Оператор $H_\alpha^{-(\mu)}$ згідно правила (43) як обернений до (46) зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця:

$$H_\alpha^{-(\mu)}[\cdots] = \begin{bmatrix} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \cdots v_{\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta_n) \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \cdots v_{\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta_n) \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \cdots v_{\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta_n) \end{bmatrix} \qquad (48)$$

Застосуємо операторну матрицю-стовпець (48) за правилом множення матриць до матриці-елемента $[\tilde{u}_n]$, де функція $\tilde{u}_n$ визначена за правилом (47). У результаті елементарних перетворень маємо <u>єдиний</u> розв'язок крайової задачі (1)-(3):

$$u_j(r) = \sum_{k=1}^{2} d_k \Big[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_{\alpha,j}^{(\mu)}(r,\beta_n)}{\beta_n^2+\gamma^2} Z_{\alpha;12}^{(\mu),k}(\beta_n)\omega_{2k} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_{\alpha,j}^{(\mu)}(r,\beta_n)}{\beta_n^2+\gamma^2} Z_{\alpha,22}^{(\mu),k}(\beta_n)\omega_{1k}\Big] +$$
$$+\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_{\alpha,j}^{(\mu)}(r,\beta_n)}{(-\alpha_{11}^0)(\beta_n^2+\gamma^2)} v_{\alpha;1}^{(\mu)}(R_0,\beta_n)\right)\sigma_1 g_0 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_{\alpha,j}^{(\mu)}(r,\beta_n)}{\alpha_{22}^3(\beta_n^2+\gamma^2)} v_{\alpha;3}^{(\mu)}(R_3,\beta_n)\right) shR_3 g_R +$$
$$+\int_{R_0}^{R_1} \Big[\sum_{n=1}^{\infty} v_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n) v_{\alpha;1}^{(\mu)}(\rho,\beta_n)(\beta_n^2+\gamma^2)^{-1}\Big] g_1(\rho)\sigma_1 d\rho + \int_{R_1}^{R_2} \Big[\sum_{n=1}^{\infty} v_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n) \times \qquad (49)$$
$$\times \frac{v_{\alpha,2}^{(\mu)}(\rho,\beta_n)}{\beta_n^2+\gamma^2}\Big] g_2(\rho)\sigma_2 \rho^{2\alpha-1} d\rho + \int_{R_2}^{R_3} \Big[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n)}{\beta_n^2+\gamma^2} v_{\alpha;3}^{(\mu)}(\rho,\beta_n)\Big] g_3(\rho)\sigma_3 sh\rho d\rho, \quad j=\overline{1,3}$$

Порівнюючи розв'язки (24) та (49) в силу теореми єдиності, отримуємо такі формули підсумовування функціональних рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n) Z_{\alpha,12}^{(\mu),k}(\beta_n)(\beta_n^2+\gamma^2)^{-1} = d_k^{-1} R_{\alpha;2k}^{(\mu)j}(r,q);\ k=1,2,\ j=\overline{1,3} \qquad (50)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_{\alpha,j}^{(\mu)}(r,\beta_n) Z_{\alpha:22}^{(\mu),k}(\beta_n)(\beta_n^2+\gamma^2)^{-1} = -d_k^{-1} R_{\alpha;1k}^{(\mu)j}(r,q);\ k=1,2,\ j=\overline{1,3} \qquad (51)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_{\alpha;1}^{(\mu)}(R_0,\beta_n)}{(-\alpha_{11}^0)(\beta_n^2+\gamma^2)} v_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n) = \sigma_1^{-1} W_{\alpha,1j}^{(\mu)}(r,q);\ j=\overline{1,3} \qquad (52)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_{\alpha;3}^{(\mu)}(R_3,\beta_n)}{\alpha_{22}^3(\beta_n^2+\gamma^2)} v_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n) = (shR_3)^{-1} W_{\alpha;3j}^{(\mu)}(r,q);\ j=\overline{1,3} \qquad (53)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n) v_{\alpha;k}^{(\mu)}(\rho,\beta_n)(\beta_n^2+\gamma^2)^{-1} = \sigma_k^{-1}\mathcal{H}_{\alpha;jk}^{(\mu)}(r,\rho,q);\ j,k=\overline{1,3} \qquad (54)$$

Функції Гріна $W_{\alpha;1j}^{(\mu)}(r,q)$ визначені формулами (20), функції Гріна $W_{\alpha;3j}^{(\mu)}(r,q)$ визначені формулами (21), функції Гріна $R_{\alpha,mk}^{(\mu),j}(r,q)$ умов спряження визначені формулами (22), функції впливу $\mathcal{H}_{\alpha;jk}^{(\mu)}(r,\rho,q)$ визначені формулами (23).

<u>Основна теорема.</u> Якщо вектор-функція $f(r) = \{g_1''(r); B_\alpha^*[g_2(r)]; \Lambda_{(\mu)}[g_3(r)]\}$ неперервна на множині I_2, функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови (2) й умови спряження (3) та виконується умова (19) однозначної розв'язності крайової задачі (1)-(3), то мають місце формули (50)-(54) підсумовування поліпараметричних функціональних рядів за власними елементами гібридного диференціального оператора $M_\alpha^{(\mu)}$, визначеного рівністю (25).

1. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. - М.: Физматгиз. 1959. - 468с.

2. Конет І.М., Ленюк М.П. Інтегральні перетворення типу Мелера-Фока. - Чернівці: Прут, 2002. - 248с.

3. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. - М.: Наука, 1965. - 328с.

4. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. - М.: Наука, 1971. - 432с.

5 Ленюк М.П., Шинкарик М.І. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1. - Тернопіль: Економ. думка, 2004. - 368с.

6. Ленюк М.П., Шинкарик М.І. Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені класичними диференціальними операторами математичної фізики. Том 2. - Тернопіль: Економ. думка, 2012. - С. 308.

УДК 517.91:532.26

В.В. Мороз

Гібридне інтегральне перетворення типу Бесселя - Ейлера - Лежандра на сегменті $[R_0, R_3]$ полярної осі із спектральним параметром в крайових умовах та умовах спряження

(м. Хмельницький)

Запроваджено гібридне інтегральне перетворення типу Бесселя - Ейлера - Лежандра на сегменті $[R_0, R_3]$ полярної осі з двома точками спряження в припущенні, що спектральний параметр бере участь в крайових умовах та умовах спряження.

Введено гибридное интегральное преобразование типа Бесселя - Эйлера - Лежандра на сегменте $[R_0, R_3]$ полярной оси с двумя точками сопряжения в предположении, что спектральный параметр принимает участие в краевых условиях и условиях сопряжения.

Бібліогр.: 7 назв.

