УДК 517.91:532.26

Г.І. Міхалевська

Гібридне інтегральне перетворення типу Ейлера - (Конторовича-Лєбєдєва) - (Конторовича-Лєбєдєва) на полярній осі

(м. Хмельницький)

Методом дельта-подібної послідовності (ядро Діріхле) запроваджено на полярній осі з двома точками спряження інтегральне перетворення, породжене гібридним диференціальним оператором Ейлера - (Конторовича-Лєбєдєва) - (Конторовича-Лєбєдєва).

Методом дельта-образной последовательности (ядро Дирихле) введено на полярной оси с двумя точками сопряжения интегральное преобразование, порожденное гибридным дифференциальным оператором Эйлера - (Конторовича-Лебедева) - (Конторовича-Лебедева).

Бібліогр.: 7 назв.

Запровадимо інтегральне перетворення, породжене на множині $I_2^+ = \Big\{r : r \in (0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, \infty)\Big\}$ гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M_{(\alpha)}^{\alpha_1} = \theta(r)\theta(R_1 - r)a_1^2 B_{\alpha_1}^* + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)a_2^2 B_{\alpha_2} + \theta(r - R_2)a_3^2 B_{\alpha_3} \qquad (1)$$

Тут $\theta(x)$ - одинична функція Гевісайда [1] $B^*_{\alpha_1} = r^2\frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha+1)r\frac{d}{dr} + \alpha_1^2$ - диференціальний оператор Ейлера другого порядку [2], $B_\alpha = r^2\frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha+1)r\frac{d}{dr} + \alpha^2 - \lambda^2 r^2$ - диференціальний оператор Конторовича-Лебедева [3] $2\alpha_1+1 > 0, 2\alpha_j+1 > 0$, $j = 2,3$, $\lambda \in (0,\infty)$, $(\alpha) = (\alpha_2; \alpha_3)$.

<u>**Означення.**</u> За область задання ГДО $M^{\alpha_1}_{(\alpha)}$ приймемо множину G вектор-функцій $g(r) = \{g_1(r); g_2(r); g_3(r)\}$ з такими властивостями: 1) вектор-функція $f(r) = \{B^*_{\alpha_1}[g_1(r)]; B_{\alpha_2}[g_2(r)]; B_{\alpha_3}[g_3(r)]\}$ неперервна на I_2^+; 2) функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$\left[\left(\alpha^k_{j1}\frac{d}{dr} + \beta^k_{j1}\right)g_k(r) - \left(\alpha^k_{j2}\frac{d}{dr} + \beta^k_{j2}\right)g_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k} = 0;\ j,k = 1,2 \tag{2}$$

3) функції $g_j(r)$ задовольняють умови обмеження

$$\lim_{r\to 0}[r^{\gamma_1} g_1(r)] = 0, \quad \lim_{r\to\infty}[r^{\gamma_2} g_3(r)] = 0, \tag{3}$$

Визначимо числа

$$a_1^2\sigma_1 = 1, \quad a_2^2\sigma_2 = \frac{c_{21}}{c_{11}}\frac{R_1^{2\alpha_1+1}}{R_1^{2\alpha_2+1}}, \quad a_3^2\sigma_3 = \frac{c_{21}c_{22}}{c_{11}c_{12}}\frac{R_1^{2\alpha_1+1}}{R_1^{2\alpha_2+1}}\frac{R_2^{2\alpha_2+1}}{R_2^{2\alpha_3+1}},$$

вагову функцію

$$\sigma(r) = \theta(r)\theta(R_1 - r)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1} + \theta(r - R_2)\sigma_3 r^{2\alpha_3-1}$$

та скалярний добуток

$$\Big(u(r), v(r)\Big) = \int_0^\infty u(r)v(r)\sigma(r)dr \equiv \int_0^{R_1} u_1(r)v_1(r)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr +$$

$$+ \int_{R_1}^{R_2} u_2(r)v_2(r)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1}dr + \int_{R_2}^{\infty} u_3(r)v_3(r)\sigma_3 r^{2\alpha_3-1}dr;\ u \in G,\ v \in G \tag{4}$$

Вважаємо, що виконані умови на коефіцієнти: $\alpha^k_{jm} \geq 0$, $\beta^k_{jm} \geq 0$, $c_{1k}\cdot c_{2k} > 0$, $c_{jk} = \alpha^k_{2j}\beta^k_{1j} - \alpha^k_{1j}\beta^k_{2j}$, $j,k = 1,2$; $m = 1,2$.

<u>**Лема 1.**</u> Якщо виконані умови на коефіцієнти і умови спряження неоднорідні

$$\left[\left(\alpha^k_{j1}\frac{d}{dr} + \beta^k_{j1}\right)u_k(r) - \left(\alpha^k_{j2}\frac{d}{dr} + \beta^k_{j2}\right)u_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k} = \omega_{jk};\ j,k = 1,2 \tag{5}$$

то має місце базова тотожність ($v(r) \in G$)

$$\left(\frac{du_k}{dr}v_k(r) - u_k(r)\frac{dv_k}{dr}\right)\Big|_{r=R_k} = \frac{c_{2k}}{c_{1k}}\left[\frac{du_{k+1}}{dr}v_{k+1}(r) - u_{k+1}(r)\frac{dv_{k+1}}{dr}\right]\Big|_{r=R_k} +$$

$$+\frac{1}{c_{1k}}\Big[\Big(\alpha_{12}^k\frac{d}{dr}+\beta_{12}^k\Big)v_{k+1}(r)\Big|_{r=R_k}\omega_{2k}-\Big(\alpha_{22}^k\frac{d}{dr}+\beta_{22}^k\Big)v_{k+1}(r)\Big|_{r=R_k}\omega_{1k}\Big],\ k=1,2 \quad (6)$$

