

Навчальне видання

*Свідерський Владислав Петрович,  
Яремчук Василь Сергійович*

## **ТЕРМОДИНАМІКА І ТЕПЛОВІ ПРОЦЕСИ ЗВАРЮВАННЯ**

Навчальний посібник

Відповідальний за випуск: **В. С. Яремчук**

Художнє оформлення обкладинки: **О. С. Ванчурова**

Комп'ютерна верстка: **Т. В. Чабан**

Підписано до друку 15.04.2014  
Формат 30×42/2. Папір офс. Гарн. Times New Roman  
Друк різнографією. Ум. друк. арк. – 21,93. Обл.-вид. арк. – 15,77  
Тираж 50. Зам. № 83/1–14

---

Віддруковано в редакційно-видавничому центрі ХНУ  
29016, м. Хмельницький, вул. Інститутська, 7/1  
Свідоцтво про внесення в Державний реєстр,  
серія ДК № 4489 від 18.02.2013 р.

УДК 536.2:621.735.8(075.8)  
ББК 22.317  
С24

*Рекомендовано МОН України  
як навчальний посібник для студентів ВНЗ  
напряму підготовки “Зварювання”  
(лист № 1/11-5029 від 7.04.2014)*

*Рецензенти:*

- Сіренко Г. О.** – д-р техн. наук, проф., акад. Академії технологічних наук України, зав. кафедрою неорганічної і фізичної хімії Прикарпатського національного університету ім. В. Стефаника;
- Дрогомирецький Я. М.** – д-р техн. наук, проф. кафедри зносостійкості і відновлення деталей Івано-Франківського університету нафти і газу;
- Сливінський О. А.** – канд. техн. наук, доц. кафедри зварювального виробництва Національного технічного університету України “КПІ”

**Свідерський В. П., Яремчук В. С.**  
С24 Термодинаміка і теплові процеси зварювання : навч. посібник / В. П. Свідерський, В. С. Яремчук. – Хмельницький : ХНУ, 2014. – 375 с.  
ISBN 978-966-330-202-7

Посібник умовно розділений на три блоки: у яких відповідно подані загальні основи термодинаміки, основні відомості з теплоперенесення та розрахунки теплових процесів у зварювальних технологіях. Окремим розділом наведені спеціальні задачі з метою інтенсифікації пізнавальної діяльності при вивченні курсу.

Для студентів ВНЗ напряму підготовки “Зварювання”, окремі теми можуть бути корисними для студентів інших інженерно-технічних напрямів підготовки.

**УДК 536.2:621.735.8(075.8)  
ББК 22.317**

ISBN 978-966-330-202-7

© Свідерський В. П., Яремчук В. С., 2014  
© ХНУ, оригінал-макет, 2014

## ВСТУП

---

Більшість існуючих способів зварювання оснований на нагріві матеріалу до пластичного стану або плавлення. Необхідну для цього теплоту отримують від джерел енергії, які різняться між собою за характером виділення теплоти, потужністю, терміном дії, швидкістю руху та іншими ознаками.

**Зварювання** – це процес отримання монолітного з'єднання матеріалів за рахунок введення і термодинамічно-необоротного перетворення енергії та речовини в місці з'єднання [4]. Аналіз термодинамічної структури процесів зварювання дозволяє класифікувати їх за видом введеної енергії на термічні, термомеханічні та механічні процеси.

Використовуючи перший закон термодинаміки можна розрахувати зміну внутрішньої енергії системи поєднаних елементів, яка необхідна для утворення монолітного з'єднання за конкретних умов: заданих джерел енергії, матеріалу виробів, конструкції з'єднань тощо.

Другий закон термодинаміки, передбачений ще М.В. Ломоносовим в 1746 р., а сформульовано Клаузіусом у 1850 р. і В. Томсоном в 1851 р. дозволяє визначити умови самодовільного виникнення процесів у термодинамічних системах.

З іншої сторони, самодовільно виникаючі процеси переходу енергії стану в роботу визначають і ті зміни, які здійснюються в матеріальних системах, у тому числі і в результаті хімічних та фізико-хімічних процесів.

Перехід теплової енергії від одного тіла до іншого визначається наявністю різниці температур; самодовільний процес переходу теплоти від джерела з більш високою температурою до джерела з більш низькою температурою можна використовувати для отримання роботи.

Одне з основних питань, що розглядається в теорії теплових процесів при зварюванні, – визначення умов, за яких досягається необхідний нагрів виробу і його з'єднання в єдине ціле. Крім того, нагрів і охолодження викликають різні фізичні та хімічні процеси в матеріалі виробу – плавлення, кристалізацію, структурні перетворення, об'ємні зміни, появу напружень і пластичних деформацій. Ці процеси приводять до зміни властивостей та стану матеріалу і впливають на якість всієї конструкції в цілому. Щоб визначити характер протікання цих процесів необхідно знати розподіл температур у тілі і зміну його в часі для кожного конкретного випадку. Це друге основне питання, що розглядається у теорії теплових процесів зварювання.

Дві ці задачі розв'язуються одним методом. Розділення їх умовне і повинно лише підкреслити, що крім основної вимоги отримати зварне з'єднання є ряд додаткових, які потрібно врахувати при здійсненні процесу зварювання. Теорія теплових процесів зварювання є частиною загальної теорії теплопровідності в матеріалах. Крім того, при зварюванні з поверхні металів теплота передається конвективним теплообміном або в результаті випромінювання.

Перераховані процеси відіграють важливу роль – в кінцевому результаті вся теплота, що введена при зварюванні, виділяється у навколишній простір, а деталі – охолоджуються.

Для інтенсифікації пізнавальної діяльності студентів при вивченні викладеного матеріалу розглянуто низку прикладів розв'язання завдань різної категорії складності з переходом від алгоритмічної дії до ретроспективно-варіативної, частково-пошукової і творчої дії. Також наведені завдання, спрямовані на систематизацію вивченого, вміння аналізувати, узагальнювати та робити висновки.

Матеріали посібника можуть бути корисні і для інженерно-технічних працівників зварювального виробництва.

На завершення, автори висловлюють глибоку подяку канд. техн. наук, доц. О.А. Сливінському (Національний технічний університет України "КПІ"), акад. Академії технологічних наук України, д-ру техн. наук, проф. Г.О. Сіренку (Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника) і д-ру техн. наук, проф. Я.М. Дрогомирецькому (Івано-Франківський національний університет нафти і газу) за критичні зауваження, корисні поради і пропозиції, зроблені при рецензуванні рукопису. Також автори будуть вдячні за критичні зауваження та побажання, спрямовані на покращення посібника і які будуть враховуватися у випадку наступних видань.

# Частина 1

## Розділ I

### ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ВИЗНАЧЕННЯ ТЕХНІЧНОЇ ТЕРМОДИНАМІКИ

---

- Термодинаміка, предмет і метод, термодинамічні системи, їх види
- Основні поняття: кількість речовини, термодинамічний стан, робоче тіло, його параметри, ідеальний і реальний газ
- Нульовий закон термодинаміки. Рівновага у термодинамічній системі
- Поверхня і діаграми станів.  
Рівняння стану ідеального та реального газів

#### 1.1. Термодинаміка, предмет і метод, термодинамічні системи, їх види

Загальний рівень розвитку людства, в першу чергу, визначається обсягом енерговитрат. Стрижнем функціонування будь-якої системи – від самої простої технічної до найбільш складної біологічної – є використання та володіння енергією. І чим більша енергоозброєність цивілізації, тим на вищому щаблі розвитку вона знаходиться. За даними, опублікованими ООН, потреби людства в енергії подвоюються кожні тринадцять років, але енергетичні ресурси Землі, які можна доцільно використовувати за наявного рівня розвитку техніки, є досить обмеженими. Тому проблема економічного і ефективного використання енергії з кожним роком стає більш актуальною.

Усі пристрої, обладнання, агрегати, які забезпечують процеси отримання і використання теплової енергії або перетворення її в інші види енергії – механічну, електричну тощо носять узагальнену назву *теплотехніки*. Серед цих агрегатів є обладнання різних класів та видів: від найпростіших нагрівачів до досить складних конструктивних виробів – атомних реакторів, турбін, теплових насосів, МГД-генераторів і т.п. Однак в їх основі при проектуванні, розробці конструкції тощо лежать теоретичні начала, які описуються термодинамікою.

При підготовці інженерних фахівців термодинаміка є базовою теоретичною дисципліною, на основі якої будується багато наступних дисциплін і які використовують у своїй основі теоретичні постулати і закономірності термодинаміки.

**Термодинаміка** – розділ теоретичної фізики, що представляє собою одну із самих широких областей сучасного природознавства, а саме науку про перетворення різних видів енергії із однієї в іншу (рис. 1.1).

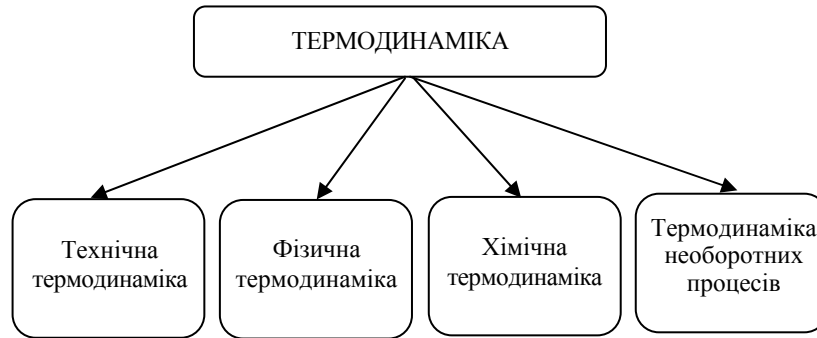


Рис. 1.1 – Класифікація розділів термодинаміки як науки

Термодинаміка (грец.  $\Theta\epsilon\rho\mu\eta$  – тепло,  $\delta\upsilon\nu\alpha\mu\iota\zeta$  – сила) – встановлює взаємозв’язок між тепловими, механічними і хімічними процесами, які відбуваються в газах, парах, а також властивості цих тіл при різних фізичних умовах. У термодинаміці умовно виділяють такі розділи чи частини:

1) **технічна термодинаміка** – вивчає закономірності взаємного перетворення теплоти в роботу, перетворення теплової енергії в механічну в теплових машинах, а також властивості робочих тіл, що беруть участь в цих перетвореннях. Вона не враховує мікроскопічну будову речовини і механізми молекулярних процесів, а розглядає явища (“феномени”) в цілому і тому є феноменологічною наукою;

2) **фізична термодинаміка** – вивчає процеси перетворення енергії в твердих, рідких і газоподібних тілах, випромінювання тіл, магнітні і електричні явища і на цій основі встановлює математичні залежності між термодинамічними величинами;

3) **хімічна термодинаміка** – описує та вивчає хімічні, теплові, фізико-хімічні процеси при взаємодії речовин;

4) **термодинаміка необоротних процесів** – вивчає нерівноважні процеси, які приводять до нових часово-просторових станів. Розглядаючи відхилення від рівноважних станів, у хімії отримують коливні реакції, нові просторові періодичні структури. Ще одним прикладом нерівноважної структури є біологічна еволюція та існування людини як системи.