Запровадимо інтегральне перетворення, породжене на множині $I_2 = \{r : r \in$

$(R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3);\ R_0 > 0.\ R_3 < \infty\}$ гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)} = \theta(r-R_0)\theta(R_1-r)a_1^2 B_{\nu,\alpha_1} + \theta(r-R_1)\theta(R_2-r)a_2^2 B^*_{\alpha_2} + \theta(r-R_2)\theta(R_3-r)a_3^2\Lambda_{(\mu)}, \tag{1}$$

де $\theta(x)$ - одинична функція Гевісайда [1], $B_{\nu,\alpha_1} = \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha_1+1)r^{-1}\frac{d}{dr} - (\nu^2 - \alpha_1^2)r^{-2}$ - диференціальний оператор Бесселя [2], $B^*_{\alpha_2} = r^2\frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha_2+1)r\frac{d}{dr} + \alpha_2^2$ - диференціальний оператор Ейлера 2-го порядку [3], $\Lambda_{(\mu)} = \frac{d^2}{dr^2} + cthr\frac{d}{dr} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1^2}{1-chr} + \frac{\mu_2^2}{1+chr}\right)$ - узагальнений диференціальний оператор Лежандра [4]; $(\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2)$, $2\alpha_j + 1 > 0$, $\nu \geq \alpha_1$, $\mu_1 \geq \mu_2 \geq 0$, $(\mu) = (\mu_1, \mu_2)$; $a_j > 0$ $(j = \overline{1,3})$.

<u>**Означення.**</u> Областю задання ГДО $M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}$ назвемо множину G вектор-функцій $g(r) = \{g_1(r); g_2(r); g_3(r)\}$ з такими властивостями: 1) вектор-функція $f(r) = \{B_{\nu,\alpha_1}[g_1(r)], B^*_{\alpha_2}[g_2(r)], \Lambda_{(\mu)}[g_3(r)]\}$ неперервна на множині I_2; 2) функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$\left[\left(\tilde{\alpha}^k_{j1}\frac{d}{dr} + \tilde{\beta}^k_{j1}\right)g_k(r) - \left(\tilde{\alpha}^k_{j2}\frac{d}{dr} + \tilde{\beta}^k_{j2}\right)g_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k} = 0;\ j,k = 1,2 \tag{2}$$

3) функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$\left(\tilde{\alpha}^0_{11}\frac{d}{dr} + \tilde{\beta}^0_{11}\right)g_1(r)\Big|_{r=R_0} = 0,\quad \left(\tilde{\alpha}^3_{22}\frac{d}{dr} + \tilde{\beta}^3_{22}\right)g_3(r)\Big|_{r=R_3} = 0 \tag{3}$$

У рівностях (2), (3) беруть участь коефіцієнти: $\tilde{\alpha}^k_{jm} = \alpha^k_{jm} - (\beta^2+\gamma^2)\delta^k_{jm}$, $\tilde{\beta}^k_{jm} = \beta^k_{jm} - (\beta^2+\gamma^2)\gamma^k_{jm}$, $\gamma^2 \geq 0$; β - спектральний параметр.

Припустимо що виконані умови на коефіцієнти: $\alpha^k_{jm} \geq 0$, $\beta^k_{jm} \geq 0$, $\delta^k_{jm} \geq 0$, $\gamma^k_{jm} \geq 0$. $c_{j1,k} - \alpha^k_{2j}\beta^k_{1j} - \alpha^k_{1j}\beta^k_{2j}$; $c_{11,k} \cdot c_{21,k} > 0$; $c_{j2,k} = \delta^k_{2j}\gamma^k_{1j} - \delta^k_{1j}\gamma^k_{2j} = 0$, $\alpha^k_{1j}\gamma^k_{2j} - \alpha^k_{2j}\gamma^k_{1j} = \beta^k_{1j}\delta^k_{2j} - \beta^k_{2j}\delta^k_{1j}$ $j\ m, k = 1,2$; $\tilde{\alpha}^3_{22} = \alpha^3_{22} - (\beta^2+\gamma^2)\delta^3_{22}$, $\tilde{\beta}^3_{22} = \beta^3_{22} - (\beta^2+\gamma^2)\gamma^3_{22}$, $\alpha^3_{22} + \beta^3_{22} \neq 0$, $\delta^3_{22} + \gamma^3_{22} \neq 0$.

Наведемо необхідні в подальшому допоміжні твердження.

<u>**Лема 1.**</u> Для вектор-функцій $u(r) = \{u_1(r); u_2(r); u_3(r)\} \in G$ **та** $v(r) = \{v_1(r); v_2(r); v_3(r)\} \in G$ з умов спряження (2) випливає базова тотожність

$$\left[u'_k(r)v_k(r) - u_k(r)v'_k(r)\right]\Big|_{r=R_k} = \frac{c_{21,k}}{c_{11,k}}\left[u'_{k+1}(r)v_{k+1}(r) - u_{k+1}(r)v'_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k} \tag{4}$$

<u>Доведення.</u> Введемо до розгляду числа

$$\tilde{a}^k_{11} = \tilde{\alpha}^k_{11}\tilde{\alpha}^k_{22} - \tilde{\alpha}^k_{21}\tilde{\alpha}^k_{12},\quad \tilde{a}^k_{21} = \tilde{\beta}^k_{11}\tilde{\alpha}^k_{22} - \tilde{\beta}^k_{21}\tilde{\alpha}^k_{12},$$

$$\tilde{a}^k_{12} = \tilde{\alpha}^k_{11}\tilde{\beta}^k_{22} - \tilde{\alpha}^k_{21}\tilde{\beta}^k_{12},\quad \tilde{a}^k_{22} = \tilde{\beta}^k_{11}\tilde{\beta}^k_{22} - \tilde{\beta}^k_{21}\tilde{\beta}^k_{12}.$$

Безпосереднім обчислення встановлюємо рівність

$$\tilde{a}^k_{11}\tilde{a}^k_{22} - \tilde{a}^k_{12}\tilde{a}^k_{21} = c_{11,k} \cdot c_{21,k} \tag{5}$$

Розглянемо алгебраїчну систему:

$$\tilde{\alpha}^k_{j1}u'_k(R_k) + \tilde{\beta}^k_{j1}u_k(R_k) = \tilde{\alpha}^k_{j2}u'_{k+1}(R_k) + \tilde{\beta}^k_{j2}u_{k+1}(R_k),\ j = 1,2 \tag{6}$$

стосовно чисел $u_k(R_k)$ та $u'_k(R_k)$.

Визначник алгебраїчної системи (6) обчислюється безпосередньо

$$\tilde{\alpha}^k_{11}\tilde{\beta}^k_{21} - \tilde{\alpha}^k_{21}\tilde{\beta}^k_{11} = -c_{11,k} \neq 0$$

Алгебраїчна система (6) має єдиний розв'язок [5]:

$$u'_k(R_k) = \frac{1}{c_{11,k}}\left[\tilde{a}^k_{21}u'_{k+1}(R_k) + \tilde{a}^k_{22}u_{k+1}(R_k)\right], \tag{7}$$

$$u_k(R_k) = -\frac{1}{c_{11,k}}\left[\tilde{a}^k_{11}u'_{k+1}(R_k) + \tilde{a}^k_{12}u_{k+1}(R_k)\right].$$

Рівностями (7) зв'язані і компоненти вектор-функції $v(r)$:

$$v'_k(R_k) = \frac{1}{c_{11,k}}\left[\tilde{a}^k_{21}v'_{k+1}(R_k) + \tilde{a}^k_{22}v_{k+1}(R_k)\right] \tag{8}$$

$$v_k(R_k) = \frac{1}{c_{11,k}}\left[\tilde{a}^k_{11}v'_{k+1}(R_k) + \tilde{a}^k_{12}v_{k+1}(R_k)\right]$$

Безпосередньо знаходимо, що

$$u'_k(R_k)v_k(R_k) - u_k(R_k)v'_k(R_k) = \frac{\tilde{a}^k_{11}\tilde{a}^k_{22} - \tilde{a}^k_{12}\tilde{a}^k_{21}}{c^2_{11,k}}\Big[u'_{k+1}(r)v_{k+1}(r) - u_{k+1}(r)v'_{k+1}(r)\Big]\Big|_{r=R_k} = \frac{c_{21,k}}{c_{11,k}}\left[u'_{k+1}(r)v_{k+1}(r) - u_{k+1}(r)v'_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k} \tag{9}$$

Оскільки рівність (9) співпадає з рівністю (4), то доведення леми завершено.