Доведення. Нехай $g_k(r)=u_k(r)$. Згідно рівності (5) розглянемо алгебраїчну систему стосовно $u_k(r)$ та $u_k'(r)$:

$$\alpha_{11}^k u_k'(R_k)+\beta_{11}^k u_k(R_k)=\alpha_{12}^k u_{k+1}'(R_k)+\beta_{12}^k u_{k+1}(R_k)+\omega_{1k}$$
$$\alpha_{21}^k u_k'(R_k)+\beta_{21}^k u_k(R_k)=\alpha_{22}^k u_{k+1}'(R_k)+\beta_{22}^k u_{k+1}(R_k)+\omega_{2k}$$

Звідси за правилами Крамера [4] знаходимо:

$$u_k'(R_k)=\Big[a_{21}^k u_{k+1}'(R_k)+a_{22}^k u_{k+1}(R_k)+\beta_{11}^k\omega_{2k}-\beta_{21}^k\omega_{1k}\Big]\frac{1}{c_{1k}}, \quad (7)$$
$$u_k(R_k)=-\Big[a_{11}^k u_{k+1}'(R_k)+a_{12}^k u_{k+1}(R_k)+\alpha_{11}^k\omega_{2k}-\alpha_{21}^k\omega_{1k}\Big]\frac{1}{c_{1k}}.$$

Оскільки $v(r)\in G$, то маємо алгебраїчну систему:

$$\alpha_{11}^k v_k'(R_k)+\beta_{11}^k v_k(R_k)=\alpha_{12}^k v_{k+1}'(R_k)+\beta_{12}^k v_{k+1}(R_k)$$
$$\alpha_{21}^k v_k'(R_k)+\beta_{21}^k v_k(R_k)=\alpha_{22}^k v_{k+1}'(R_k)+\beta_{22}^k v_{k+1}(R_k)$$

Звідси за правилами Крамера знаходимо, що

$$v_k'(R_k)=\frac{1}{c_{1k}}\Big[a_{21}^k v_{k+1}'(R_k)+a_{22}^k v_{k+1}(R_k)\Big], \quad (8)$$
$$v_k(R_k)=-\frac{1}{c_{1k}}\Big[a_{11}^k v_{k+1}'(R_k)+a_{12}^k v_{k+1}(R_k)\Big].$$

Внаслідок рівностей (7) та (8) маємо:

$$u_k'(R_k)v_k(R_k)-u_k(R_k)v_k'(R_k)=\frac{c_{2k}}{c_{1k}}\Big[u_{k+1}'(R_k)v_{k+1}(R_k)-u_{k+1}(R_k)v_{k+1}'(R_k)\Big]+$$
$$+\frac{1}{c_{1k}}\Big[\Big(\alpha_{12}^k\frac{d}{dr}+\beta_{12}^k\Big)v_{k+1}(r)\Big|_{r=R_k}\omega_{2k}-\Big(\alpha_{22}^k\frac{d}{dr}+\beta_{22}^k\Big)v_{k+1}(r)\Big|_{r=R_k}\omega_{1k}\Big],$$

що співпадає з базовою тотожністю (6).

Ми скористалися тим, що

$$a_{11}^k a_{22}^k-a_{12}^k a_{21}^k\equiv\Big(\alpha_{11}^k\alpha_{22}^k-\alpha_{21}^k\alpha_{12}^k\Big)\Big(\beta_{11}^k\beta_{22}^k-\beta_{21}^k\beta_{12}^k\Big)-$$
$$-\Big(\alpha_{11}^k\beta_{22}^k-\alpha_{21}^k\beta_{12}^k\Big)\Big(\beta_{11}^k\alpha_{22}^k-\beta_{21}^k\alpha_{12}^k\Big)=c_{1k}\cdot c_{2k}.$$

Доведення леми завершено.

Зауваження. Якщо функція $u(r)\in G$, тобто в рівностях (7) $\omega_{1k}=\omega_{2k}=0$, то має місце проста базова тотожність

$$\Big[u_k'(r)v_k(r)-u_k(r)v_k'(r)\Big]\Big|_{r=R_k}=\frac{c_{2k}}{c_{1k}}\Big[u_{k+1}'(r)v_{k+1}(r)-u_{k+1}(r)v_{k+1}'(r)\Big]\Big|_{r=R_k} \quad (9)$$

Лема 2. Гібридний диференціальний оператор $M_{(\alpha)}^{\alpha_1}$ самоспряжений.