Необхідно також відмітити, що вивченням теплових явищ займається також молекулярна фізика, на базі якої в XIX столітті сформувалась статистична термодинаміка.

Молекулярно-статистичний метод базується на розгляді законів теплового руху великої кількості молекул, при цьому на основі статистичних методів встановлюється взаємозв'язок між характеристиками руху окремих частинок і макрофізичними характеристиками системи. Статистична термодинаміка надає можливість виявити фізичний зміст низки термодинамічних понять, а також розрахувати деякі величини (теплоємність газів). Метод є точним, але математичний апарат, який він використовує, є більш громіздким.

Усі види енергій, які вивчають у термодинаміці можна розділити на дві групи: кінетичну і потенціальну. В свою чергу кожна з них поділяється на зовнішню і внутрішню. Кінетична енергія – це енергія руху, потенціальна – розташування. Внутрішня кінетична енергія – це невидимий рух частинок тіла, з яких воно складається і являє собою сутність теплової енергії. Вивчення умов взаємного перетворення теплової енергії (внутрішньої кінетичної) в механічну стосовно до теплових явищ є **предметом технічної термодинаміки**.

Матеріальне тіло або сукупність тіл, які перебувають у тепловій чи механічній взаємодії між собою і навколишнім середовищем називають **термодинамічною системою** або просто системою. Внаслідок взаємодії тіла системи можуть обмінюватись як енергією, так і субстанцією (матерією). Прикладом системи є газ, що знаходиться у циліндрі з поршнем.

Система, яка обмінюється із зовнішнім середовищем енергією і субстанцією називається **відкритою** (рис. 1.2, *a*), яка не обмінюється субстанцією, а тільки енергією – **закритою** (рис. 1.2, *б*), яка не обмінюється ні енергією, ні субстанцією – **ізолюваною** (рис. 1.2, *в*).

Спосіб або форма, за якими здійснюється передача енергії, називається **родом взаємодії**. Кількість родів взаємодії, за якими система може передавати енергію, характеризують числом термодинамічних степенів вільності.

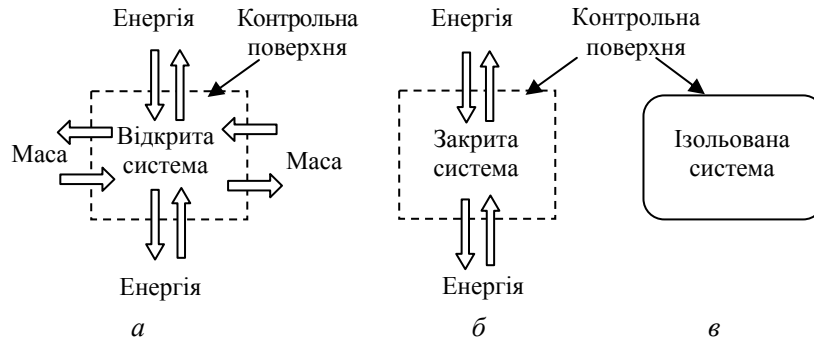


Рис. 1.2 – Види термодинамічних систем

Наприклад, система (рис. 1.3, *a*) може обмінюватись енергією завдяки зміні об'єму (механічна робота). Це механічний або деформаційний степінь вільності. Крім цього система може обмінюватись енергією завдяки підведенню або відведенню теплової енергії. Цей другий степінь вільності називається тепловим або термічним.

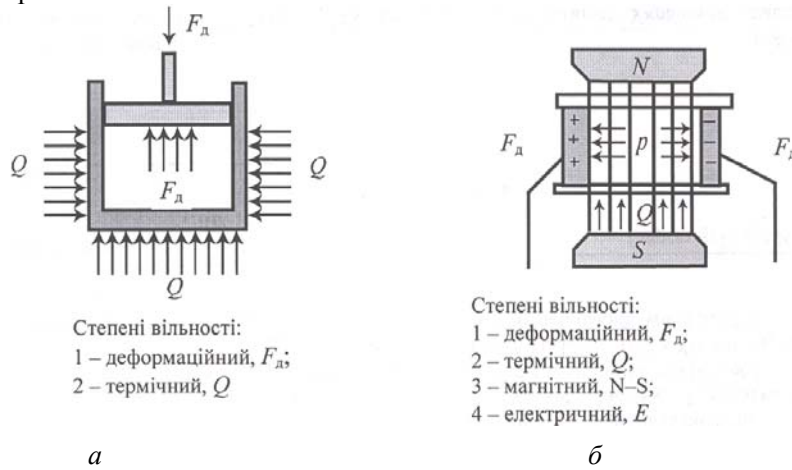


Рис. 1.3 – Термодинамічні степені вільності системи

Системи, які мають більше, ніж два степені вільності, називаються **складними**. У термодинаміці, як правило, розглядають прості системи, що мають два степені вільності (деформаційний і термічний). Їх ще називають термодіформативними.

Система, яка складається з речовин з однаковими фізичними властивостями називається **фізично однорідною**. Однорідна система, в якій немає поверхонь поділу, називається **гомогенною**. Система, яка складається з декількох частин з різними фізичними властивостями (вода і пара, лід і пара), що відокремлені видимими поверхнями поділу, називається **гетерогенною**. Гетерогенні частини мають назву **фази**. Залежно від кількості фаз гетерогенні системи є дво-, три- або чотирифазними. Якщо ми маємо хімічно однорідну частину системи, то вона носить назву **компонент**. За роллю окремих тіл, що входять в термодинамічну систему, їх поділяють на **робочі тіла** (РТ), **джерела тепла** (ДТ) і **об'єкти роботи** (ОР).

Робоче тіло отримує або віддає теплоту, взаємодіючи з більш нагрітими чи більш холодними тілами, що називаються **джерелами теплоти**. Тіло, що віддає теплоту робочому тілу і при цьому не змінює свою температуру, називають **верхнім джерелом теплоти** (ВДТ), а що отримує теплоту від робочого тіла і при цьому також не змінюють температуру – **нижнім джерелом теплоти** (НДТ). Переміщувані або ті, що змінюють свій енергетичний рівень окремі елементи контрольної оболонки, називають об'єктом роботи.

### **1.2. Основні поняття: кількість субстанції, термодинамічний стан, робоче тіло, його параметри, ідеальний і реальний газ**

Все що має масу називається матерією. Матерія виступає у двох формах – субстанціальній і несубстанціальній.

Субстанціальна – це матерія, маса спокою якої відмінна від нуля (тіла, молекули, стани), несубстанціальна не має маси спокою (фотони). У системі СІ за одиницю кількості субстанції прийнято 1 моль. Один моль – це кількість молекул вуглецю  $C_{12}$ , яка міститься у масі вуглецю в 0,012 кг. На практиці часто використовують одиницю, кратну моллю – кіломоль (1000 моль).

Ще однією одиницею кількості субстанції виступає маса. В системі СІ прийнята така кількість субстанції, маса спокою якої в нормальних енергетичних умовах складає 1 кг.

Важливу роль у процесах взаємодії системи з навколишнім середовищем відіграє об'єкт, який має назву "**робоче тіло**" – умовна незмінна матеріальна субстанція, що значно змінює свій об'єм при перетворенні енергії і виконує корисну роботу з переміщення робо-

чих органів. До робочого тіла ставляться певні вимоги: воно має бути недорогим, поширеним у природі, неагресивним до складових системи і мати певні теплофізичні властивості (невисока температура насичення, значна теплота фазового перетворення, висока ентальпійність тощо). Як робочі тіла використовують воду, водяну пару, хладони, фреони, гази, суміш рідини і пари, рідини і повітря тощо. Робоче тіло розглядається як окремий випадок термодинамічної системи.

Робочими тілами у термодинаміці слугують гази і пари різних рідин. Принципової різниці між газом і паром немає. Практична різниця полягає у тому, що гази мають стабільний агрегатний стан і більшість з них досить складно перетворити в рідину. Для того, щоб газ перевести в рідину, його потрібно охолодити до температури, яка є нижче критичної. При температурах вище критичних, перехід газу в рідину неможливий. Наприклад, для азоту така температура становить  $-169\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Пари відрізняються нестабільним станом і незначні зміни можуть перетворити їх у рідину.

При вивченні термодинамічних залежностей для робочих тіл, які знаходяться у газоподібному стані вводять поняття *ідеальний газ*.

Ідеальними газами називають такі гази, які повністю підпадають під дію законів Бойля–Маріотта і Гей-Люссака. В ідеальних газах повністю відсутні сили взаємодії між молекулами, а об'єм самих молекул значно менший об'єму самого газу, молекули можна вважати матеріальними точками: вони мають масу, але не мають розмірів.

Усі реальні гази при великих температурах і малих тисках майже повністю підпадають під поняття ідеального газу і за властивостями практично не відрізняються від нього. Стан ідеального газу – це граничний стан реального газу, за умови, що тиск прямує до нуля. Введення поняття ідеального газу дозволило отримати прості математичні залежності між величинами, які характеризують стан тіла і на основі цих законів створити струнку і чітку теорію термодинамічних процесів.

Робоче тіло залежно від зовнішніх умов має різні властивості і може перебувати у різних станах. Оскільки в класичній термодинаміці розглядають макроскопічні системи, то стан термодинамічної системи описують за допомогою макроскопічних фізичних величин, значення яких можна визначити дослідним шляхом без знання передісторії системи ( $T, p, V, m$ ). Якщо вони набувають

стійкого значення, то говорять, що система перебуває в певному стані, а фізичні величини, які характеризують цей стан, називаються **термодинамічними змінними** або **параметрами стану**. Щоб визначити, чи певна фізична величина є параметром стану, необхідно розглянути її зміну при переході системи із одного стану в інший. Якщо зміна величини залежить виключно від початкового і кінцевого станів, то така величина є параметром стану. Якщо зміна фізичної величини залежить від способу переходу від початкового до кінцевого стану (залежить від передісторії системи), то така величина є **параметром процесу** (робота, теплота).