Визначимо величини

$$a_1^2\sigma_1 = \frac{c_{11,1}c_{11,2}}{c_{21,1}c_{21,2}}\frac{R_1^{2\alpha_2+1}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{shR_2}{R_2^{2\alpha_2+1}},\quad a_2^2\sigma_2 = \frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}\frac{shR_2}{R_2^{2\alpha_2+1}},\quad a_3^2\sigma_3 = 1,$$

вагову функцію

$$\sigma(r) = \theta(r-R_0)\theta(R_1-r)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1} + \theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1} + \theta(r-R_2)\theta(R_3-r)\sigma_3 shr \tag{10}$$

та скалярний добуток

$$\left(u(r), v(r)\right) = \int_{R_0}^{R_3} u(r)v(r)\sigma(r)dr = \int_{R_0}^{R_1} u_1(r)v_1(r)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr +$$

$$+\int_{R_1}^{R_2} u_2(r)v_2(r)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1}dr + \int_{R_2}^{R_3} u_3(r)v_3(r)\sigma_3 shr\,dr \tag{11}$$

Лема 2. ГДО $M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$ самоспряжений.

Доведення. Згідно правила (11) скалярний добуток

$$\left(M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[u], v(r)\right) = \int_{R_0}^{R_1}\left(a_1^2 B_{\nu,\alpha_1}[u_1]\right)v_1(r)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr + \int_{R_1}^{R_2}\left(a_2^2 B_{\alpha_2}^*[u_2]\right)v_2(r)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1}dr +$$

$$+\int_{R_2}^{R_3}\left(a_3^2 \Lambda_{(\mu)}[u_3]\right)v_3(r)\sigma_3 shr\,dr \tag{12}$$

Проінтегруємо в (12) під знаком інтегралів два рази частинами:

$$\left(M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[u], v\right) = a_1^2\sigma_1\left[r^{2\alpha_1+1}\left(\frac{du_1}{dr}v_1 - u_1\frac{dv_1}{dr}\right)\right]\Big|_{R_0}^{R_1} + \int_{R_0}^{R_1} u_1(r)\left(a_1^2 B_{\nu,\alpha_1}[v_1]\right)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr +$$

$$+a_2^2\sigma_2\left[r^{2\alpha_2+1}\left(\frac{du_2}{dr}v_2 - u_2\frac{dv_2}{dr}\right)\right]\Big|_{R_1}^{R_2} + \int_{R_1}^{R_2} u_2(r)\left(a_2^2 B_{\alpha_2}^*[v_2]\right)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1}dr +$$

$$+a_3^2\sigma_3\left[shr\left(\frac{du_3}{dr}v_3 - u_3\frac{dv_3}{dr}\right)\right]\Big|_{R_2}^{R_3} + \int_{R_2}^{R_3} u_3(r)\left(a_3^2 \Lambda_{(\mu)}[v_3]\right)\sigma_3 shr\,dr \tag{13}$$

Якщо $\tilde{\alpha}_{11}^0 \neq 0$, то знаходимо, що

$$\left(\frac{du_1}{dr}v_1 - u_1\frac{dv_1}{dr}\right)\Big|_{r=R_0} = (\tilde{\alpha}_{11}^0)^{-1}\left[\left(\tilde{\alpha}_{11}^0\frac{du_1}{dr} + \tilde{\beta}_{11}^0 u_1\right)\Big|_{r=R_0}\cdot v_1(R_0) - \left(\tilde{\alpha}_{11}^0\frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{11}^0\right)v_1(r)\Big|_{r=R_0}\times\right.$$

$$\left.\times u_1(R_0)\right] = (\tilde{\alpha}_{11}^0)^{-1}\left[0\cdot v_1(R_0) - 0\cdot u_1(R_0)\right] = 0 \tag{14}$$

Якщо $\tilde{\alpha}_{22}^3 \neq 0$, то знаходимо, що

$$\left(\frac{du_3}{dr}v_3 - u_3\frac{dv_3}{dr}\right)\Big|_{r=R_3} = (\tilde{\alpha}_{22}^3)^{-1}\left[\tilde{\alpha}_{22}^3\frac{du_3}{dr}v_3 - \tilde{\alpha}_{22}^3\frac{dv_3}{dr}u_3\right]\Big|_{r=R_3} =$$

$$= (\tilde{\alpha}_{22}^3)^{-1}\left[\left(\tilde{\alpha}_{22}^3\frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{22}^3\right)u_3(r)\Big|_{r=R_3}\cdot v_3(R_3) - \left(\tilde{\alpha}_{22}^3\frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{22}^3\right)v_3(r)\Big|_{r=R_3} u_3(R_3)\right] =$$

$$= (\tilde{\alpha}_{22}^3)^{-1}\left[0\cdot v_3(R_3) - 0\cdot u_3(R_3)\right] = 0 \tag{15}$$

Внаслідок базової тотожності (4) в точці $r = R_1$ маємо:

$$a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}\left(\frac{du_1}{dr}v_1 - u_1\frac{dv_1}{dr}\right)\Big|_{r=R_1} - a_2^2\sigma_2 R_1^{2\alpha_2+1}\left(\frac{du_2}{dr}v_2 - u_2\frac{dv_2}{dr}\right)\Big|_{r=R_1} =$$

$$= \left(a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21,1}}{c_{11,1}} - a_2^2\sigma_2 R_1^{2\alpha_2+1}\right)\left(\frac{du_2}{dr}v_2 - u_2\frac{dv_2}{dr}\right)\Big|_{r=R_1} = 0 \tag{16}$$

тому що в силу вибору чисел σ_1 та σ_2 вираз

$$a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21,1}}{c_{11,1}} - a_2^2\sigma_2 R_1^{2\alpha_2+1} = \frac{c_{11,1}c_{11,2}}{c_{21,1}c_{21,2}}\frac{R_1^{2\alpha_2+1}}{R_2^{2\alpha_2+1}}shR_2\cdot\frac{c_{21,1}}{c_{11,1}} - \frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}\frac{shR_2}{R_2^{2\alpha_2+1}}\times$$

$$\times R_1^{2\alpha_2+1} = \frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}\frac{R_1^{2\alpha_2+1}}{R_2^{2\alpha_2+1}}shR_2(1-1) \equiv 0$$

Внаслідок базової тотожності (4) в точці $r = R_2$ маємо:

$$a_2^2\sigma_2 R_2^{2\alpha_2+1}\left(\frac{du_2}{dr}v_2 - u_2\frac{dv_2}{dr}\right)\Big|_{r=R_2} - a_3^2\sigma_3 shR_2\left(\frac{du_3}{dr}v_3 - u_3\frac{dv_3}{dr}\right)\Big|_{r=R_2} =$$

$$= \left(a_2^2\sigma_2 R_2^{2\alpha_2+1}\frac{c_{21,2}}{c_{11,2}} - a_3^2\sigma_3 shR_2\right)\left(\frac{du_3}{dr}v_3 - u_3\frac{dv_3}{dr}\right)\Big|_{r=R_2} = 0 \tag{17}$$

тому що в силу вибору чисел σ_2 та σ_3 вираз

$$a_2^2\sigma_2 R_2^{2\alpha_2+1}\frac{c_{21,2}}{c_{11,2}} - a_3^2\sigma_3 shR_2 = \frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}shR_2\frac{c_{21,2}}{c_{11,2}} - shR_2 = shR_2(1-1) = 0.$$

Внаслідок рівностей (14)-(17) рівність (13) набуває вигляду

$$\left(M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[u(r)], v(r)\right) = \left(u(r), M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[v]\right) \tag{18}$$

Рівність (18) означає, що ГДО $M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$ самоспряжений оператор. Доведення леми завершено.