Доведення. Згідно правила (4) маємо:

$$\left(M_{(\alpha)}^{\alpha_1}[u(r)], v(r)\right) \equiv \int_0^{\infty} M_{(\alpha)}^{\alpha_1}[u(r)]v(r)\sigma(r)dr = \int_0^{R_1}\left(a_1^2 B_{\alpha_1}^*[u_1(r)]\right)v_1(r)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr+$$

$$+\int_{R_1}^{R_2}\left(a_2^2 B_{\alpha_2}[u_2(r)]\right)v_2(r)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1}dr+\int_{R_2}^{\infty}\left(a_3^2 B_{\alpha_3}[u_3(r)]\right)v_3(r)\sigma_3 r^{2\alpha_3-1}dr \qquad (10)$$

Проінтегруємо в (10) під знаком інтегралів два рази частинами:

$$\left(M_{(\alpha)}^{\alpha_1}[u(r)], v(r)\right) = a_1^2\sigma_1\left[r^{2\alpha_1+1}\left(\frac{du_1}{dr}v_1 - u_1\frac{dv_1}{dr}\right)\right]\Big|_0^{R_1} + \int_0^{R_1} u_1(r)\left(a_1^2 B_{\alpha_1}^*[v_1]\right)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr+$$

$$+a_2^2\sigma_2\left[r^{2\alpha_2+1}\left(\frac{du_2}{dr}v_2 - u_2\frac{dv_2}{dr}\right)\right]\Big|_{R_1}^{R_2} + \int_{R_1}^{R_2} u_2(r)\left(a_2^2 B_{\alpha_2}[v_2(r)]\right)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1}dr+$$

$$+a_3^2\sigma_3\left[r^{2\alpha_3+1}\left(\frac{du_3}{dr}v_3 - u_3\frac{dv_3}{dr}\right)\right]\Big|_{R_2}^{\infty} + \int_{R_2}^{\infty} u_3(r)\left(a_3^2 B_{\alpha_3}[v_3(r)]\right)\sigma_3 r^{2\alpha_3-1}dr \qquad (11)$$

В силу умов обмеження (3) можна знайти такі γ_1 та γ_2, що матимуть місце рівності:

$$\lim_{r\to 0}\left[r^{2\alpha_1+1}\left(\frac{du_1}{dr}v_1 - u_1\frac{dv_1}{dr}\right)\right] = 0,\ \lim_{r\to\infty}\left[r^{2\alpha_3+1}\left(\frac{du_3}{dr}v_3 - u_3\frac{dv_3}{dr}\right)\right] = 0 \qquad (12)$$

В точці спряження $r = R_1$ згідно базової тотожності (9) знаходимо, що

$$a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}\left(\frac{du_1}{dr}v_1 - u_1\frac{dv_1}{dr}\right)\Big|_{r=R_1} - a_2^2\sigma_2 R_1^{2\alpha_2+1}\left(\frac{du_2}{dr}v_2 - u_2\frac{dv_2}{dr}\right)\Big|_{r=R_1} =$$

$$= \left(a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21}}{c_{11}} - a_2^2\sigma_2 R_1^{2\alpha_2+1}\right)\left(\frac{du_2}{dr}v_2 - u_2\frac{dv_2}{dr}\right)\Big|_{r=R_1} = 0 \qquad (13)$$

тому що в силу вибору σ_1 та σ_2 вираз

$$a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21}}{c_{11}} - a_2^2\sigma_2 R_1^{2\alpha_2+1} = \frac{c_{21}}{c_{11}}R_1^{2\alpha_1+1} - \frac{c_{21}}{c_{11}}R_1^{2\alpha_1+1} \equiv 0.$$

Аналогічно в точці спряження $r = R_2$ знаходимо, що

$$a_2^2\sigma_2 R_2^{2\alpha_2+1}\left(\frac{du_2}{dr}v_2 - u_2\frac{dv_2}{dr}\right)\Big|_{r=R_2} - a_3^2\sigma_3 R_2^{2\alpha_3+1}\left(\frac{du_3}{dr}v_3 - u_3\frac{dv_3}{dr}\right)\Big|_{r=R_2} =$$

$$= \left(a_2^2\sigma_2 R_2^{2\alpha_2+1}\frac{c_{22}}{c_{12}} - a_3^2\sigma_3 R_2^{2\alpha_3+1}\right)\left(\frac{du_3}{dr}v_3 - u_3\frac{dv_3}{dr}\right)\Big|_{r=R_2} = 0 \qquad (14)$$

тому, що в силу вибору σ_2 та σ_3 вираз

$$a_2^2\sigma_2 R_2^{2\alpha_2+1}\frac{c_{22}}{c_{12}} - a_3^2\sigma_3 R_2^{2\alpha_3+1} = \left(\frac{c_{21}}{c_{11}}\frac{c_{22}}{c_{12}}\frac{R_1^{2\alpha_1+1}}{R_1^{2\alpha_2+1}} - \frac{c_{21}c_{22}}{c_{11}c_{12}}\frac{R_1^{2\alpha_1+1}}{R_1^{2\alpha_2+1}}\right)R_2^{2\alpha_2+1} = 0.$$

Отже, внаслідок функціональних співвідношень (11)-(14) позаінтегральні члени в рівності (11) рівні нулю. При цьому рівність (11) набуває вигляду:

$$\left(M_{(\alpha)}^{\alpha_1}[u], v\right) = \left(u, M_{(\alpha)}^{\alpha_1}[v]\right) \tag{15}$$

Рівність (15) означає, що ГДО $M_{(\alpha)}^{\alpha_1}$ самоспряжений оператор. Значить, його власні числа дійсні [5]. Оскільки ГДО $M_{(\alpha)}^{\alpha_1}$ на множині I_2^+ має одну особливу точку $r = 0$, то його спектр неперервний [6]. Можна вважати, що спектральний параметр $\beta \in (0, \infty)$. Йому відповідає спектральна вектор-функція

$$V_{(\alpha)}^{\alpha_1}(r,\beta) = \theta(r)\theta(R_1 - r)V_{(\alpha);1}^{\alpha_1}(r,\beta) + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)V_{(\alpha);2}^{\alpha_1}(r,\beta) +$$
$$+\theta(r - R_2)V_{(\alpha);3}^{\alpha_1}(r,\beta) \tag{16}$$