**Рівноважним термодинамічним станом** називають стан робочого тіла, який не змінюється в часі без зовнішнього енергетичного впливу. Параметри рівноважного стану тіла по всій масі тіла однакові і дорівнюють відповідним параметрам зовнішнього середовища. Послідовна зміна стану тіла, що відбувається в результаті енергетичної взаємодії робочого тіла з навколишнім середовищем, називається **термодинамічним процесом**.

Довільний процес зміни стану тіла являє відхилення від стану рівноваги. Процес, що відбувається настільки повільно, що в системі в кожний момент часу встигає встановитись рівноважний стан, називається **рівноважним**, інакше він називається **нерівноважним**. Нерівноважність реальних процесів визначається, перш за все, тим, що під впливом зовнішніх умов вони відбуваються з кінцевими швидкостями і в робочому тілі не встигає встановитись рівноважний стан.

Не всі параметри стану можуть змінюватися незалежно один від одного. Завжди можна виділити кілька **незалежних** параметрів, за якими визначають всі параметри стану. Вибір незалежних параметрів є довільним, але кількість їх обмежена. Параметри, які не входять до незалежних і які не вимірюються безпосередньо, називаються **функціями стану** (ентальпія, ентропія, ексергія та ін.).

Теоретично всі величини, які вимірюються, можуть бути використані як термодинамічні параметри. Але доцільно вибирати такі параметри, які дадуть найпростіші співвідношення і які безпосередньо пов'язані з процесами, що відбуваються у системі.

Як показує досвід, тепловий стан газу певної маси однозначно може бути охарактеризований за допомогою трьох параметрів, які можна виміряти: питомого об'єму  $v$ , абсолютних тиску  $p$  і температури  $T$ . Сукупність цих параметрів повністю характеризує тепловий стан системи, тому їх називають **основними термічними параметрами** (рис. 1.4).

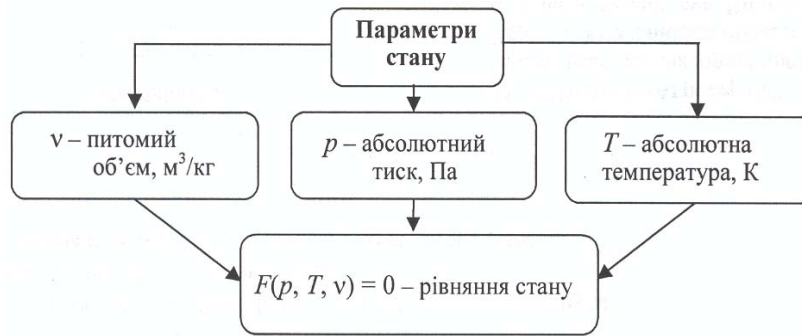


Рис. 1.4 – Термічні параметри стану

Параметри стану системи, які визначаються сумою параметрів стану всіх окремих частин системи (об'єм  $V$ , маса  $m$  та інші), називаються **екстенсивними**. Отже, екстенсивні параметри пов'язані з розміром термодинамічної системи.

Параметри, значення яких не залежить від розмірів системи і залишаються однаковими в усіх її частинах, називаються **інтенсивними параметрами** стану (температура, тиск та інші).

Для більшості термодинамічних задач зручно користуватися питомими величинами, тому що вони поводять себе як інтенсивні параметри і в стані рівноваги залишаються однаковими у кожній точці гомогенної системи. Будь-який екстенсивний параметр, поділений на масу  $m$ , стає відповідним інтенсивним параметром або питоמוю величиною. В подальшому всі питомі та, як виняток, екстенсивний параметр – масу будемо позначати малою літерою.

**Питомий об'єм** – це відношення об'єму, який займає речовина, до її маси,  $\text{м}^3/\text{кг}$ :

$$v = V / m, \quad (1.1)$$

де  $m$  – маса речовини,  $\text{кг}$ .

Величина, обернена до питомого об'єму, називається **густиною**. Густина – це кількість речовини в одиниці об'єму,  $\text{кг}/\text{м}^3$ :

$$\rho = m / V, \quad (1.2)$$

**Тиск**. Із молекулярно-кінетичних уявлень тиск – це середня сила ударів молекул, що перебувають у безперервному хаотичному русі, яка припадає на одиничну площу стінки посудини і розраховується за рівнянням:

$$p = \frac{2}{3} n_0 \frac{m \bar{w}^2}{2}, \quad (1.3)$$

де  $n_0$  – концентрація молекул;  $m$  – маса молекули;  $\bar{w}$  – середня швидкість поступального руху молекул.

Отже, тиск дорівнює  $2/3$  кінетичної енергії поступального руху молекул в одиниці об'єму. Рівняння (1.3) називають **основним рівнянням молекулярно-кінетичної теорії газів**. Воно встановлює якісний і кількісний зв'язок між макроскопічними параметрами газу як сукупності (колективу) молекул і середніми значеннями тих величин, які характеризують рух кожної молекули зокрема. Зважаючи на те, що немає сенсу говорити про тиск однієї чи малої кількості молекул, можна стверджувати, що тиск має статистичний характер.

Виходячи з макроскопічних уявлень, тиск – це нормальна складова сили, яка діє на одиничну площину:

$$p = F_n/A, \quad (1.4)$$

де  $F_n$  – нормальна складова сили;  $A$  – площа площини.

У міжнародній системі одиниць тиск виражається в паскалях:  $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$ . Паскаль – дуже мала величина, тому використовують кратні одиниці:  $1 \text{ кПа} = 10^3 \text{ Па}$  або  $1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па}$ . Крім того, в техніці тиск виражають і в інших одиницях: атмосфера, висота стовпчика рідини, бар ( $1 \text{ бар} = 10^5 \text{ Па}$ ) тощо.

Зв'язок між цими величинами наступний:

– фізична атмосфера:

$$1 \text{ атм} = 760 \text{ мм рт. ст.} = 1,0332 \text{ кгс/см}^2 = 101325 \text{ Па} = 1,013 \text{ бар};$$

– технічна атмосфера:

$$1 \text{ ат} = 1 \text{ кгс/см}^2 = 735,6 \text{ мм рт. ст.} = 98069 \text{ Па} = 0,981 \text{ бар}.$$

Вибір фізичної атмосфери зумовлений тим, що вона дорівнює середньорічному барометричному тиску на рівні поверхні світового океану. Вибір технічної атмосфери пов'язаний зі зручністю її застосування.

Атмосферний (барометричний) тиск  $p_0$  вимірюють за допомогою **барометрів**. Для вимірювання тиску, вищого за атмосферний, тобто надлишкового, використовують **манометри**. Цей тиск називають манометричним  $p_m$ . Розрідження  $p_v$  вимірюють за допомогою **вакууметрів**.

Термодинамічним параметром є абсолютний тиск (рис. 1.5), тобто тиск, який вимірюється від абсолютного нуля, тому його роз-

раховують за виразами: для манометра –  $p = p_0 + p_m$ ; вакуумметра –  $p = p_0 - p_v$ ;

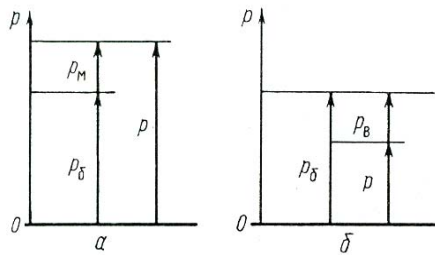


Рис. 1.5 – До визначення абсолютного тиску

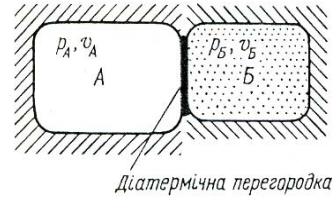


Рис. 1.6 – Модель схеми термічної рівноваги

**Температура.** Розглянемо дві термодинамічні системи, наприклад  $A$  та  $B$ , в кожній з яких параметри мають стійкі значення. Приведемо ці системи в контакт таким чином, щоб вони могли взаємодіяти між собою крізь діатермічну перегородку і повністю були ізольовані від навколишнього середовища (рис. 1.6).

Діатермічною називають таку перегородку, крізь яку не відбувається переносу маси, механічної та електромагнітної енергії. Початковий стан сумарної системи буде постійним, системи почнуть взаємодіяти крізь перегородку. Якщо масообміну немає, то така взаємодія пов'язана з передачею теплоти і називається **тепловою**. З часом система набуде рівноважного стану, який називається **термічною рівновагою** між системами  $A$  та  $B$ . Поняття термічної рівноваги є основоположним при формулюванні загального або нульового начала термодинаміки. За термічної рівноваги параметри стану двох систем залежать один від одного, тобто існує функція:

$$f_{AB}(p_A, v_A, p_B, v_B) = 0. \quad (1.5)$$

У цій функції кожен із параметрів залежить від трьох інших. Функцію  $f_{AB}$  можна визначити дослідним шляхом, наприклад спостерігаючи стан термічної рівноваги залежно від початкових станів систем  $A$  та  $B$ .

Наявність такої рівноваги свідчить про появу нового параметра стану – температури – і дає можливість експериментально її визначити. Якщо температура  $T_A$  тіла  $A$  вища, ніж температура  $T_B$  тіла  $B$ , то при їх контакті тіло  $A$  передає теплову енергію тілу  $B$ .

Якщо поміж тілами не відбувається обміну тепловою енергією, то ці тіла знаходяться між собою в *термічній рівновазі*, тобто тіла мають однакову температуру. Температура – параметр стану, який визначає здатність системи до передачі теплової енергії.

Температура – важливе в технічній термодинаміці поняття, яке встановлюється в результаті аналізу теплової взаємодії між тілами, тобто зміни їхніх станів без макроскопічних переміщень. Температура характеризує ступінь нагріву тіла. Незважаючи на зрозумілість і наочність, таке якісне визначення температури пов'язане із суб'єктивним відчуттям людиною понять “гаряче” чи “холодне”, але воно не дає кількісної характеристики температури. Із молекулярно-кінетичної теорії температура – це міра середньої кінетичної енергії поступального руху молекул:

$$\frac{m\bar{w}^2}{2} = \frac{3}{2}kT, \quad (1.6)$$

де  $m$  – маса молекули;  $\bar{w}$  – середня швидкість молекул;  $k$  – стала Больцмана ( $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К).