Власні елементи ГДО $M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$ (власні числа та відповідні їм власні функції) знайдемо в результаті розв'язання відповідної задачі Штурма-Ліувілля.

Побудуємо на множині I_2 розв'язок системи диференціальних рівнянь Бесселя, Ейлера та Лежандра

$$\left(B_{\nu,\alpha_1} + b_1^2\right)V_{\nu,(\alpha),1}^{(\mu)}(r,\beta) = 0, \quad r \in (R_0, R_1)$$

$$\left(B_{\alpha_2}^* + b_2^2\right)V_{\nu,(\alpha),2}^{(\mu)}(r,\beta) = 0, \quad r \in (R_1, R_2) \tag{19}$$

$$\left(\Lambda_{(\mu)} + b_3^2\right)V_{\nu,(\alpha),3}^{(\mu)}(r,\beta) = 0, \quad r \in (R_2, R_3)$$

за крайовими умовами (2) та умовами спряження (3).

Тут $b_j = a_j^{-1}(\beta^2 + k_j^2)^{1/2}$, $k_j^2 \geq 0$, $j = \overline{1,3}$; $V_{\nu,(\alpha);j}^{(\mu)}(r,\beta)$ - компоненти спектральної вектор-функції

$$V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta) = \sum_{j=1}^{3}\theta(r - R_{j-1})\theta(R_j - r)V_{\nu,(\alpha);j}^{(\mu)}(r,\beta) \tag{20}$$

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $(B_{\nu,\alpha_1} + b_1^2)v = 0$ утворюють функції Бесселя $J_{\nu,\alpha_1}(b_1 r)$ та $N_{\nu,\alpha_1}(b_1 r)$ [2]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B^*_{\alpha_2} + b_2^2)v = 0$ утворюють функції $r^{-\alpha_2}\cos(b_2 \ln r)$ та $r^{-\alpha_2}\sin(b_2 \ln r)$ [3]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $(\Lambda_{(\mu)} + b_3^2)v = 0$ утворюють функції $A^{(\mu)}_{\nu_3^*}(chr)$ та $B^{(\mu)}_{\nu_3^*}(chr)$, $\nu_3^* = -1/2 + ib_3$ [4].

Якщо в силу лінійності задачі Штурма-Ліувілля покласти

$$V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta) = A_1 J_{\nu,\alpha_1}(b_1 r) + B_1 N_{\nu,\alpha_1}(b_1 r), \quad r \in (R_0, R_1),$$

$$V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta) = A_2 r^{-\alpha_2}\cos(b_2 \ln r) + B_2 r^{-\alpha_2}\sin(b_2 \ln r), \quad r \in (R_1, R_2) \qquad (21)$$

$$V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta) = A_3 A^{(\mu)}_{\nu_3^*}(chr) + B_3 B^{(\mu)}_{\nu_3^*}(chr), \quad r \in (R_2, R_3),$$

то крайові умови (2) та умови спряження (3) для визначення величин A_j, B_j $(j = \overline{1,3})$ дають однорідну алгебраїчну систему із шести рівнянь:

$$u^{01}_{\nu,\alpha_1;11}(b_1 R_0) A_1 + u^{02}_{\nu,\alpha_1;11}(b_1 R_0) B_1 = 0$$

$$u^{11}_{\nu,\alpha_1;j1}(b_1 R_1) A_1 + u^{12}_{\nu,\alpha_1;j1}(b_1 R_1) B_1 - Y^{11}_{\alpha_2;j2}(b_2, R_1) A_2 - Y^{12}_{\alpha_2;j2}(b_2, R_1) B_2 = 0, \; j = 1,2$$

$$Y^{21}_{\alpha_2;j1}(b_2, R_2) A_2 + Y^{22}_{\alpha_2;j1}(b_2, R_2) B_2 - Y^{(\mu),21}_{\nu_3^*;j2}(chR_2) A_3 - Y^{(\mu),22}_{\nu_3^*;j2}(chR_2) B_3 = 0 \qquad (22)$$

$$Y^{(\mu),31}_{\nu_3^*;22}(chR_3) A_3 + Y^{(\mu),32}_{\nu_3^*;22}(chR_3) B_3 = 0.$$

Функції, що беруть участь у системі (22), загальноприйняті [6].

Введемо до розгляду функції:

$$\delta_{\nu,\alpha_1,j1}(b_1 R_0, b_1 R_1) = u^{01}_{\nu,\alpha_1,11}(b_1 R_0) u^{12}_{\nu,\alpha_1;j1}(b_1 R_1) - u^{02}_{\nu,\alpha_1;11}(b_1 R_0) u^{11}_{\nu,\alpha_1;j1}(b_1 R_1), \; j = 1,2;$$

$$\delta_{\alpha_2;jk}(b_2; R_1, R_2) = Y^{11}_{\alpha_2;j2}(b_2, R_1) Y^{22}_{\alpha_2;k1}(b_2, R_2) - Y^{12}_{\alpha_2;j2}(b_2, R_1) Y^{21}_{\alpha_2;k1}(b_2, R_2); \; k = 1,2;$$

$$\delta^{(\mu)}_{\nu_3^*;j2}(chR_2, chR_3) = Y^{(\mu),21}_{\nu_3^*;j2}(chR_2) Y^{(\mu),32}_{\nu_3^*;22}(chR_3) - Y^{(\mu),22}_{\nu_3^*;j2}(chR_2) Y^{(\mu),31}_{\nu_3^*;22}(chR_3);$$

$$a_{\nu,(\alpha);j}(\beta) = \delta_{\nu,\alpha_1;11}(b_1 R_0, b_1 R_1)\delta_{\alpha_2;2j}(b_2; R_1, R_2) - \delta_{\nu,\alpha_1;21}(b_1 R_0, b_1 R_1)\delta_{\alpha_2;1j}(b_2; R_1, R_2).$$

Алгебраїчна система (22) має ненульовий розв'язок тоді й тільки тоді, коли визначник системи дорівнює нулю [5]:

$$\delta^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta) \equiv \delta^{(\mu)}_{\nu_3^*;22}(chR_2, chR_3) a_{\nu,(\alpha);1}(\beta) - \delta^{(\mu)}_{\nu_3^*;12}(chR_2, chR_3) a_{\nu,(\alpha);2}(\beta) = 0 \qquad (23)$$

Алгебраїчне рівняння (23) - це трансцендентне рівняння для обчислення власних чисел β_n ГДО $M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}$ (β_n - корінь рівняння (23)).