При цьому функції $V_{(\alpha);j}^{\alpha_1}(r,\beta)$ повинні задовольняти диференціальні рівняння

$$\begin{gathered}\left(B_{\alpha_1}^* + b_1^2\right)V_{(\alpha);1}^{\alpha_1}(r,\beta) = 0,\ \ r \in (0, R_1),\ b_1^2 = a_1^{-2}(\beta^2 + k_1^2),\ k_1^2 \geq 0,\\ \left(B_{\alpha_2} + b_2^2\right)V_{(\alpha);2}^{\alpha_1}(r,\beta) = 0,\ \ r \in (R_1, R_2),\ b_2^2 = a_2^{-2}(\beta^2 + k_2^2),\ k_2^2 \geq 0,\\ \left(B_{\alpha_3} + b_3^2\right)V_{(\alpha);3}^{\alpha_1}(r,\beta) = 0,\ \ r \in (R_2, \infty),\ b_3^2 = a_3^{-2}(\beta^2 + k_3^2),\ k_3^2 \geq 0\end{gathered} \tag{17}$$

умови спряження (2) та умови обмеження (3).

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B_{\alpha_1}^* + b_1^2)v = 0$ складають функції $r^{-\alpha_1}\cos(b_1 \ln r)$ та $r^{-\alpha_1}\sin(b_1 \ln r)$ [2]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння (Конторовича-Лебедева) $(B_{\alpha_2} + b_2^2)v = 0$ складають функції $C_{\alpha_2}(\lambda r, b_2)$ та $D_{\alpha_2}(\lambda r, b_2)$ [3]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння (Конторовича-Лебедева) $(B_{\alpha_3} + b_3^2)v = 0$ утворюють функції $C_{\alpha_3}(\lambda r, b_3)$ та $D_{\alpha_3}(\lambda r, b_3)$ [3].

В силу лінійності спектральної задачі Штурма-Ліувілля (17), (2), (3) функції $V_{(\alpha);j}^{\alpha_1}(r,\beta)$ відшукуватимемо як лінійну комбінацію фундаментальної системи розв'язків:

$$\begin{gathered}V_{(\alpha);1}^{\alpha_1}(r,\beta) = A_1 r^{-\alpha_1}\cos(b_1 \ln r) + B_1 r^{-\alpha_1}\sin(b_1 \ln r),\ \ r \in (0, R_1),\\ V_{(\alpha);2}^{\alpha_1}(r,\beta) = A_2 C_{\alpha_2}(\lambda r, b_2) + B_2 D_{\alpha_2}(\lambda r, b_2),\ \ r \in (R_1, R_2),\\ V_{(\alpha);3}^{\alpha_1}(r,\beta) = B_3 D_{\alpha_3}(\lambda r, b_3),\ \ r \in (R_2, \infty).\end{gathered} \tag{18}$$

Умови спряження (2) для визначення п'яти величин A_1, A_2 та B_j $(j = \overline{1,3})$ дають однорідну алгебраїчну систему з чотирьох рівнянь:

$$Y_{\alpha_1;j1}^{11}(b_1, R_1)A_1 + Y_{\alpha_1;j1}^{12}(b_1, R_1)B_1 - X_{\alpha_2;j2}^{11}(\lambda R_1, b_2)A_2 - X_{\alpha_2;j2}^{12}(\lambda R_1, b_2)B_2 = 0$$

$$X^{21}_{\alpha_2;j1}(\lambda R_2, b_2)A_2 + X^{22}_{\alpha_2;j1}(\lambda R_2, b_2)B_2 - X^{22}_{\alpha_3;j2}(\lambda R_2, b_3)B_3 = 0,\ j = 1,2 \qquad (19)$$

Припустимо, що $B_3 \neq 0$. Розглянемо алгебраїчну систему:

$$X^{21}_{\alpha_2;j1}(\lambda R_2, b_2)A_2 + X^{22}_{\alpha_2;j1}(\lambda R_2, b_2)B_2 = X^{22}_{\alpha_3;j2}(\lambda R_2, b_3)B_3 \qquad (20)$$

Визначник алгебраїчної системи (20) обчислюється безпосередньо:

$$-q_{\alpha_2} \equiv X^{21}_{\alpha_2;11}(\lambda R_2, b_2)X^{22}_{\alpha_2;21}(\lambda R_2, b_2) - X^{21}_{\alpha_2;21}(\lambda R_2, b_2)X^{22}_{\alpha_2;11}(\lambda R_2, b_2) =$$

$$= -\frac{c_{12} sh(\pi b_2)}{\pi \lambda^{2\alpha_2} R_2^{2\alpha_2+1}} \neq 0$$