З (1.6) видно, що температура характеризує середню інтенсивність хаотичного руху молекул. Із збільшенням чи зменшенням температури швидкість руху молекул змінюється і при  $T = 0$  тепловий рух молекул припиняється. Хоча з молекулярно-кінетичних уявлень температура визначається через кінетичну енергію руху молекул, поняття температури не можна застосовувати до однієї або декількох молекул. Не можна говорити про “гарячі” або “холодні” молекули. Поняття температури втрачає сенс, наприклад, стосовно газу в космічному просторі, де концентрація молекул дуже мала. Отже, температура є статистичною величиною і має сенс лише за великої кількості (колективу) молекул.

За одиницю температури можна було б взяти одиниці енергії. Однак використання одиниць енергії в термометрії становить значні метрологічні труднощі. Крім того, історично склалося так, що для температури було запропоновано використовувати спеціальні одиниці – градуси. Пов'язано це з тим, що вимірювати температуру навчилися раніше, ніж було з'ясовано її фізичний зміст. Як видно з наведених визначень, немає прямих методів вимірювання температури. Для вимірювання температури використовують різні фізичні властивості тіл (тиск, об'єм, електричний опір, термоелектро-рушійну силу та інше), які змінюються зі зміною температури.

Найбільшого поширення в техніці набув метод вимірювання температури за зміною об'єму рідини. За шкалою Цельсія температура танення льоду при атмосферному тиску приймається за нуль, а температура кипіння води за тих же умов – за 100 градусів. Позначається температура в цій шкалі через  $1^{\circ}\text{C}$ . За стоградусною шкалою температури можуть бути додатними або від'ємними. Однак за цим способом вимірювання температури має певну неоднозначність. Різні тіла мають свої закони зміни об'єму від температури. Тому застосування термометрів з різними рідинами дають різні значення температури в проміжних точках між 0 та  $100^{\circ}\text{C}$ . Ситуація змінилася після того, як була встановлена лінійна залежність об'єму і тиску ідеального газу від температури (закони Гей-Люссака та Шарля). Виявилось доцільним екстраполювати пряму до перетину з віссю абсцис і вибрати цю точку за нуль градусів (рис. 1.7).

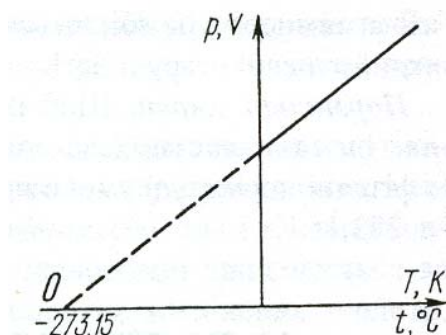


Рис. 1.7 – Залежність тиску та об'єму ідеального газу від температури

Масштаб цієї температури може бути довільним, але для переходу від однієї шкали до іншої він вибраний так, щоб інтервал між температурою танення льоду і температурою кипіння дорівнював  $100^{\circ}\text{C}$ . За цих умов точка перетину лежить на відстані  $-273,15^{\circ}\text{C}$ . Визначену таким чином температуру називають *абсолютною* і позначають через  $T$  ( $T = t + 273,15$ ). Одиницею абсолютної температури є кельвін (К).

Розмірність температури, визначена за зміною різних фізичних властивостей тіла, буде різною, тому доцільно температуру ввести в ряд основних одиниць із власною розмірністю. Згідно з Міжнародною системою одиниць абсолютна температура вважається *термодинамічною температурою*, а шкала, побудована за другим

законом термодинаміки, називається *термодинамічною температурною шкалою*. Величина градуса визначається за умови, що потрійній точці води приписується температура 273,16 К (точно). Потрійною точкою називається такий стан, в якому всі три фази – лід, вода і пара – перебувають у рівновазі. За стоградусної шкали температура потрійної точки води досить точно дорівнює 0,01 °С.

Безпосереднє вимірювання температури за термодинамічною шкалою є складним. На практиці часто доводиться порівнювати покази різних термометрів у різних вузьких інтервалах температур. Для цих цілей можна було використати водневі та гелієві термометри, які найбільш точно підпадають під закони ідеального газу в широкому інтервалі температур (приблизно від точки кипіння гелію 4,2 К до температури затвердіння золота 1337,5 К).

Газова температура збігається з термодинамічною. Але використання їх теж викликає певні незручності.

У деяких країнах використовуються шкали Фаренгейта і Ранкіна. Перерахунок температури, заданої в градусах Фаренгейта (°F) в градуси Цельсія виконують за співвідношенням:

$$t\text{ }^{\circ}\text{C} = (t\text{ }^{\circ}\text{F} - 32)/1,8.$$

Шкала Ранкіна (°Ra) має початком відліку абсолютний нуль температури, а ціна її поділок однакова з шкалою Фаренгейта, тому  $T(\text{°Ra}) = 1,8T$ .

**Нормальні умови.** Щоб порівняти фізичні характеристики різних робочих тіл, слід звести їх до однакових умов, які називаються *нормальними*. За фізичні нормальні умови прийнято  $p = 760$  мм рт. ст. = 101325 Па = 1 атм,  $T = 273,15$  К.

Крім термічних параметрів стану в якості основних використовують ще так звані калоричні параметри стану: *внутрішня енергія U*, *ентальпія H* та *ентропія S*.

Згідно з молекулярно-кінетичною теорією *внутрішня енергія* складається з енергії теплового (хаотичного) руху молекул, хімічної та внутрішньоядерної енергії. Оскільки в технічній термодинаміці вивчаються фізичні процеси, то будемо розглядати тільки одну складову внутрішньої енергії – енергію теплового руху молекул.

Енергія теплового руху складається з кінетичної енергії поступального, обертального і коливального рухів молекул, що залежать тільки від температури газу і потенціальної енергії взаємодії молекул, яка залежить від відстані між молекулами. Оскільки відстань між молекулами визначається тиском або об'ємом, котрий

займає газ, то в загальному випадку внутрішня енергія  $U$  є функцією  $p$  та  $T$ :

$$U = f(p, T) \text{ або } u = f(v, T).$$

Для 1 кг газу внутрішня енергія дорівнює (Дж/кг):

$$u = U / m. \quad (1.7)$$

Внутрішня енергія має властивість адитивності, тобто внутрішня енергія системи  $u$  дорівнює сумі внутрішніх енергій її окремих частин.

**Ентальпія**  $H$  (лат. *entalpo* – нагріваю). У практику теплових розрахунків цю функцію запровадив Джозайя-Віллард Гіббс.

Питома ентальпія позначається буквою  $h$  (тобто віднесена до 1 кг газу) і вимірюється в Дж/кг. Вона являє собою за визначенням складну функцію:

$$h = u + pv. \quad (1.8)$$

Оскільки  $u$ ,  $p$  та  $v$  є параметрами стану, то і  $h$  є параметром стану. Питома ентальпія  $h$  є адитивним або екстенсивним параметром, оскільки її величина пропорційна масі. Добуток  $pv$  має назву потенціальної енергії тиску і являє собою роботу, яку необхідно затратити, щоб ввести тіло об'ємом  $v$  у середовище з тиском  $p$ .

Фізичний зміст ентальпії полягає в тому, що вона характеризує енергію розширеної системи, в якій робоче тіло переміщується в вигляді потоку. Розширена система – це система, що включає в себе робоче тіло і навколишнє середовище. Оскільки в технічній термодинаміці не вимагається знання абсолютного значення ентальпії, то вона звичайно відраховується від деякого умовного нуля (для газів  $h = 0$  при  $t = 0$  °С).

Зміна ентальпії, як і зміна внутрішньої енергії, не залежить від характеру процесу, а залежить лише від початкового і кінцевого станів. Питома ентальпія  $h$  має велике значення і застосовується при розрахунках теплових і холодильних машин.

**Ентропія**  $S$  (грец.  $\epsilon\nu$  – в,  $\tau\rho\tau\eta$  – поворот, зміна, перетворення). Поняття ентропії введено німецьким фізиком Клаузіусом при дослідженні процесів перетворення теплоти в роботу і являє собою параметр стану, диференціал якого дорівнює відношенню нескінченно малої кількості теплоти в елементарному оборотному процесі до абсолютної температури тіла, яка на нескінченно малому відрізьку процесу є постійною величиною (Дж/К).

$$dS = \frac{\delta Q}{T}, \quad (1.9)$$

де  $dS$  – повний диференціал функції стану  $S$ .

Ентропія  $S$ , як і внутрішня енергія  $U$ , має властивість адитивності, тобто алгебраїчна сума змін ентропії окремих тіл, що входять в систему, дорівнює зміні ентропії всієї системи в цілому. Зміст ентропії полягає в тому, що вона показує, наскільки реальний термодинамічний процес близький до *оборотного* – процесу, що проходить як в прямому, так і зворотному напрямках при тих же параметрах та за умови, що при цьому не відбувається ніяких змін як в системі, так і в навколишньому середовищі, тобто вона є мірою необоротності.

### 1.3. Нульовий закон термодинаміки. Рівновага у термодинамічній системі

Розглянемо термічну рівновагу між трьома системами –  $A$ ,  $B$  та  $V$ . Між системами  $A$  та  $B$  існує термічна рівновага. Термічна рівновага існує також між системами  $B$  та  $V$ . Якщо привести в контакт системи  $A$  та  $V$  за допомогою діатермічної перегородки, то, як показує досвід, між системами  $A$  та  $V$  теж зберігається термічна рівновага. Це і є змістом нульового закону термодинаміки: *два тіла, які перебувають у термічній рівновазі з третім тілом, будуть у термічній рівновазі і між собою*. Нульовий закон термодинаміки виражає транзитивність термічної рівноваги, тобто, якщо системи перебувають у термічній рівновазі, то вони мають однакову температуру.

Зміст цього закону довгий час вважався самоочевидним і вперше був сформульований Р.Х. Фаулером у 1931 р. тобто набагато пізніше першого та другого законів термодинаміки. Нульове начало термодинаміки не виводиться із більш простих або більш фундаментальних положень. Це первинний закон, який лежить в основі багатьох положень термодинаміки.

Тепер розглянемо систему, яка складається з декількох частин і є в контакт з навколишнім середовищем певних постійних параметрів. Якщо окремі частини системи не перебувають в однаковому стані, то з часом у системі самочинно настане стан стійкої термодинамічної рівноваги, за якої немає передачі теплоти від

однієї частини до іншої та їх механічного переміщення. В системі має місце теплова і механічна рівновага.

За термодинамічної рівноваги температура і тиск системи будуть дорівнювати температурі і тиску навколишнього середовища. Якщо зовнішні умови зміняться, то це зумовить зміну параметрів системи і такий стан буде продовжуватися доти, поки знову температура і тиск системи не стануть рівними температурі і тиску навколишнього середовища, тобто поки знову не настане рівновага.