Підставимо в систему (22) $\beta = \beta_n$ $(b_j(\beta_n) = b_{jn})$ й відкинемо останнє рівняння в силу лінійної залежності. Припустимо, що $A_1 = -A_0 u^{02}_{\nu,\alpha_1;11}(b_{1n} R_0)$, $B_1 = A_0 u^{01}_{\nu,\alpha_1;11}(b_{1n} R_0)$, де $A_0 \neq 0$ підлягає визначенню. Перше рівняння системи (22) стає

тотожністю, а друге й третє рівняння системи дають для визначення величин A_2, B_2 алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$Y^{11}_{\alpha_2;j2}(b_{2n}, R_1) A_2 + Y^{12}_{\alpha_2;j2}(b_{2n}, R_1) B_2 = A_0 \delta_{\nu,\alpha_1;j1}(b_{1n} R_0, b_{1n} R_1), \; j = 1,2 \qquad (24)$$

Визначник алгебраїчної системи (24) обчислюється безпосередньо

$$q_{\alpha_2}(\beta_n) = Y^{11}_{\alpha_2;12}(b_{2n}, R_1) Y^{12}_{\alpha_2;22}(b_{2n}, R_1) - Y^{11}_{\alpha_2;22}(b_{2n}, R_1) Y^{12}_{\alpha_2;12}(b_{2n}, R_1) = c_{21,1} b_{2n} R_1^{2\alpha_2+1} \neq 0$$

Алгебраїчна система (24) має єдиний розв'язок [5]:

$$A_2 = \frac{A_0}{q_{\alpha_2}(\beta_n)}\Big[\delta_{\nu,\alpha_1;11}(b_{1n} R_0, b_{1n} R_1) Y^{12}_{\alpha_2;22}(b_{2n}, R_1) - \delta_{\nu,\alpha_1;21}(b_{1n} R_0, b_{1n} R_1) Y^{12}_{\alpha_2;12}(b_{2n}, R_1)\Big],$$

$$(25)$$

$$B_2 = \frac{A_0}{q_{\alpha_2}(\beta_n)}\Big[\delta_{\nu,\alpha_1;21}(b_{1n} R_0, b_{1n} R_1) Y^{11}_{\alpha_2;12}(b_{2n}, R_1) - \delta_{\nu,\alpha_1;11}(b_{1n} R_0, b_{1n} R_1) Y^{11}_{\alpha_2;22}(b_{2n}, R_1)\Big].$$

При визначених вже A_2, B_2 для визначення величин A_3, B_3 четверте й п'яте рівняння системи дають алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$Y^{(\mu),21}_{\nu_{3n}^*;j2}(chR_2) A_3 + Y^{(\mu),22}_{\nu_{3n}^*;j2}(chR_2) B_3 = -A_0 [q_{\alpha_2}(\beta_n)]^{-1} a_{\nu,(\alpha);j}(\beta_n) \qquad (26)$$

Визначник алгебраїчної системи (26) обчислюється безпосередньо:

$$q_{(\mu)}(\beta_n) = Y^{(\mu),21}_{\nu_{3n}^*;12}(chR_2) Y^{(\mu),22}_{\nu_{3n}^*;22}(chR_2) - Y^{(\mu),21}_{\nu_{3n}^*;22}(chR_2) Y^{(\mu),22}_{\nu_{3n}^*;12}(chR_2) = \frac{c_{22}}{s_{(\mu)}(b_{3n}) shR_2} \neq 0$$

Алгебраїчна система (26) має єдиний розв'язок [5]:

$$A_0 = q_{\alpha_2}(\beta_n) q_{(\mu)}(\beta_n), \quad A_3 = -\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\beta_n), \quad B_3 = \omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\beta_n); \qquad (27)$$

$$\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(\beta_n) = a_{\nu,(\alpha);1}(\beta_n) Y^{(\mu),2j}_{\nu_{3n}^*;22}(chR_2) - a_{\nu,(\alpha);2}(\beta_n) Y^{(\mu),2j}_{\nu_{3n}^*;12}(chR_2); \; j = 1,2.$$

Підставимо визначені формулами (25) та (27) величини A_j, B_j у рівності (21). Одержуємо компоненти спектральної вектор-функції $V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)$:

$$V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n) = q_{\alpha_2}(\beta_n) q_{(\mu)}(\beta_n)\Big[u^{01}_{\nu,\alpha_1;11}(b_{1n} R_0) N_{\nu,\alpha_1}(b_{1n} r) - u^{02}_{\nu,\alpha_1;11}(b_{1n} R_0) J_{\nu,\alpha_1}(b_{1n} r)\Big],$$

$$V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta) = q_{(\mu)}(\beta_n)\Big[\delta_{\nu,\alpha_1;11}(b_{1n} R_0, b_{1n} R_1)\psi^1_{\alpha_2;22}(b_{2n}, r) -$$

$$-\delta_{\nu,\alpha_1;21}(b_{1n} R_0, b_{1n} R_1)\psi^1_{\alpha_2;12}(b_{2n}, r)\Big], \qquad (28)$$

$$\psi^1_{\alpha_2;j2}(b_{2n}, r) = Y^{12}_{\alpha_2;j2}(b_{2n}, R_1) r^{-\alpha_2}\cos(b_{2n}\ln r) - Y^{11}_{\alpha_2;j2}(b_{2n}, R_1) r^{-\alpha_2}\sin(b_{2n}\ln r),$$

$$V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta) = \omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\beta_n) B^{(\mu)}_{\nu_{3n}^*}(chr) - \omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\beta_n) A^{(\mu)}_{\nu_{3n}^*}(chr), \; \nu_{3n}^* = -1/2 + ib_{3n}.$$

Згідно формули (20) спектральна вектор-функція визначена.

Відомо [7], що система $\left\{V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\}_{n=1}^{\infty}$ власних вектор-функцій узагальнено ортогональна на множині I_2 з ваговою функцією $\sigma(r)$. При цьому квадрат норми власної функції обчислюється за правилом.

$$\left\|V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|_1^2 = \int\limits_{R_0}^{R_3}\left[V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right]^2\sigma(r)dr + \Theta_2(\beta_n,\beta_n) \tag{29}$$

Перейдемо в подальшому до ортонормованої системи власних вектор-функцій:

$$\left\{V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n) : \|V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\|_1\right\}_{n=1}^{\infty} \equiv \left\{v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

Наявність вагової функції $\sigma(r)$, спектральної вектор-функції $v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)$ дозволяє визначити пряме $H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);n}$ та обернене $H^{-(\mu)}_{\nu,(\alpha),n}$ скінченне гібридне інтегральне перетворення (СГІП), породжене на множині I_2 ГДО $M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}$:

$$\boldsymbol{H}^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);n}[g(r)] = \int\limits_{R_0}^{R_3} g(r)v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\sigma(r)dr \equiv \tilde{\boldsymbol{g}}_{\boldsymbol{n}} \tag{30}$$

$$H^{-(\mu)}_{\nu,(\alpha),n}[\tilde{g}_n] = \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{g}_n v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n) \equiv g(r) \tag{31}$$

Математичним обґрунтуванням правил (30), (31) є твердження

Теорема 1 (про дискретний спектр) Корені β_n трансцендентного рівняння $\delta^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta) = 0$ складають дискретний спектр ГДО $M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}$: дійсні, різні, симетричні відносно точки $\beta = 0$ й на піввісі $\beta > 0$ утворюють монотонно зростаючу числову послідовність з єдиною граничною точкою $\beta = \infty$.