Алгебраїчна система (20) має єдиний розв'язок [4]:

$$A_2 = B_3 q^{-1}_{\alpha_2}\Big[X^{22}_{\alpha_3;22}(\lambda R_2, b_3)X^{22}_{\alpha_2;11}(\lambda R_2, b_2) - X^{22}_{\alpha_3;12}(\lambda R_2, b_3)X^{22}_{\alpha_2;21}(\lambda R_2, b_2)\Big], \qquad (21)$$

$$B_2 = B_3 q^{-1}_{\alpha_2}\Big[X^{22}_{\alpha_3;12}(\lambda R_2, b_3)X^{21}_{\alpha_2;21}(\lambda R_2, b_2) - X^{22}_{\alpha_3;22}(\lambda R_2, b_3)X^{21}_{\alpha_2;11}(\lambda R_2, b_2)\Big].$$

При відомих A_2, B_2 розглянемо алгебраїчну систему:

$$Y^{11}_{\alpha_1;j1}(b_1, R_1)A_1 + Y^{12}_{\alpha_1;j1}(b_1, R_1)B_1 = B_3 q^{-1}_{\alpha_2} b_{(\alpha);j}(\beta),\ j = 1,2 \qquad (22)$$

У системі (22) прийняті позначення:

$$\delta_{\alpha_2;jk}(\lambda R_1, \lambda R_2; b_2) = X^{11}_{\alpha_2;j2}(\lambda R_1, b_2)X^{22}_{\alpha_2;k1}(\lambda R_2, b_2) - X^{12}_{\alpha_2;j2}(\lambda R_1, b_2)X^{21}_{\alpha_2;k1}(\lambda R_2, b_2);$$

$$b_{(\alpha);j}(\beta) = X^{22}_{\alpha_3;22}(\lambda R_2, b_3)\delta_{\alpha_2;j1}(\lambda R_1, \lambda R_2; b_2) - X^{22}_{\alpha_3;12}(\lambda R_2, b_3)\delta_{\alpha_2;j2}(\lambda R_1, \lambda R_2; b_2).$$

Визначник алгебраїчної системи (22) обчислюється безпосередньо:

$$Y^{11}_{\alpha_1;11}(b_1, R_1)Y^{12}_{\alpha_1;21}(b_1, R_1) - Y^{11}_{\alpha_1;21}(b_1, R_1)Y^{12}_{\alpha_1;11}(b_1, R_1) = c_{11} b_1 R_1^{-(2\alpha_1+1)} \equiv q_{\alpha_1}(\beta) \neq 0$$

Алгебраїчна система (22) має єдиний розв'язок [4]:

$$B_3 = q_{\alpha_1}(\beta) q_{\alpha_2}(\beta);\ A_1 = \omega^{\alpha_1}_{(\alpha);2}(\beta),\ B_1 = -\omega^{\alpha_1}_{(\alpha);1}(\beta) \qquad (23)$$

$$\omega^{\alpha_1}_{(\alpha);j}(\beta) = b_{(\alpha);1}(\beta)Y^{1j}_{\alpha_1;21}(b_1, R_1) - b_{(\alpha);2}(\beta)Y^{1j}_{\alpha_1;11}(b_1, R_1),\ j = 1,2.$$

Підставимо обчислені за формулами (21) та (23) величини $A_k\,(k = 1,2)$ й B_j $(j = \overline{1,3})$ у рівності (18). Одержимо функції:

$$V^{\alpha_1}_{(\alpha);1}(r, \beta) = \omega^{\alpha_1}_{(\alpha);2}(\beta) r^{-\alpha_1} \cos(b_1 \ln r) - \omega^{\alpha_1}_{(\alpha);1}(\beta) r^{-\alpha_1} \sin(b_1 \ln r),$$

$$V^{\alpha_1}_{(\alpha);2}(r, \beta) = q_{\alpha_1}(\beta)\Big\{X^{22}_{\alpha_3;12}(\lambda R_2, b_3)\Big[X^{21}_{\alpha_2;21}(\lambda R_2, b_2)D_{\alpha_2}(\lambda r, b_2) -$$

$$- X^{22}_{\alpha_2;21}(\lambda R_2, b_2)C_{\alpha_2}(\lambda r, b_2)\Big] -$$

$$- X^{22}_{\alpha_3;22}(\lambda R_2, b_3)\Big[X^{21}_{\alpha_2;11}(\lambda R_2, b_2)D_{\alpha_2}(\lambda r, b_2) - X^{22}_{\alpha_2;11}(\lambda R_2, b_2)C_{\alpha_2}(\lambda r, b_2)\Big]\Big\},$$

$$V^{\alpha_1}_{(\alpha);3}(r,\beta) = q_{\alpha_1}(\beta)q_{\alpha_2}(\beta)D_{\alpha_3}(\lambda r, b_3) \quad (24)$$

Згідно формули (16) спектральна вектор-функція $V^{\alpha_1}_{(\alpha)}(r,\beta)$ визначена.

Наявність вагової функції $\sigma(r)$, спектральної вектор-функції $V^{\alpha_1}_{(\alpha)}(r,\beta)$ та спектральної щільності

$$\Omega^{\alpha_1}_{(\alpha)}(\beta) = \beta[b_1(\beta)]^{-1}\Big(\big[\omega^{\alpha_1}_{(\alpha);1}(\beta)\big]^2 + \big[\omega^{\alpha_1}_{(\alpha);2}(\beta)\big]^2\Big)^{-1}$$

дозволяє визначити пряме $H^{\alpha_1}_{(\alpha)}$ та обернене $H^{-\alpha_1}_{(\alpha)}$ гібридне інтегральне перетворення (ГІП), породжене на множині I_2^+ ГДО $M^{\alpha_1}_{(\alpha)}$, визначеним рівністю (1) [7]:

$$H^{\alpha_1}_{(\alpha)}[g(r)] = \int\limits_0^\infty g(r)V^{\alpha_1}_{(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr \equiv \tilde{g}(\beta) \quad (25)$$

$$H^{-\alpha_1}_{(\alpha)}[\tilde{g}(\beta)] = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \tilde{g}(\beta)V^{\alpha_1}_{(\alpha)}(r,\beta)\Omega^{\alpha_1}_{(\alpha)}(\beta)d\beta \equiv g(r) \quad (26)$$

Математичним обгрунтуванням правил (25), (26) є твердження.

