \sigma(x) \rho(x) dx + \theta_n(\lambda_i, \lambda_j) = 0. \quad (40)$$

Рівність (40) при  $\lambda_i \neq \lambda_j$  означає, що система власних вектор-функцій  $\{V(x, \lambda_j)\}_{j=1}^{\infty}$  узагальнено ортогональна.

Ліва частина рівності (40) при  $\lambda_i = \lambda_j$  визначає квадрат норми власної вектор-функції

$$\|V(x, \lambda_j)\|_1^2 = \int_a^b [V(x, \lambda_j)]^2 \sigma(x) \rho(x) dx +$$

$$+\theta_n(\lambda_j, \lambda_j). \quad (41)$$

У рівності (41) функція

$$\begin{aligned} \theta_n(\lambda_j, \lambda_j) = & \frac{a_{n+1}^2 \sigma_{n+1} p_{n+1}(a_{n+1})}{\alpha_{22}^{n+1} \gamma_{22}^{n+1} - \beta_{22}^{n+1} \delta_{22}^{n+1}} \times \\ & \times [Z_{22}^{n+1}(a_{n+1}, \lambda_j)]^2 + \sum_{s=1}^n a_s^2 \sigma_s p_s(a_s) \times \\ & \times c_{11,s}^{-2} \{ [\sqrt{R C_{11,12}^{11,s}} Z_{22}^s(a_s, \lambda_j) - \sqrt{R C_{11,12}^{22,s}} \times \\ & \times Z_{12}^s(a_s, \lambda_j)]^2 + c_{11,s} [\sqrt{C_{21,22}^{11,s}} V'_{s+1}(a_s, \lambda_j) + \\ & + \sqrt{C_{21,22}^{22,s}} V_{s+1}(a_s, \lambda_j)]^2 \} + \frac{a_1^2 \sigma_1 p_1(a_0)}{\beta_{11}^0 \delta_{11}^0 - \alpha_{11}^0 \gamma_{11}^0} \times \\ & \times [Z_{11}^0(a_0, \lambda_j)]^2. \quad (42) \end{aligned}$$

Наявність вагової функції  $\sigma(x)$ , спектральної вектор-функції  $V(x, \lambda_j)$  та її квадрату норми  $\|V(x, \lambda_j)\|_1^2$  дає можливість визначити пряме  $H_n$  й обернене  $H_n^{-1}$  скінченне гібридне інтегральне перетворення, породжене спектральною задачею Штурма-Ліувілля (1) – (3):

$$\begin{aligned} H_n[g(x)] = & \int_a^b g(x) V(x, \lambda_j) \sigma(x) dx \equiv \tilde{g}_j = \\ = & \sum_{m=1}^{n+1} \int_{a_{m-1}}^{a_m} g_m(x) V_m(x, \lambda_j) \sigma_m p_m(x) dx, \quad (43) \end{aligned}$$

$$H_n^{-1}[\tilde{g}_j] = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{g}_j \frac{V(x, \lambda_j)}{\|V(x, \lambda_j)\|_1^2} \equiv g(x). \quad (44)$$

Математичним обґрунтуванням правил (42), (43) є твердження.

**Теорема 3 (про дискретний спектр).**

Корені трансцендентного рівняння  $\Delta_n(\lambda) = 0$  складають дискретний спектр: дійсні, різні, симетричні відносно  $\lambda = 0$ , на додатній піввісі  $\lambda > 0$  утворюють монотонно зростаючу числову послідовність з єдиною граничною точкою  $\lambda = \infty$ .

**Теорема 4 (про дискретну функцію).** Система  $\{V(x, \lambda_j)\}_{j=1}^{\infty}$  власних

вектор-функцій гібридного диференціального оператора  $L$  узагальнено ортогональна, повна та замкнена.

**Теорема 5 (про зображення рядом Фур'є).** Будь-яка вектор-функція  $g(x) \in G$  зображається абсолютно й рівномірно збіжним на множині  $E_n$  рядом Фур'є за системою  $\{V(x, \lambda_j)\}_{j=1}^{\infty}$ :

$$g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_a^b g(\xi) V(\xi, \lambda_j) \sigma(\xi) d\xi \frac{V(x, \lambda_j)}{\|V(x, \lambda_j)\|_1^2}. \quad (45)$$

Ряд Фур'є (45) і визначає оператори інтегрального перетворення  $H_n$  та  $H_n^{-1}$ .

Доведення сформульованих тверджень й застосування запровадженого гібридного скінченного інтегрального перетворення до розв'язання задач математичної фізики неоднорідних структур автори подадуть в інших роботах.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Комаров Г.М., Лютюк М.П., Мороз В.В. Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку. – Чернівці: Прут, 2001. – 228 с.
2. Березанский Ю.М. Разложения по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 798 с.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.
4. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1971. – 431 с.