Теорема 2 (про дискретну функцію). Система $\left\{v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\}_{n=1}^{\infty}$ власних вектор-функцій ГДО $M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}$ узагальнено ортонормована, повна й замкнена.

Теорема 3 (про зображення рядом Фур'є) Будь-яка вектор-функція $g(r) \in G$ зображається абсолютно й рівномірно збіжним на множині I_2 рядом Фур'є за системою $\left\{v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\}_{n-1}^{\infty}$:

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\int\limits_{R_0}^{R_3} g(\rho)v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\rho,\beta_n)\sigma(\rho)d\rho\Big)v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n) \tag{32}$$

Застосування правил (30), (31) до розв'язування відповідних задач базується на основній тотожності інтегрального перетворення ГДО $M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}$.

Визначимо величини та функції:

$$\boldsymbol{d_1} = a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1} : c_{11,1},\ d_2 = a_2^2\sigma_2 R_2^{2\alpha_2+1} : c_{11,2};\ \tilde{g}_{1n} = \int\limits_{R_0}^{R_1} g_1(r)v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha),1}(r,\beta_n)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}\boldsymbol{dr},$$

$$\tilde{g}_{2n} = \int\limits_{R_1}^{R_2} g_2(r)v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1}dr,\ \tilde{g}_{3n} = \int\limits_{R_2}^{R_3} g_3(r)v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta_n)\sigma_3 sh r\,\boldsymbol{dr},$$

$$Z^{(\mu),k}_{\nu,(\alpha),i2}(\beta_n) = \left(\tilde{\alpha}^k_{i2}\frac{d}{dr} + \tilde{\beta}^k_{i2}\right)v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha),k+1}(r,\beta_n)\Big|_{r=R_k},\ i,k = 1,2.$$

Теорема 4 (про основну тотожність). Якщо вектор-функція

$$f(r) = \left\{B_{\nu,\alpha_1}[g_1(r)];\ B^*_{\alpha_2}[g_2(r)];\ \Lambda_{(\mu)}[g_3(r)]\right\}$$

неперервна на множині I_2, а функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$\left(\tilde{\alpha}^0_{11}\frac{d}{dr} + \tilde{\beta}^0_{11}\right)g_1(r)\Big|_{r=R_0} = g_0,\quad \left(\tilde{\alpha}^3_{22}\frac{d}{dr} + \tilde{\beta}^3_{22}\right)g_3(r)\Big|_{r=R_3} = g_R \tag{33}$$

та умови спряження

$$\left[\left(\tilde{\alpha}^k_{j1}\frac{d}{dr} + \tilde{\beta}^k_{j1}\right)g_k(r) - \left(\tilde{\alpha}^k_{j2}\frac{d}{dr} + \tilde{\beta}^k_{j2}\right)g_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k} = \omega_{jk};\ j,k = 1,2, \tag{34}$$

то справджується основна тотожність СГІП ГДО $M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}$:

$$H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha),n}\left[M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}[g(r)]\right] = -\beta_n^2\tilde{g}_n - \sum_{m-1}^{3}k_m^2\tilde{g}_{nm} + (-\tilde{\alpha}^0_{11})^{-1}v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(R_0,\beta_n)a_1^2\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}g_0 +$$

$$+(\tilde{\alpha}^3_{22})^{-1}v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha),3}(R_3,\beta_n)sh R_3 g_R a_3^2\sigma_3 + \sum_{k=1}^{2}d_k\left[Z^{(\mu),k}_{\nu,(\alpha);12}(\beta_n)\omega_{2k} - Z^{(\mu),k}_{\nu,(\alpha),22}(\beta_n)\omega_{1k}\right] \tag{35}$$

Доведення. Згідно правила (30) маємо:

$$H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha),n}\left[M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}[g(r)]\right] \equiv \int\limits_{R_0}^{R_3} M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}[g(r)]v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\sigma(r)dr = \int\limits_{R_0}^{R_1}\left(a_1^2 B_{\nu,\alpha_1}[g_1(r)]\right)\times \tag{36}$$

$$\times v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\beta_n})\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr + \int\limits_{R_1}^{R_2}\left(a_2^2 B^*_{\alpha_2}[g_2(r)]\right)v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1}\boldsymbol{dr} +$$

$$+\int\limits_{R_2}^{R_3}\left(a_3^2\Lambda_{(\mu)}[g_3(r)]\right)v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta_n)\sigma_3 sh r\,dr$$

Проінтегруємо в рівності (36) під знаками інтегралів два рази частинами:

$$H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha),n}\left[M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}[g(r)]\right] = a_1^2\sigma_1\left[r^{2\alpha_1+1}\left(\frac{dg_1}{dr}v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha),1}(r,\beta_n) - g_1(r)\frac{dv^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}}{dr}\right)\right]_{R_0}^{R_1}+$$

$$+\int_{R_0}^{R_1} g_1(r)\left(a_1^2 B_{\nu,\alpha_1}[v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha),1}(r,\beta_n)]\right)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr + a_2^2\sigma_2\left[r^{2\alpha_2+1}\left(\frac{dg_2}{dr}v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2} - g_2\frac{dv^{(\mu)}_{\nu,(\alpha),2}}{dr}\right)\right]_{R_1}^{R_2}+$$

$$+\int_{R_1}^{R_2} g_2(r)\left(a_2^2 B^*_{\alpha_2}[v^{(\mu)}_{\nu(\alpha);2}(r,\beta_n)]\right)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1}dr + a_3^2\sigma_3\left[shr\left(\frac{dg_3}{dr}v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3} - g_3\frac{dv^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}}{dr}\right)\right]_{R_2}^{R_3}+$$

$$+\int_{R_2}^{R_3} g_3(r)\left(a_3^2\Lambda_{(\mu)}[v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha),3}(r,\beta_n)]\right)\sigma_3 shr\,dr \qquad (37)$$

Якщо $\tilde\alpha^0_{11}\neq 0$, то знаходимо, що

$$-a_1^2\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}\left(\frac{dg_1}{dr}v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha),1} - g_1\frac{dv^{(\mu)}_{\nu,(\alpha),1}}{dr}\right)\Big|_{r=R_0} = (-\tilde\alpha^0_{11})^{-1}a_1^2\sigma_1R_0^{2\alpha_1+1}\Big[\left(\tilde\alpha^0_{11}\frac{dg_1}{dr}+\tilde\beta^0_{11}g_1\right)\Big|_{r=R_0}\times$$

$$\times v^{(\mu)}_{\nu(\alpha)1}(R_0,\beta_n) - \left(\tilde\alpha^0_{11}\frac{d}{dr}+\tilde\beta^0_{11}\right)v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)1}(r,\beta_n)\Big|_{r=R_0}\cdot g_1(R_0)\Big] = (-\tilde\alpha^0_{11})^{-1}a_1^2\sigma_1R_0^{2\alpha_1+1}\times$$

$$\times\left[g_0 v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(R_0,\beta_n) - 0\cdot g_1(R_0)\right] = (-\tilde\alpha^0_{11})^{-1}v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(R_0,\beta_n)a_1^2\sigma_1R_0^{2\alpha_1+1}\cdot g_0 \qquad (38)$$