Теорема 1 (про інтегральне зображення). Якщо вектор-функція

$$f(r) = \Big\{\theta(r)\theta(R_1-r)r^{\alpha_1-1/2} + \theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\sqrt{r^{2\alpha_2-1}} + \theta(r-R_2)\sqrt{r^{\alpha_3-1}}\Big\}g(r)$$

неперервна, абсолютно сумовна й має обмежену варіацію на множині $(0,\infty)$, то для будь-якого $r\in I_2^+$ має місце інтегральне зображення:

$$g(r) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty V^{\alpha_1}_{(\alpha)}(r,\beta)\int\limits_0^\infty g(\rho)V^{\alpha_1}_{(\alpha)}(\rho,\beta)\sigma(\rho)d\rho\,\Omega^{\alpha_1}_{(\alpha)}(\beta)d\beta \quad (27)$$

Доведення. Скористаємося дельта-подібною властивістю подвійного невласного інтегралу

$$J \equiv \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \psi(\lambda)V^{\alpha_1}_{(\alpha)}(r,\lambda)\Omega^{\alpha_1}_{(\alpha)}(\lambda)d\lambda V^{\alpha_1}_{(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr = \psi(\beta), \quad (28)$$

якщо $\lambda=\beta\in(0,\infty)$, та дорівнює нулю, якщо $\lambda=\beta\overline{\in}(0,\infty)$.

Припустимо тепер, що функція

$$g(r) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \psi(\beta)V^{\alpha_1}_{(\alpha)}(r,\beta)\Omega^{\alpha_1}_{(\alpha)}(\beta)d\beta \quad (29)$$

Помножимо рівність (29) на вираз $V^{\alpha_1}_{(\alpha)}(r,\lambda)\sigma(r)dr$ й проінтегруємо по r від $r=0$ до $r=\infty$. В силу рівності (28) маємо:

$$\int\limits_0^\infty g(r)V^{\alpha_1}_{(\alpha)}(r,\lambda)\sigma(r)dr = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \psi(\beta)V^{\alpha_1}_{(\alpha)}(r,\beta)\Omega^{\alpha_1}_{(\alpha)}(\beta)d\beta V^{\alpha_1}_{(\alpha)}(r,\lambda)\sigma(r)dr =$$

$$= \psi(\lambda), \text{ якщо } \beta = \lambda \in (0, \infty). \tag{30}$$

Згідно рівності (30) функцію

$$\psi(\beta) = \int_0^\infty g(\rho) V_{(\alpha)}^{\alpha_1}(\rho, \beta)\sigma(\rho)d\rho$$

підставимо в рівність (29). Одержимо інтегральне зображення (27).

Доведення теореми завершено.

Визначимо числа та функції:

$$d_1 = a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1} \cdot c_{11}^{-1},\ d_2 = a_2^2\sigma_2 R_2^{2\alpha_2+1} \cdot c_{12}^{-1};\ \tilde{g}_1(\beta) = \int_0^{R_1} g_1(r) V_{(\alpha);1}^{\alpha_1}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr,$$

$$\tilde{g}_2(\beta) = \int_{R_1}^{R_2} g_2(r) V_{(\alpha);2}^{\alpha_1}(r,\beta)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1}dr,\ \tilde{g}_3(\beta) = \int_{R_2}^{\infty} g_3(r) V_{(\alpha);3}^{\alpha_1}(r,\beta)\sigma_3 r^{2\alpha_3-1}dr,$$

$$Z_{(\alpha);i2}^{\alpha_1,k}(\beta) = \left(\alpha_{i2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{i2}^k\right) V_{(\alpha);k+1}^{\alpha_1}(r,\beta)\Big|_{r=R_k},\ i,k = 1,2.$$

<u>Теорема 2</u> (про основну тотожність). Якщо функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$\lim_{r\to 0}\left[r^{2\alpha_1+1}\left(\frac{dg_1}{dr}V_{(\alpha);1}^{\alpha_1} - g_1\frac{dV_{(\alpha);1}^{\alpha_1}}{dr}\right)\right] = 0,\ \lim_{r\to\infty}\left[r^{2\alpha_3+1}\left(\frac{dg_3}{dr}V_{(\alpha);3}^{\alpha_1} - g_3\frac{dV_{(\alpha);3}^{\alpha_1}}{dr}\right)\right] = 0$$

та умови спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k\right)g_k(r) - \left(\alpha_{j2}^k\frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k\right)g_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k} = \omega_{jk};\ j,k = 1,2, \tag{31}$$