Виходячи з наведеного прикладу, можна дати таке визначення рівноважного стану. Стан, в який приходить система за постійних зовнішніх умов і в якому термодинамічні параметри  $p$ ,  $v$ ,  $T$  та інші фізичні властивості в усіх точках залишаються постійними у часі, і в системі немає потоків речовини та теплоти, називають **рівноважним**. Тільки в цьому випадку можна говорити про певний тиск чи температуру системи. Тільки такі стани можна кількісно описати або зобразити графічно.

Якщо параметри системи в різних точках різні і змінюються з часом, то такий стан називається **нерівноважним**. Говорити в цьому випадку про якісь певні значення параметрів і чисельно описати такий стан практично неможливо, оскільки існує різниця тисків, температур тощо. Під дією градієнтів параметрів виникають переноси маси та енергії. Як показує практика, ізольована система з часом обов'язково перейде в рівноважний стан. Перенос маси та енергії в системі припиняється, хоча тепловий рух молекул продовжується.

#### 1.4. Поверхня і діаграми станів.

##### Рівняння стану ідеального та реального газів

Тепловий стан гомогенної термодинамічної системи при фіксованій масі описується за допомогою термічних параметрів  $p$ ,  $v$ ,  $T$ . Ці параметри зв'язані між собою, і зміна одного із них веде до зміни іншого. Ця залежність може бути описана аналітично у вигляді функції:

$$f(p, v, T) = 0 \text{ або } p = f(v, T). \quad (1.10)$$

Співвідношення між термічними параметрами системи (1.8) називається **термічним рівнянням стану маси** і в координатах  $p$ ,  $v$ ,  $T$  являє собою поверхню, яка називається **термодинамічною** (рис. 1.8). Термодинамічна поверхня – це геометричне місце точок рівноважного стану системи.

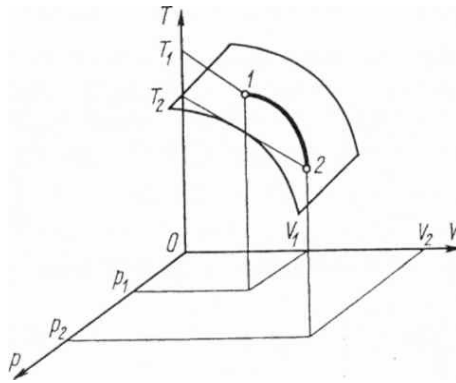


Рис. 1.8 – Термодинамічна поверхня рівноважного стану

Однак користуватися термодинамічною поверхнею незручно і на практиці часто переходять на плоске зображення рівноважних станів системи. Для цього поверхню проєктують на координатні площини, тобто фіксують один із параметрів. Такі системи координат називають *діаграмами стану*. Так, у координатах  $p-v$  отримують криві  $T = \text{const}$ , які називають *ізотермами* (рис. 1.9, а), у координатах  $p-T$  – криві  $v = \text{const}$ , які називають *ізохорами* (рис. 1.9, б), і в координатах  $v-T$  – криві  $p = \text{const}$ , які називають *ізобарами* (рис. 1.9, в).

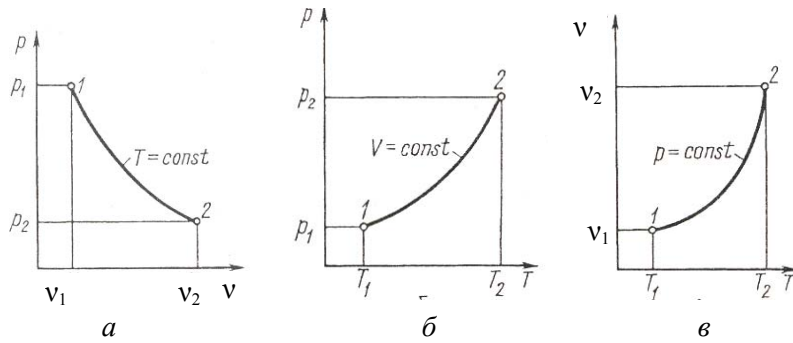


Рис. 1.9 – Термодинамічні діаграми рівноважного стану

Рівняння стану встановлюють або дослідним шляхом, або на основі молекулярно-кінетичних (статистичних) уявлень. Методами термодинаміки їх установити неможливо.

Основні газові закони були встановлені дослідним шляхом значно раніше, ніж була розроблена молекулярно-кінетична теорія газів. Стисло наведемо їх. Як відомо, у 1662 р. Роберт Бойль і незалежно від нього у 1676 р. Едм Маріотт відкрили наступну закономірність: **добуток тиску на об'єм в ізотермічних умовах є величиною постійною**

$$pv = \text{const.} \quad (1.11)$$

У 1802 р. Гей-Люссак установив, що в ізобарному процесі об'єм газу пропорційний температурі:

$$V = V_0(1 + \beta_V t), \quad (1.12)$$

де  $V$ ,  $V_0$  – об'єми газу відповідно при температурі  $t$  та  $0^\circ\text{C}$ ;  $\alpha_V$  – термічний коефіцієнт відносного об'ємного розширення газу. При малих значеннях тиску величина  $\beta_V$  є сталою для всіх газів і приблизно дорівнює  $1/273,15 = 0,00366$ .

Подібний закон для ізохорного процесу встановив Жак Александр Сезар Шарль (1787 р.):

$$p = p_0(1 + \beta_p t), \quad (1.13)$$

де  $p$ ,  $p_0$  – тиск газу відповідно при температурі  $t$  та  $0^\circ\text{C}$ .

Як показали досліди,  $\beta_V = \beta_p$ . Використовуючи поняття абсолютної температури, рівняння (1.12) і (1.13) можна переписати так:

$$V = V_0 \beta T \quad \text{або} \quad V_1/V_2 = T_1/T_2; \quad (1.14)$$

$$p = p_0 \beta T \quad \text{або} \quad p_1/p_2 = T_1/T_2. \quad (1.15)$$

Із законів Бойля–Маріотта і Гей-Люссака можна встановити зв'язок між трьома параметрами:

$$p_1 V_1 / T_1 = p_2 V_2 / T_2 = pV/T = B = \text{const.} \quad (1.16)$$

Постійна величина  $B$  у цьому рівнянні не залежить від стану газу, а залежить від його властивостей, тобто від природи газу, і для різних газів буде різною.

Рівняння (1.16) для одного кілограма речовини можна переписати так:

$$pv = RT, \quad (1.17)$$

де  $R$  – *питома (індивідуальна) газова стала* або просто *газова стала*. Це рівняння називається *рівнянням стану ідеального газу* або *рівнянням Клапейрона*. Для довільної маси  $m$  газу рівняння (1.17) має вигляд:

$$pV = mRT, \quad (1.18)$$

Д.І. Менделєєв (1874 р.) для одного моля газу рівняння стану записав таким чином:

$$pV_\mu = \mu RT, \quad (1.19)$$

де  $V_\mu$  – молярний об'єм газу. За законом Авогадро молярний об'єм газу за однакових умов займає один і той самий об'єм. За нормальних умов  $V_\mu = 22,4$  л/моль =  $22,4$  м<sup>3</sup>/кмоль.

Величина  $\mu R = R_\mu$  називається *універсальною газовою сталою*. Рівняння (1.19) має універсальний характер. За нормальних умов універсальна газова стала, розраховується так:

$$R_\mu = \frac{pV_\mu}{T} = \frac{101325 \cdot 22,414}{273,15} \approx 8314 \text{ Дж/кмоль}\cdot\text{град.}$$

Питома газова стала визначається за рівнянням:

$$R = R_\mu / \mu = 8314 / \mu \text{ Дж/кг}\cdot\text{град.}$$

Спочатку рівняння стану було отримано експериментально, а пізніше – аналітично на основі молекулярно-кінетичної теорії газів. При цьому треба було ввести деякі припущення. Так, молекули розглядаються як матеріальні точки, тобто тіла, що не мають розмірів. Молекули між собою не взаємодіють, вони взаємодіють лише під час їх зіткнення, яке відбувається за законом пружних куль. Така модель газу дістала назву *ідеального газу*. Використовуючи основні рівняння молекулярно-кінетичної теорії (1.3) та (1.6), можна вивести всі експериментальні газові закони. Дійсно,

$$p = \frac{n}{V} kT \Rightarrow pV = nkT,$$

де  $n$  – кількість молекул в об'ємі  $V$ ;  $k$  – стала Больцмана ( $k = R_\mu/N$ ).

Запишемо це рівняння для одного моля речовини:

$$pV_\mu = NkT = R_\mu T,$$

де  $N$  – число Авогадро.

Для одного кілограма речовини  $pV = RT$ .

У реальних газах необхідно враховувати сили взаємодії між молекулами та їх власний об'єм.

Реальні гази при невисоких тисках і невеликій густині з великою точністю підпадають під закони ідеального газу, тому для технічних розрахунків вони цілком придатні, однак для реальних газів існують інші рівняння стану (Ван-дер-Ваальса, Вукаловича–Новікова, Майєра–Боголюбова та ін.). Як приклад, наведемо рівняння Ван-дер-Ваальса (1873 р.):

$$\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT, \quad (1.20)$$

де  $a$  та  $b$  – коефіцієнти, що враховують поправку на сили взаємодії і об'єм молекул.

### Контрольні питання

1. Охарактеризуйте термодинамічний і молекулярно-статистичний методи вивчення явищ природи.
2. Що є предметом технічної термодинаміки?
3. Дайте означення термодинамічної системи. Які види термодинамічних систем ви знаєте?
4. Які існують термодинамічні системи залежно від умов взаємодії з навколишнім середовищем?
5. Що таке робоче тіло? Як поділяються робочі тіла за їх фізичними властивостями?
6. Дайте означення термодинамічних параметрів стану системи. Що таке питомий об'єм, абсолютний тиск і якими одиницями вони вимірюються?
7. Охарактеризуйте термодинамічний процес. Які процеси називають рівноважними і нерівноважними, оборотними і необоротними?
8. Дайте означення нульового закону термодинаміки. Що таке рівноважний і нерівноважний стани системи?
9. Що таке функція стану і функція процесу, чим вони відрізняються?
10. Наведіть основні рівняння стану ідеальних газів. Що таке газова і універсальна газова стала?

**Тестові завдання**

**1. Термодинамічна система – це:**

- а) взаємопов'язані між собою тіла, які виділяють у навколишнє середовище енергію;
- б) матеріальне тіло або сукупність тіл, які перебувають у тепловій чи механічній взаємодії між собою і навколишнім середовищем;
- в) матеріальні тіла, які знаходяться в рівновазі між собою і відділені від навколишнього середовища діатермічною перегородкою;
- г) складна система матеріальних і нематеріальних тіл, які виділяють енергію або виконують роботу не будучи зв'язаними між собою.