Якщо $\tilde\alpha^3_{22}\neq 0$, то знаходимо, що

$$a_3^2\sigma_3 shR_3\left(\frac{dg_3}{dr}v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha),3}(r,\beta_n) - g_3(r)\frac{dv^{(\mu)}_{\nu,(\alpha),3}}{dr}\right)\Big|_{r=R_3} = a_3^2\sigma_3 shR_3(\tilde\alpha^3_{22})^{-1}\times$$

$$\times\left[\left(\tilde\alpha^3_{22}\frac{d}{dr}+\tilde\beta^3_{22}\right)g_3(r)\Big|_{r=R_3}v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R_3,\beta_n) - \left(\tilde\alpha^3_{22}\frac{d}{dr}+\tilde\beta^3_{22}\right)v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta_n)\Big|_{r=R_3}\cdot g_3(R_3)\right] =$$

$$= (\tilde\alpha^3_{22})^{-1}v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha),3}(R_3,\beta_n)a_3^2\sigma_3 shR_3\cdot g_R - 0\cdot g_3(R_3)a_3^2\sigma_3 shR_3(\tilde\alpha^3_{22})^{-1} =$$

$$= (\tilde\alpha^3_{22})^{-1}v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R_3,\beta_n)a_3^2\sigma_3 shR_3\cdot g_R \equiv (\tilde\alpha^3_{22})^{-1}v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha),3}(R_3,\beta_n)shR_3\cdot g_R \qquad (39)$$

Для випадку, коли умови спряження неоднорідні, базова тотожність (4) має структуру

$$u_k'(R_k)v_k(R_k) - u_k(R_k)v_k'(R_k) = \frac{c_{21,k}}{c_{11,k}}\left[u'_{k+1}(R_k)v_{k+1}(R_k) - u_{k+1}(R_k)v'_{k+1}(R_k)\right]+$$

$$+c_{11,k}^{-1}\left[Z^{(\mu),k}_{\nu,(\alpha);12}(\beta_n)\omega_{2k} - Z^{(\mu),k}_{\nu,(\alpha),22}(\beta_n)\omega_{1k}\right] \qquad (40)$$

Внаслідок базової тотожності (40) в точці спряження R_1 маємо:

$$a_1^2\sigma_1R_1^{2\alpha_1+1}\left(g_1'v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1} - g_1 v^{(\mu)\prime}_{\nu,(\alpha);1}\right)\Big|_{r=R_1} - a_2^2\sigma_2R_1^{2\alpha_2+1}\left(g_2'v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha),2} - g_2v^{(\mu)\prime}_{\nu,(\alpha),2}\right)\Big|_{r=R_1} =$$

$$= \left(a_1^2\sigma_1R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21,1}}{c_{11,1}} - a_2^2\sigma_2R_1^{2\alpha_2+1}\right)\left(\frac{dg_2}{dr}v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n) - g_2(r)\frac{dv^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}}{dr}\right)\Big|_{r=R_1}+$$

$$+a_1^2\sigma_1R_1^{2\alpha_1+1}c_{11,1}^{-1}\left[Z^{(\mu),1}_{\nu,(\alpha),12}(\beta_n)\omega_{21} - Z^{(\mu),1}_{\nu,(\alpha);22}(\beta_n)\omega_{11}\right] =$$

$$= d_1\left[Z^{(\mu),1}_{\nu,(\alpha);12}(\beta_n)\omega_{21} - Z^{(\mu),1}_{\nu,(\alpha);22}(\beta_n)\omega_{11}\right] \qquad (41)$$

тому що в силу вибору σ_1, σ_2 вираз

$$a_1^2\sigma_1R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21,1}}{c_{11,1}} - a_2^2\sigma_2R_1^{2\alpha_2+1} = \frac{c_{11,1}c_{11,2}}{c_{21,1}c_{21,2}}\frac{R_1^{2\alpha_2+1}}{R_2^{2\alpha_2+1}}shR_2\frac{c_{21,1}}{c_{11,1}} -$$

$$-\frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}\frac{R_1^{2\alpha_2+1}}{R_2^{2\alpha_2+1}}shR_2 = \frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}\frac{R_1^{2\alpha_2+1}}{R_2^{2\alpha_2+1}}shR_2(1-1)\equiv 0$$

Внаслідок базової тотожності (40) в точці спряження $r=R_2$ маємо:

$$a_2^2\sigma_2R_2^{2\alpha_2+1}\left(\frac{dg_2}{dr}v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha),2} - g_2\frac{dv^{(\mu)}_{\nu,(\alpha),2}}{dr}\right)\Big|_{r=R_2} - a_3^2\sigma_3 shR_2\left(\frac{dg_3}{dr}v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha),3} - g_3\frac{dv^{(\mu)}_{\nu,(\alpha),3}}{dr}\right)\Big|_{r=R_2} =$$

$$= \left(a_2^2\sigma_2R_2^{2\alpha_2+1}\frac{c_{21,2}}{c_{11,2}} - a_3^2\sigma_3shR_2\right)\left(\frac{dg_3}{dr}v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3} - g_3\frac{dv^{(\mu)}_{\nu,(\alpha),3}}{dr}\right) + a_3^2\sigma_3 shR_2\times$$

$$\times c_{11,2}^{-1}\left(Z^{(\mu),2}_{\nu,(\alpha),12}(\beta_n)\omega_{22} - Z^{(\mu),2}_{\nu,(\alpha),22}(\beta_n)\omega_{12}\right) = d_2\left(Z^{(\mu),2}_{\nu,(\alpha),12}(\beta_n)\omega_{22} - Z^{(\mu),2}_{\nu,(\alpha);22}(\beta_n)\omega_{12}\right) \qquad (42)$$

тому що в силу вибору чисел σ_2 та σ_3 вираз

$$a_2^2\sigma_2R_2^{2\alpha_2+1}\frac{c_{21,2}}{c_{11,2}} - a_3^2\sigma_3 shR_2 = \frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}shR_2\frac{c_{21,2}}{c_{11,2}} - shR_2 = shR_2(1-1)\equiv 0.$$

Внаслідок диференціальних тотожностей

$$\left[a_1^2B_{\nu,\alpha_1} + (\beta_n^2+k_1^2)\right]v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n)\equiv 0,\quad \left[a_2^2B^*_{\alpha_2} + (\beta_n^2+k_2^2)\right]v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n)\equiv 0,$$

$$\left[a_3^2\Lambda_{(\mu)} + (\beta_n^2+k_3^2)\right]v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha),3}(r,\beta_n)\equiv 0$$

отримуємо диференціальні рівності

$$a_1^2B_{\nu,\alpha_1}\left[v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha),1}(r,\beta_n)\right] = -(\beta_n^2+k_1^2)v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha),1}(r,\beta_n),\quad a_2^2B^*_{\alpha_2}\left[v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n)\right] = -(\beta_n^2+k_2^2)\times$$

$$\times v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n),\quad a_3^2\Lambda_{(\mu)}\left[v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta_n)\right] = -(\beta_n^2+k_3^2)v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta_n) \qquad (43)$$

Підставимо в рівність (37) одержані функціональні рівності (38)-(43). Рівність (37) набуває вигляду:

$$H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha),n}\left[M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}[g(r)]\right] = (-\tilde\alpha^0_{11})^{-1}v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(R_0,\beta_n)a_1^2\sigma_1R_0^{2\alpha_1+1}g_0 + (\tilde\alpha^3_{22})^{-1}v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R_3,\beta_n)\times$$

$$\times(shR_3)g_R + \sum_{k=1}^{2} d_k\left[Z^{(\mu),k}_{\nu,(\alpha);12}(\beta_n)\omega_{2k} - Z^{(\mu),k}_{\nu,(\alpha);22}(\beta_n)\omega_{1k}\right] - \sum_{m=1}^{3}(\beta_n^2 + k_m^2)\tilde{g}_{mn} \qquad (44)$$

Оскільки

$$\sum_{m=1}^{3}(\beta_n^2 + k_m^2)\tilde{g}_{mn} = \beta_n^2\sum_{m=1}^{3}\tilde{g}_{mn} + \sum_{m=1}^{3}k_m^2\tilde{g}_{mn} = \beta_n^2\tilde{g}_n + \sum_{m=1}^{3}k_m^2\tilde{g}_{mn},$$

то рівність (44) співпадає з ірвністю (35).