а функція $f(r) = \left\{B_{\alpha_1}^*[g_1(r)]; B_{\alpha_2}[g_2(r)]; B_{\alpha_3}[g_3(r)]\right\}$ неперервна на множині I_2^+, то справджується основна тотожність ГІП ГДО $M_{(\alpha)}^{\alpha_1}$:

$$H_{(\alpha)}^{\alpha_1}\left[M_{(\alpha)}^{\alpha_1}[g(r)]\right] = -\beta^2\tilde{g}(\beta) - \sum_{i=1}^3 k_i^2\tilde{g}_i(\beta) +$$

$$+ \sum_{k=1}^2 d_k\left[Z_{(\alpha);12}^{\alpha_1,k}(\beta)\omega_{2k} - Z_{(\alpha);22}^{\alpha_1,k}(\beta)\omega_{1k}\right] \tag{32}$$

<u>Доведення.</u> Згідно правила (25) маємо:

$$H_{(\alpha)}^{\alpha_1}\left[M_{(\alpha)}^{\alpha_1}[g(r)]\right] = \int_0^\infty M_{(\alpha)}^{\alpha_1}[g(r)]V_{(\alpha)}^{\alpha_1}(r,\beta)\sigma(r)dr \equiv \int_0^{R_1} a_1^2 B_{\alpha_1}^*[g_1(r)]V_{(\alpha);1}^{\alpha_1}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr+$$

$$+\int_{R_1}^{R_2}\left(a_2^2B_{\alpha_2}[g_2(r)]\right)V_{(\alpha);2}^{\alpha_1}(r,\beta)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1}dr+\int_{R_2}^{\infty}\left(a_3^2B_{\alpha_3}[g_3(r)]\right)V_{(\alpha);3}^{\alpha_1}(r,\beta)\sigma_3 r^{2\alpha_3-1}dr \quad (33)$$

Проінтегруємо в (33) під знаком інтегралів два рази частинами:

$$H_{(\alpha)}^{\alpha_1}\left[M_{(\alpha)}^{\alpha_1}[g(r)]\right]=a_1^2\sigma_1\left[r^{2\alpha_1+1}\left(\frac{dg_1}{dr}V_{(\alpha);1}^{\alpha_1}-g_1\frac{dV_{(\alpha);1}^{\alpha_1}}{dr}\right)\right]\Big|_0^{R_1}+\int_0^{R_1}g_1(r)\times$$

$$\times\left(a_1^2B_{\alpha_1}^*[V_{(\alpha);1}^{\alpha_1}(r,\beta)]\right)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr+a_2^2\sigma_2\left[r^{2\alpha_2+1}\left(\frac{dg_2}{dr}V_{(\alpha);2}^{\alpha_1}-g_2\frac{dV_{(\alpha);2}^{\alpha_1}}{dr}\right)\right]\Big|_{r=R_1}^{r=R_2}+$$

$$+\int_{R_1}^{R_2}g_2(r)\left(a_2^2B_{\alpha_2}[V_{(\alpha);2}^{\alpha_1}(r,\beta)]\right)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1}dr+a_3^2\sigma_3\left[r^{2\alpha_3+1}\left(\frac{dg_3}{dr}V_{(\alpha);3}^{\alpha_1}(r,\beta)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-g_3(r)\frac{dV_{(\alpha);3}^{\alpha_1}}{dr}\right)\right]\Big|_{r=R_2}^{\infty}+\int_{R_2}^{\infty}g_3(r)\left(a_3^2B_{\alpha_3}[V_{(\alpha);3}^{\alpha_1}(r,\beta)]\right)\sigma_3 r^{2\alpha_3-1}dr \quad (34)$$

В силу диференціальних тотожностей

$$\left[a_1^2B_{\alpha_1}^*+(\beta^2+k_1^2)\right]V_{(\alpha);1}^{\alpha_1}(r,\beta)=0,\quad \left[a_2^2B_{\alpha_2}+(\beta^2+k_2^2)\right]V_{(\alpha);2}^{\alpha_1}(r,\beta)=0,$$

$$\left[a_3^2B_{\alpha_3}+(\beta^2+k_3^2)\right]V_{(\alpha);3}^{\alpha_1}(r,\beta)=0$$

отримуємо диференціальні рівності:

$$a_1^2B_{\alpha_1}^*\left[V_{(\alpha);1}^{\alpha_1}(r,\beta)\right]=-(\beta^2+k_1^2)V_{(\alpha);1}^{\alpha_1}(r,\beta),\ a_2^2B_{\alpha_2}\left[V_{(\alpha);2}^{\alpha_1}(r,\beta)\right]=$$

$$=-(\beta^2+k_2^2)V_{(\alpha);2}^{\alpha_1}(r,\beta),\ a_3^2B_{\alpha_3}\left[V_{(\alpha);3}^{\alpha_1}(r,\beta)\right]=-(\beta^2+k_3^2)V_{(\alpha);3}^{\alpha_1}(r,\beta) \quad (35)$$