**2. Види термодинамічних систем:**

- а) однорідні, неоднорідні, складні;
- б) одно-, дво- та триступеневі;
- в) відкриті, закриті, ізольовані;
- г) однофазні, робочі, однокомпонентні.

**3. Основні одиниці виміру кількості субстанції у термодинамічних системах:**

- а) моль, кілограм, кубічний метр; в) Кулон, Паскаль, число Авагадро;
- б) тонна, Ньютон, літр; г) Кельвін, бар, Джоуль.

**4. Чи рівноцінні поняття “параметр стану” і “параметр процесу”?**

- а) вони описують одне і те саме явище, але з різних сторін;
- б) ці поняття рівноцінні;
- в) поняття описують різні особливості термодинамічних систем;
- г) поняття мають однаковий зміст, але тільки при певних обставинах.

**5. Питомий об'єм у системі СІ виміряється:**

- а)  $\text{м}^3/\text{кг}$ ; б)  $\text{м}^3/\text{К}$ ; в)  $\text{моль}/\text{кг}$ ; г)  $\text{Па}/\text{м}^3$ ; д)  $\text{Н}\cdot\text{м}/\text{кг}$ .

**6. Вкажіть правильне співвідношення між різними одиницями тиску:**

- а) 1 атм = 735,6 мм рт. ст.; в) 1 атм = 1 бар;
- б) 1 атм = 100 000 Па; г) 1 атм = 1,0332 кгс/см<sup>2</sup>.

**7. Для виміру розрідження використовують прилад:**

- а) вакуумметр; в) манометр; д) ротаметр.
- б) барометр; г) гігрометр;

**8. Якщо поміж контактуючими тілами не відбувається обміну тепловою енергією, то вони ...**

- а) знаходяться в динамічній рівновазі;
- б) знаходяться в термічній рівновазі;

- в) не взаємодіють між собою;
- г) розділені прозорим екраном;
- д) відносяться до різних термодинамічних систем.

**9. Чи застосовується поняття “температура” до однієї або кількох молекул?**

- а) зазвичай застосовується;
- б) застосовується, але з певними обмеженнями;
- в) не застосовується;
- г) застосовується до ідеального газу;
- д) застосовується, але залежно від прийнятої шкали.

**10. Виберіть правильний варіант запису закону Шарля для ідеального газу:**

- а)  $p = p(1 - \alpha_v t)$ ;
- б)  $p = p_0(1 - \alpha_v t)$ ;
- в)  $p = p_0(1 + \alpha_v t)$ ;
- г)  $p = 1/p_0(1 - \alpha_v v)$ .

**11. Визначте питомий об’єм і густину повітря, якщо його маса 77,58 кг займає об’єм 60 м<sup>3</sup>.**

- а)  $v = 1,293$ ,  $\rho = 0,773$ ;
- б)  $v = 0,773$ ,  $\rho = 1,293$ ;
- в)  $v = 1,000$ ,  $\rho = 1,300$ ;
- г)  $v = 0,600$ ,  $\rho = 1,410$ .

**12. Вкажіть правильне формулювання нульового закону термодинаміки:**

- а) два тіла, які не перебувають у термічній рівновазі з третім тілом, будуть у термічній рівновазі із собою;
- б) два тіла, які знаходяться у термічній рівновазі з третім тілом, будуть у термічній рівновазі із собою;
- в) два тіла, які знаходяться у термічній рівновазі з третім тілом, будуть також у динамічній рівновазі між собою;
- г) два тіла, які знаходяться у термічній рівновазі з третім тілом, будуть у термічній рівновазі із навколишнім середовищем.

**13. Вкажіть на правильний варіант запису співвідношень одиниць тиску:**

- а) 1 атм = 1,0332 ат. = 1,0132 бар = 760 мм рт. ст.;
- б) 1 атм = 1,0197 ат. = 1,0132 бар = 750,1 мм рт. ст.;
- в) 1 атм = 1,0132 ат. = 1,0332 бар = 735,5 мм рт. ст.;
- г) 1 атм = 1,3158 ат. = 1,000 бар = 750,1 мм рт. ст.

**14. Температура повітря дорівнює 51 °F. Вкажіть правильну температуру в градусах Цельсія:**

- а) 46,1 °C;
- б) 40,2 °C;
- в) 83 °C;
- г) 19 °C.

## ПЕРШИЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМІКИ

- Закони збереження матерії та енергії.  
Повна і внутрішня енергія системи, робота, теплота, ентальпія
- Перший закон термодинаміки, його суть, формулювання, аналітичні вирази
- Дві форми рівняння енергобалансу, диференціальні та інтегральні варіанти запису
- Перший закон термодинаміки у аналізі термодинамічних процесів
- Перший закон термодинаміки для необоротних процесів

### 2.1. Закони збереження матерії та енергії.

**Повна і внутрішня енергія системи,  
робота, теплота, ентальпія**

З точки зору філософії рух – це спосіб існування матерії чи субстанції. Матерія без руху не існує, як і не існує рух без матерії. Абсолютна природа руху реалізується в окремих, специфічних формах руху, як це ілюструє рис. 2.1.

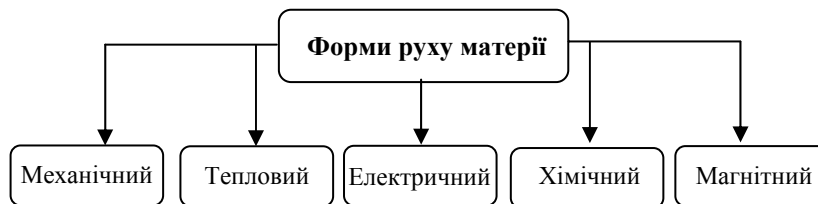


Рис. 2.1 – Види руху матерії

Мірою руху матерії є енергія. Енергія – це загальна кількісна міра для всіх форм руху матерії, що можуть перетворюватись одна в іншу. Відомо багато різновидностей енергії – кінетична

енергія руху тіл, потенціальна енергія сил земного тяжіння тощо. Передача енергії від одних тіл до інших відбувається в результаті взаємодії (рис. 2.2).

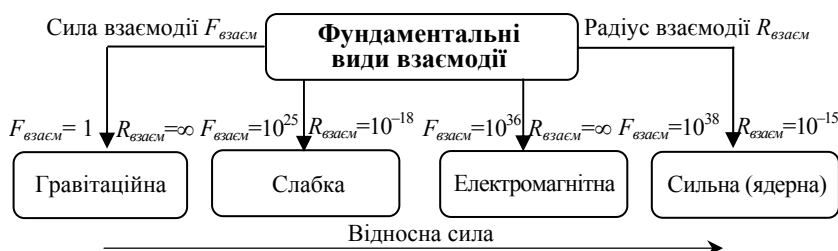


Рис. 2.2 – Види енергетичної взаємодії

Згідно із законом збереження енергії, вона не може бути ні створена, ні знищена, а може бути тільки перетворена з одного виду в інший при різних процесах.

Для формулювання цього закону досить велике значення відіграли роботи М.В. Ломоносова, Дж.П. Джоуля, Г. Гельмгольца, Ю.Р. Майєра, Г. Гесса, Е.Х. Ленца та інших вчених.

Так, у своїй роботі "Міркування про причини теплоти та холоду" (1745 р.) Ломоносов відкинув ідею про існування так званої теплотворної матерії – теплецію (рос. – *теплород*) і пояснив теплові явища обертальним рухом самих частинок тіла. У праці стверджується, що теплота є внутрішнім рухом молекул.

У 1748 році у листі до Л. Ейлера він писав: "Зміни, що відбуваються у природі, відбуваються так, що коли до чого-небудь дещо добавилось, то це віднімається від чогось іншого. Так, скільки матерії добавилось якому-небудь тілу, стільки ж відніметься від іншого...".

У формулюванні Ломоносова немає кількісної форми закону, він просто трактується як загальний закон природи. Кількісні форми закону одержано дещо пізніше. Так, у 1840 р. Г. Гесс сформулював закон збереження і перетворення матерії та енергії стосовно термохімічних процесів, який можна висловити наступним чином: "**Кількість підведеної до системи маси ( $m_n$ ) відповідає сумі кількості маси, яка залишилась у системі ( $m_c$ ) і кількості маси, що виведена із неї ( $m_e$ )**":

$$m_n = \Delta m_c + m_e.$$

У 1842 р. Роберт Майєр встановив закон еквівалентності теплоти та роботи і визначив числове значення механічного екві-

валента теплоти. У 1843 р. англієць Джоуль, а потім у 1844 р. – російський академік Е.Х. Ленц, незалежно один від одного, встановили цей закон для електричних і теплових явищ (закон Джоуля–Ленца). У 1847 р. Гельмгольц проаналізувавши велику кількість фізичних явищ, науково сформулював закон у загальному вигляді.

У 1850 р. Рудольф Клаузіус опублікував фундаментальну роботу “Про рушійну силу теплоти”, де дав математичний вивід закону збереження енергії, показав його фундаментальний і абсолютний характер. Закон у його формулюванні читається так: **“В ізольованій системі енергія не зникає безслідно і не виникає знову, вона лише переходить із одного виду в інший. Загальна сума всіх видів енергій залишається незмінною”**.

Таким чином, баланс енергії для системи, відокремленої контрольною оболонкою (рис. 2.3) запишеться так:

$$E_n = \Delta E_c + E_e, \quad (2.1)$$

де  $E_n$ ,  $E_e$  – відповідно, підведена та відведена від системи енергія;  $\Delta E_c$  – приріст енергії системи.

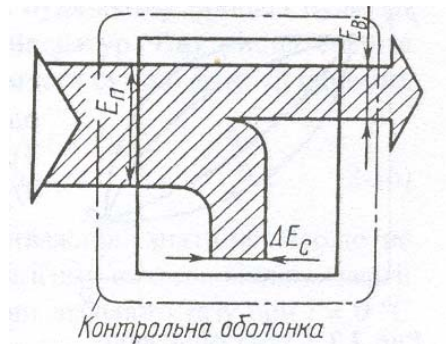


Рис. 2.3 – Схема енергобалансу системи

Для елементарного процесу, який відбувається з великою швидкістю, рівняння балансу запишеться так:

$$dE_n = dE_c + dE_e.$$

У цьому рівнянні тільки  $dE_c$  є повним диференціалом.