Доведення теореми завершене.

Одержані правила (30), (31) та (35) складають математичний апарат для одержання інтегрального зображення аналітичного розв'язку алгоритмічного характеру достатньо широкого класу нестаціонарних задач математичної фізики неоднорідних середовищ з м'якими межами.

1. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. - М.: Наука, 1965. - 328с.

2. Ленюк М.П. Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя. - Киев, 1983. - 62с. - (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.3).

3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. - М.: Физматгиз, 1959. - 468с.

4. Конет І.М., Ленюк М.П. Інтегральні перетворення типу Мелера-Фока. - Чернівці: Прут, 2002. - 248с.

5. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. - М.: Наука, 1971. - 432с.

6. Ленюк М.П., Шинкарик М.І. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра) Частина 1. - Тернопіль: Економічна думка, 2004. - 368с.

7 Ленюк М.П., Мороз В.В. Побудова скінченного гібридного інтегрального перетворення при наявності спектрального параметру в крайових умовах та умовах спряження // Науковий вісник Чернівецького університету. Випуск 314-315. Математика. - Чернівці: Рута, 2006. - С. 105-113.

УДК 517.91:532.26

Т.М. Пилипюк

Гібридне інтегральне перетворення Лежандра - Фур'є - Бесселя на полярній осі із спектральним параметром в умовах спряження

(м Кам'янець-Подільський)

Методом дельта-подібної послідовності (ядро Коші) запроваджено гібридне інтегральне перетворення Лежандра - Фур'є - Бесселя на полярній осі з двома точками спряження в припущенні, що спектральний параметр бере участь в умовах спряження.

Методом дельта-образной последовательности (ядро Коши) введено интегральное преобразование Лежандра - Фурье - Бесселя на полярной оси с двумя точками сопряжения в предположении, что спектральный параметр принимает участие в условиях сопряжения.

Бібліогр.: 10 назв.

Запровадимо методом дельта-подібної послідовності (ядро Коші) інтегральне перетворення, породжене на множині $I_2^+ = \{r : r \in (0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, \infty)\}$ гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M^{(\mu)}_{\nu,\alpha} = \theta(r)\theta(R_1 - r)a_1^2\Lambda_{(\mu)} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)a_2^2\frac{d^2}{dr^2} + \theta(r - R_2)a_3^2B_{\nu,\alpha} \qquad (1)$$

де $\theta(x)$ - одинична функція Гевісайда [1], $a_j > 0$, $j = \overline{1,3}$.

У рівності (1) $\frac{d^2}{dr^2}$ - диференціальний оператор Фур'є другого порядку [2], $B_{\nu,\alpha} = \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha+1)r^{-1}\frac{d}{dr} - (\nu^2 - \alpha^2)r^{-2}$ - диференціальний оператор Бесселя [3], $\Lambda_{(\mu)} = \frac{d^2}{dr^2} + cthr\frac{d}{dr} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1^2}{1-chr} + \frac{\mu_2^2}{1+chr}\right)$ - узагальнений диференціальний оператор Лежандра [4]; $\nu \ge \alpha > -1/2$, $\mu_1 \ge \mu_2 \ge 0$, $(\mu) = (\mu_1, \mu_2)$.

Означення. За область визначення ГДО $M^{(\mu)}_{\nu,\alpha}$ приймемо множину G вектор-функцій $g(r) = \{g_1(r); g_2(r); g_3(r)\}$ з такими властивостями: 1) вектор-функція $f(r) = \{\Lambda_{(\mu)}[g_1(r)], g_2''(r); B_{\nu,\alpha}[g_3(r)]\}$ неперервна на множині I_2^+; 2) існують такі числа γ_1 та γ_2, що справджуються граничні рівності

$$\lim_{r\to 0}\left[r^{\gamma_1}g_1(r)\right] = 0, \quad \lim_{r\to\infty}\left[r^{\gamma_2}g_3(r)\right] = 0 \qquad (2)$$

3) функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$\left[\left(\tilde{\alpha}^k_{j1}\frac{d}{dr} + \tilde{\beta}^k_{j1}\right)g_k(r) - \left(\tilde{\alpha}^k_{j2}\frac{d}{dr} + \tilde{\beta}^k_{j2}\right)g_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k} = 0;\ j,k = 1,2 \qquad (3)$$

У рівностях (3) беруть участь коефіцієнти: $\tilde{\alpha}^k_{jm} = \alpha^k_{jm} - (\beta^2 + \gamma^2)\delta^k_{jm}$, $\tilde{\beta}^k_{jm} = \beta^k_{jm} - (\beta^2 + \gamma^2)\gamma^k_{jm}$; $\gamma^2 \ge 0$; β - спектральний параметр.

Припустимо, що виконані умови на коефіцієнти: $\alpha^k_{jm} \ge 0$, $\delta^k_{jm} \ge 0$, $\gamma^k_{jm} \ge 0$, $\beta^k_{jm} \ge 0$. $c_{j1,k} = \alpha^k_{2j}\beta^k_{1j} - \alpha^k_{1j}\beta^k_{2j}$, $c_{11,k}\cdot c_{21,k} > 0$; $c_{j2,k} = \delta^k_{2j}\gamma^k_{1j} - \delta^k_{1j}\gamma^k_{2j}$, $\alpha^k_{1j}\gamma^k_{2j} - \alpha^k_{2j}\gamma^k_{1j} = \beta^k_{1j}\delta^k_{2j} - \beta^k_{2j}\delta^k_{1j}$; $c_{j2,k} = 0$, $j, m, k = 1, 2$.

Для $u(r) \in G$ та $v(r) \in G$ з умов спряження (3) випливає базова тотожність:

$$\left[u_k'(r)v_k(r) - u_k(r)v_k'(r)\right]\Big|_{r=R_k} = \frac{c_{21,k}}{c_{11,k}}\left[u_{k+1}'(r)v_{k+1}(r) - u_{k+1}(r)v_{k+1}'(r)\right]\Big|_{r=R_k}; \qquad (4)$$

$$k = 1, 2.$$

Визначимо величини

$$a_1^2\sigma_1 = \frac{c_{11,1}c_{11,2}}{c_{21,1}c_{21,2}}\frac{R_2^{2\alpha+1}}{shR_1}, \quad a_2^2\sigma_2 = \frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}R_2^{2\alpha+1}, \quad a_3^2\sigma_3 = 1,$$