Внаслідок основної тотожності (6) знаходимо, що: 1) в точці спряження $r=R_1$

$$a_1^2\sigma_1R_1^{2\alpha_1+1}\left(g_1'(R_1)V_{(\alpha);1}^{\alpha_1}(R_1,\beta)-g_1(R_1)V_{(\alpha);1}^{\alpha_1\ \prime}\right)-a_2^2\sigma_2R_1^{2\alpha_2+1}\left(g_2'V_{(\alpha);2}^{\alpha_1}-g_2V_{(\alpha);2}^{\alpha_1\ \prime}\right)\Big|_{r=R_1}=$$

$$=\left(a_1^2\sigma_1R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21}}{c_{11}}-a_2^2\sigma_2R_1^{2\alpha_2+1}\right)\left(\frac{dg_2}{dr}V_{(\alpha);2}^{\alpha_1}-g_2\frac{dV_{(\alpha);2}^{\alpha_1}}{dr}\right)\Big|_{r=R_1}+a_1^2\sigma_1R_1^{2\alpha_1+1}:c_{11}\times$$

$$\times\left(Z_{(\alpha);12}^{\alpha_1,1}(\beta)\omega_{21}-Z_{(\alpha);22}^{\alpha_1,1}(\beta)\omega_{11}\right)=d_1\left[Z_{(\alpha);12}^{\alpha_1,1}(\beta)\omega_{21}-Z_{(\alpha);22}^{\alpha_1,1}(\beta)\omega_{11}\right] \quad (36)$$

тому, що в силу вибору чисел σ_1 та σ_2 вираз

$$a_1^2\sigma_1R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21}}{c_{11}}-a_2^2\sigma_2R_1^{2\alpha_2+1}=\frac{c_{21}}{c_{11}}R_1^{2\alpha_1+1}-\frac{c_{21}}{c_{11}}R_1^{2\alpha_1+1}\equiv 0;$$

2) в точці спряження $r = R_2$

$$a_2^2\sigma_2 R_2^{2\alpha_2+1}\left(\frac{dg_2}{dr}V_{(\alpha);2}^{\alpha_1} - g_2\frac{dV_{(\alpha);2}^{\alpha_1}}{dr}\right)\Big|_{r=R_2} - a_3^2\sigma_3 R_2^{2\alpha_3+1}\left(\frac{dg_3}{dr}V_{(\alpha);3}^{\alpha_1} - g_3\frac{dV_{(\alpha);3}^{\alpha_1}}{dr}\right)\Big|_{r=R_2} =$$

$$= \left(a_2^2\sigma_2 R_2^{2\alpha_2+1}\frac{c_{22}}{c_{12}} - a_3^2\sigma_3 R_2^{2\alpha_3+1}\right)\left(\frac{dg_3}{dr}V_{(\alpha);3}^{\alpha_1} - g_3\frac{dV_{(\alpha);3}^{\alpha_1}}{dr}\right)\Big|_{r=R_2} + a_2^2\sigma_2 R_2^{2\alpha_2+1} : c_{12}\times$$

$$\times\left(Z_{(\alpha);12}^{\alpha_1,2}(\beta)\omega_{22} - Z_{(\alpha);22}^{\alpha_1,2}(\beta)\omega_{12}\right) = d_2\left[Z_{(\alpha);12}^{\alpha_1,2}(\beta)\omega_{22} - Z_{(\alpha);22}^{\alpha_1,2}(\beta)\omega_{12}\right] \tag{37}$$

тому, що в силу вибору чисел σ_2 та σ_3 вираз

$$a_2^2\sigma_2 R_2^{2\alpha_2+1}\frac{c_{22}}{c_{12}} - a_3^2\sigma_3 R_2^{2\alpha_3+1} = \frac{c_{21}c_{22}}{c_{11}c_{12}}\frac{R_1^{2\alpha_1+1}}{R_1^{2\alpha_2+1}}R_2^{2\alpha_2+1} - \frac{c_{21}c_{22}}{c_{11}c_{12}}\frac{R_1^{2\alpha_1+1}}{R_1^{2\alpha_2+1}}R_2^{2\alpha_2+1} = 0.$$

Підставимо в (34) одержані функціональні залежності (35)-(37). Маємо рівність

$$H_{(\alpha)}^{\alpha_1}\left[M_{(\alpha)}^{\alpha_1}[g(r)]\right] = -\sum_{i=1}^{3}(\beta^2 + k_i^2)\tilde{g}_i + \sum_{k=1}^{2} d_k\left[Z_{(\alpha);12}^{\alpha_1,k}(\beta)\omega_{2k} - Z_{(\alpha);22}^{\alpha_1,k}(\beta)\omega_{1k}\right] \tag{38}$$

Оскільки сума

$$\sum_{i=1}^{3}(\beta^2 + k_i^2)\tilde{g}_i = \beta^2\sum_{i=1}^{3}\tilde{g}_i + \sum_{i=1}^{3}k_i^2\tilde{g}_i = \beta^2\tilde{g}(\beta) + \sum_{i=1}^{3}k_i^2\tilde{g}_i,$$

то рівність (38) співпадає з рівністю (32).

Доведення теореми завершено.

Правила (25), (26) та (32) складають ефективний математичний апарат для одержання інтегрального зображення аналітичного розв'язку достатньо широкого класу стаціонарних й нестаціонарних задач математичної фізики неоднорідного середовища.

1. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. - М.: Наука, 1965. - 328с.

2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. - М.: Физматгиз. 1959. - 468с.

3. Ленюк М.П., Міхалевська Г.І. Інтегральні перетворення типу Конторовича-Лебедева. - Чернівці: Прут, 2002. - 280с.

4. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. - М.: Наука, 1971. - 432с.

5. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. - К.: Наук. думка, 1965. - 798с.

6. Ленюк М.П., Шинкарик М.І. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1. - Тернопіль: Економічна думка, 2004. - 368с.

7. Ленюк М.П. Гібридні інтегральні перетворення типу Ейлера - (Фур'є, Бесселя). - Львів, 2009. - 76с. - (Препринт / НАН України. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача; 02.09). - Чернівці: Прут, 2009.