Закон збереження і перетворення енергії, який був відкритий Ломоносовим, але за його життя так і не набув широкого використання, тільки у другій половині XIX ст. отримав повне визнання і на сьогодні

його формулювання звучить наступним чином: “*Енергія, що є фізичною мірою руху, не створюється і не руйнується, але має безмежну здатність перетворюватись з однієї форми на іншу*”.

Розглянемо ще деякі важливі для термодинаміки поняття: повну та внутрішню енергію термодинамічної системи.

Довільна термодинамічна система, яка знаходиться в будь-якому термодинамічному стані має повну енергію  $E$ , яка складається з окремих складових:

– кінетичної енергії механічного руху системи як цілого (або її макроскопічних частин)  $E_k^{mex}$ ;

– потенціальної енергії системи в зовнішніх силових полях (гравітаційних, електромагнітних)  $E_n^{зовн.}$ ;

– внутрішньої енергії.

Повна енергія може бути записана через вираз:

$$E = E_k^{mex} + E_n^{зовн.} + U. \quad (2.2)$$

Внутрішньою енергією тіла або термодинамічної системи називається енергія, яка залежить тільки від термодинамічного стану тіла системи. Для нерухомої системи, яка не знаходиться під дією зовнішніх силових полів, внутрішня енергія співпадає з повною. Внутрішня енергія співпадає також з енергією спокою тіла (системи) і включає в себе енергію взаємодії всіх частин (атомів, молекул, іонів), з яких складається тіло, та всіх видів внутрішніх рухів. Наприклад, для багатоатомних молекул внутрішня енергія складається з:

1) кінетичної енергії поступального і обертового руху молекул;

2) кінетичної і потенціальної енергій коливань атомів у молекулах;

3) потенціальної енергії, обумовленої міжмолекулярною взаємодією;

4) енергії електронних оболонок атомів і іонів;

5) кінетичної і потенціальної енергій взаємодії нуклонів в ядрах атомів (внутрішньоядерна).

Внутрішня енергія є однозначною функцією термодинамічного стану системи, причому її значення не залежить від того, яким чином система перейшла у цей стан. Зміна внутрішньої енергії при переході із стану 1 у стан 2 буде дорівнювати:

$$\Delta U = U_2 - U_1 \quad (2.3)$$

і не залежить від виду переходу. А якщо система здійснює круговий процес, то повна зміна внутрішньої енергії взагалі дорівнює нулю:

$$\Delta U = \oint dU = 0. \quad (2.4)$$

Математично це означає, що елементарна зміна внутрішньої енергії  $dU$  є повним точним диференціалом. Таку властивість має ентропія і деякі інші функції стану.

У системі, яка знаходиться в стані термодинамічної рівноваги, внутрішня енергія залежить тільки від температури і зовнішніх параметрів. Наприклад, для простої системи з постійною масою, внутрішня енергія є функцією температури  $T$  і об'єму  $V$  і калоричне рівняння буде мати вигляд:

$$U = f(V, T). \quad (2.5)$$

Не менш важливими поняттями технічної термодинаміки є робота і теплота, які нерозривно пов'язані із термодинамічним процесом. Усі види термодинамічних взаємодій зводяться до двох принципово різних способів передачі енергії: виконання роботи та теплообміну.

Перший спосіб добре відомий із механіки і представляє собою передачу енергії в результаті макроскопічного, упорядкованого руху, який супроводжується видимим переміщенням тіла або зміною об'єму тіла. При цьому одне тіло виконує над другим тілом механічну роботу, яка дорівнює добутку сили, що діє на нього, на шлях переміщення точки прикладення сили. Тут прийнято, що робота, яка виконується тілом, є позитивною, а робота, яка здійснюється над ним – від'ємною.

Другий спосіб передачі енергії пов'язаний із наявністю температур. Передача енергії при цьому здійснюється або шляхом безпосереднього контакту тіл, що мають різну температуру, або шляхом випромінювання. Передача енергії в результаті обміну хаотичного руху мікрочастинок називається теплообміном. Кількість переданої при цьому енергії називається теплотою. Прийнято кількість теплоти, отриманої тілом, вважати позитивною, а відданої – від'ємною.

Одиницею виміру як роботи, так і теплоти є джоуль або кілоджоуль (кДж), а також кілокалорія (1 ккал =  $4,187 \cdot 10^3$  Дж).

Робота і теплота є основними характеристиками термодинамічного процесу, а їх величини залежать від виду процесу. З математичної точки зору це означає, що величини  $dQ$  і  $dL$  не є повними диференціалами, а є нескінченно малі кількості роботи  $\delta L$  і теплоти

$\delta Q$ , що передаються в елементарному термодинамічному процесі.

Між роботою і теплотою існує якісна різниця. Енергія, що передається першим способом, може безпосередньо витрачатись на збільшення довільного виду енергії. Теплота ж, без попереднього перетворення в роботу, витрачається тільки на збільшення внутрішньої енергії.

Термодинамічний процес здійснюється за рахунок енергетичної взаємодії робочого тіла і навколишнього середовища. Для кількісної оцінки величини енергетичної взаємодії в механіці використовують вираз:

$$dE = ydx, \quad (2.6)$$

де  $E$  – кількісна міра різних форм взаємодії;

$y$  – потенціал взаємодії;

$x$  – координата стану (заряд даної взаємодії).

Цей вираз за формою і за фізичним змістом відображає залежність природи різних форм енергетичної взаємодії. Так, для кількісної оцінки механічної взаємодії тіла з навколишнім середовищем, тобто для механічної роботи в термодинамічному процесі, відомий вираз (для поршня, який переміщується циліндрі):

$$\delta L = p'dV, \quad (2.7)$$

або для роботи, що віднесена до 1 кг речовини (**питома робота**):

$$\delta l = p'dv, \quad (2.8)$$

де  $p'$  – абсолютний тиск зовнішнього середовища, при рівноважному процесі цей тиск в кожний момент часу повинен дорівнювати тиску газу  $p$ .

Тоді елементарна робота проти зовнішніх сил буде дорівнювати:

$$\delta l = pdv. \quad (2.9)$$

Для кінцевого процесу при зміні об'єму від  $v_1$  до  $v_2$  питома робота буде дорівнювати (Дж/кг):

$$l = \int_{v_1}^{v_2} pdv. \quad (2.10)$$

У загальному випадку повинна бути відома залежність  $p = f(v)$ . Графічно робота зображується у вигляді площі під лінією

термодинамічного процесу (рис. 2.4, а). Це зображення називається **робочою діаграмою**. На рис. 2.4, б ілюструється твердження, що

робота є функцією процесу, оскільки  $\int_{1b2} p dv \neq \int_{1c2} p dv$ .

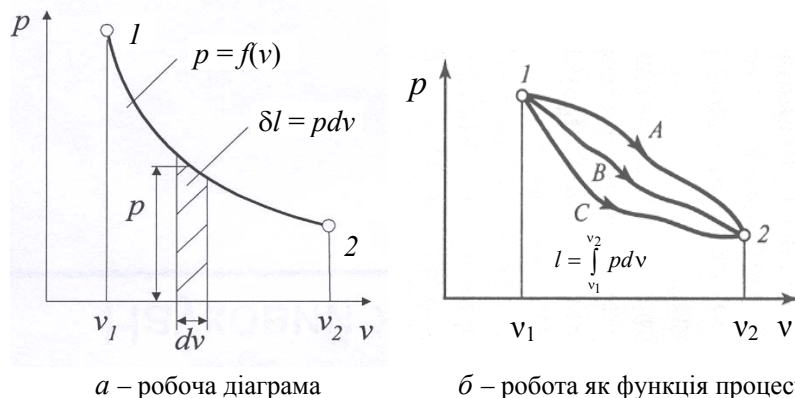
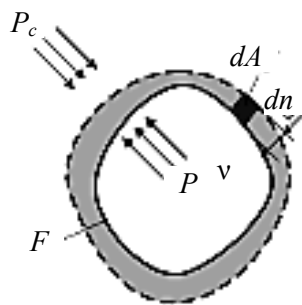


Рис. 2.4 – Графічне зображення роботи процесу:

Величина роботи залежить від характеру кривої  $p = f(v)$  і визначатиметься площею 1–2– $v_1$ – $v_2$ . Оскільки тиск завжди позитивний, і якщо  $dv > 0$ , то робота позитивна; якщо  $dv < 0$ , то робота – від’ємна.

Розглянемо ще один варіант механічної взаємодії закритої термодинамічної системи з навколишнім середовищем. Нехай система являє собою однорідне газоподібне тіло довільної форми, що оточене еластичною оболонкою, яка не має опору деформації. Оболонка розміщена в середовищі з тиском  $P_c$  (рис. 2.5).



$$dl = p \int_F dA \cdot dn \text{ – елементарна робота об'ємної деформації однорідної системи}$$

$$dl = p dv \text{ – елементарна питома робота}$$

$$l_{1-2} = \int_1^2 p dv \text{ – робота в процесі 1–2}$$

**Рис. 2.5 – Схема деформаційної взаємодії робочого тіла**

Під дією цього тиску всередині системи з часом створюється такий самий тиск, але направлений у протилежний бік. Система приходить у механічну рівновагу з навколишнім середовищем.

Якщо до системи підвести певну кількість теплоти  $\delta q$ , то температура її підвищиться і об'єм збільшиться на величину  $dv$ . Внаслідок збільшення об'єму система виконає роботу проти зовнішніх сил. Щоб її визначити, виділимо елементарну площадку  $dA$ , яка переміщується по нормалі на відстань  $dn$ . Тоді елементарна робота визначиться як добуток сили на її нарощення:

$$\delta l = p \cdot dA \cdot dn = p \cdot dv.$$

Для кінцевого процесу, коли об'єм системи зміниться від  $v_1$  до  $v_2$  робота визначається інтегруванням:

$$l_{1-2} = \int_{v_1}^{v_2} p dv.$$

Отже, деформаційна робота закритої системи у рівноважному процесі також дорівнює добутку тиску на приріст об'єму. Обмін енергією між системами, пов'язаний із зміною об'єму називають деформаційною роботою.

Кількість роботи залежить від характеру термодинамічного процесу і не може бути обчислена за початковим та кінцевим станами системи (див. рис. 2.4, б). Так із початкового стану 1 в кінцевий стан 2 можна перейти різними шляхами, і кожному шляху буде відповідати своя робота  $l_{1-e-2} > l_{1-c-2}$ . Із цього випливає, що робота, на відміну від внутрішньої енергії не є функцією стану, а є характеристикою процесу, тобто взаємодії системи з навколишнім середовищем.

Як уже зазначалося, другим принциповим способом передачі енергії є теплообмін.

Теплообмін – це передача енергії на молекулярному рівні або шляхом випромінювання. У результаті хаотичного руху молекули обмінюються енергією, але із-за хаотичності теплового руху молекул неможливо знайти параметр, зміна якого характеризувала б зміну стану системи внаслідок передачі енергії у вигляді теплоти. Теоретичний аналіз теплових явищ, проведений Р. Клаузіусом у 1852–1864 рр. дав можливість йому зробити висновок, що елементарну кількість теплоти в рівноважному процесі можна розрахувати

за загальним виразом енергетичної взаємодії (2.6), але інтенсивним параметром є термодинамічна температура  $T_1$ , а екстенсивним або координатою стану, – *ентропія*, яка позначається через  $s$ .

Елементарна кількість теплоти  $\delta Q$  в рівноважному процесі може бути знайдена у вигляді добутку (кДж):

$$\delta Q = TdS, \quad (2.11)$$

або для 1 кг (кДж/кг):

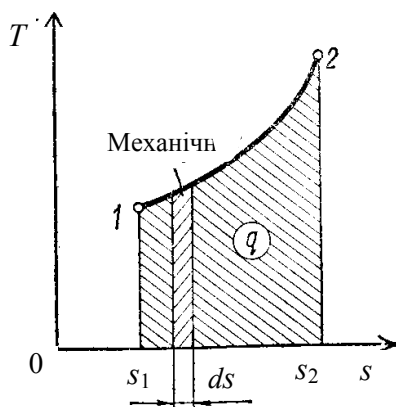
$$\delta q = Tds, \quad (2.12)$$

де  $T$  – абсолютна температура (потенціал термічної взаємодії);  $s$  – питома ентропія (термічна координата стану).

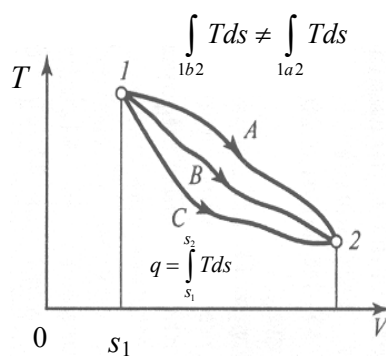
Таким чином, зміна об'єму зовнішнього середовища є ознакою механічної взаємодії, а зміна ентропії – ознакою теплової взаємодії робочого тіла з навколишнім середовищем. Оскільки абсолютна температура завжди позитивна, то знак теплоти буде визначатись знаком зміни ентропії. Якщо  $ds > 0$ , то теплота підводиться до тіла:  $\delta q > 0$  і  $q > 0$ . Якщо  $ds < 0$ , то теплота відводиться від тіла:  $\delta q < 0$  та  $q < 0$ .

Для процесу, в якому ентропія  $s$  змінюється від  $s_1$  до  $s_2$  загальний вираз для  $q$  набуває вигляду (кДж/кг):

$$q = \int_1^2 Tds. \quad (2.13)$$



а – теплова діаграма



б – теплота як функція процесу

$s_2$   $s$

**Рис. 2.6 – Графічне зображення теплоти процесу**

Для обчислення інтеграла в загальному випадку необхідно знати залежність  $T = f(s)$ . У загальному випадку в графічному вигляді ця залежність прийме вид як показано на рис. 2.6, а.

Величина теплоти процесу також залежить від характеру кривої  $T = f(s)$  і визначатиметься площею під нею. Таким чином, оскільки теплота і робота залежать від характеру перебігу термодинамічного процесу, то математично вони не є повними диференціалами. Тому елементарну теплоту позначають  $\delta Q$ , а елементарну роботу –  $\delta L$ .

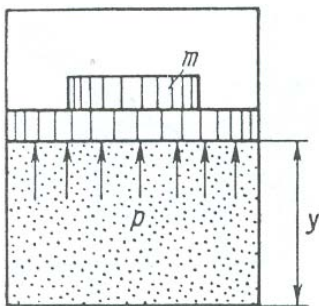
Ще одним важливим терміном є поняття **ентальпія**. Якщо розглянути термодинамічну систему, яка складається із циліндра, в якому знаходиться певна кількість газу і поршень з вантажем (рис. 2.7), то потенціальна енергія поршня дорівнює потенціальній енергії тиску газу:

$$m \cdot g \cdot y = p \cdot A \cdot y = p \cdot V,$$

де  $m$  – маса вантажу,  $g$  – прискорення земного тяжіння,  $y$  – висота, на яку піднятий вантаж,  $A$  – площа поршня.

Повна енергія такої системи, яка дорівнює сумі внутрішньої енергії газу і потенціальної енергії тиску та позначається через  $H$ , дістала назву ентальпії:

$$E = H = U + pV. \quad (2.14)$$



**Рис. 2.7 – До визначення поняття “ентальпія”**

Цей термін походить від грецького слова “нагріваю” і був введений у 1909 р. Х. Камерлінг-Оннесом. Величина  $pV$  характеризує потенціальну енергію газу, стисненого зовнішнім тиском. Отже,

ентальпія розширеної системи – це сума внутрішньої і потенціальної енергії, що зумовлена зовнішнім тиском. Оскільки всі величини, що входять у цей вираз є функціями стану, то й ентальпія також є функцією стану.

Ентальпія є екстенсивним параметром, тому вводять поняття “питомої ентальпії”  $h$ , одиниця виміру якої є Дж/кг:

$$h = \frac{H}{m} = u + pv = u(T) + RT. \quad (2.15)$$

Як бачимо, ентальпія є однозначною функцією температури (для ідеальних газів).

Для практичних розрахунків важливо знати не абсолютне значення ентальпії, а її зміну. Оскільки ентальпія є повним диференціалом, то її зміна визначається початком і кінцем процесу і не залежить від характеру процесу.

$$\Delta h_{1-2} = \int_1^2 dh = h_2 - h_1 = (u_2 + p_2 v_2) - (u_1 + p_1 v_1). \quad (2.16)$$

Оскільки, між ентальпією і внутрішньою енергією існує зв’язок, то вибір початку відліку не довільний: у точці, яка взята за початок відліку внутрішньої енергії  $h = pv$ . Наприклад, для води при  $t = 0,01 \text{ }^\circ\text{C}$  і тиску  $p = 610,8 \text{ Па}$ ,  $U = 0$ , а ентальпія

$$h = pv = 610,8 \cdot 0,001 = 0,611 \text{ Дж/кг}.$$

## **2.2. Перший закон термодинаміки, його суть, формулювання, аналітичні вирази**

Один з перших відкрив перший закон термодинаміки німецький лікар Юліус Роберт Майєр (1814–1878). Майєр закінчив Тюбінгенський університет. У 1840–1841 рр. як корабельний лікар він брав участь у плаванні на о. Яву. Під час плавання він помітив, що колір венозної крові моряків у тропіках значно світліший, ніж в північних широтах. Ця зміна кольору крові наштовхнула його на думку, що існує зв’язок між споживанням речовини і утворенням тепла. Він також встановив, що кількість процесів окислення в організмі людини збільшується із збільшенням виконаної роботи. Все це дало Майєру підставу в 1840 р. припустити, що теплота і механічна робота здатні взаємоперетворюватись. У своїх роботах Майєр вперше сформулював закон збереження енергії і детально

виклав його в роботі “Органічний рух в його зв’язку з обміном речовин”, опублікованій у 1845 р. Однак видатне відкриття Майєра не було визнано. Першовідкривачем закону почали називати англійця Джоуля, а потім Г. Гельмгольца.

Спроби Майєра захистити свій пріоритет у відкритті закону збереження і перетворення енергії викликали напади з боку місцевих вчених. Це негативно вплинуло на стан Майєра і привело до тяжкого психічного розладу. Лише у 50–60-х роках XVIII ст. пріоритет Майєра у відкритті першого закону термодинаміки був визнаний.

Перший закон термодинаміки є окремим випадком закону збереження і перетворення енергії стосовно процесів, що відбуваються в термодинамічних системах.

Перший закон термодинаміки встановлює еквівалентність механічної та теплової енергії в процесах їх взаємного перетворення.

У основу першого закону термодинаміки покладені численні експериментальні дані, проведені різними вченими, які спричинили різноманітні, але тотожні його висловлювання, зокрема:

- вічний двигун першого роду не можливий;
- неможливе виникнення енергії з нічого або висловлювання “енергія не знищується”;
- внутрішня енергія замкнутої ізольованої системи є сталою величиною;
- внутрішня енергія тіла є однозначною функцією його стану;
- будь-яка форма руху здатна й повинна перетворюватись в інші форми;
- теплота і робота є єдино можливими формами переходу енергії від одного тіла до іншого.

У загальному випадку перший закон термодинаміки для ізольованої системи можна сформулювати так:

***Повна енергія ізольованої термодинамічної системи при довільних процесах, що в ній відбуваються, залишається незмінною:***

$$E = \text{const.} \quad (2.17)$$

Якщо ж система знаходиться в енергетичній взаємодії з навколишнім середовищем, то повна енергія системи або тіла в кінцевому стані  $E_2$  буде дорівнювати повній енергії початкового стану  $E_1$  плюс алгебраїчна сума всіх кількостей енергії  $\Sigma E$ , отриманих або відданих тілом в процесі енергообміну:

$$E_2 = E_1 + \Sigma E. \quad (2.18)$$

Для термодинамічних процесів, в яких енергія підводиться або відводиться тільки в формі роботи і теплоти, та враховуючи, що при підведенні теплоти і виконанні роботи над тілом теплота позитивна, а робота негативна, можна записати:

$$E_2 = E_1 + Q - L, \text{ звідки } Q = E_2 - E_1 + L = \Delta E + L.$$

Це є аналітичним виразом першого закону термодинаміки.

Якщо тіло не переміщується і зовнішнє поле сил відсутнє, то повна енергія буде складатись тільки з внутрішньої енергії. Тоді отримаємо (Дж):

$$Q = \Delta U + L. \quad (2.19)$$

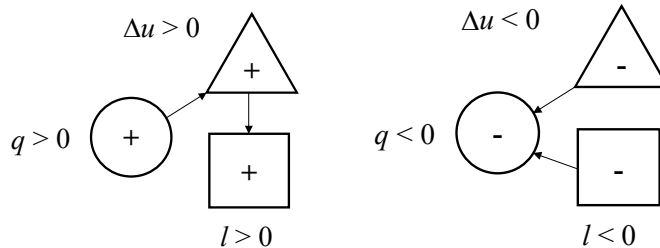
Перший закон термодинаміки для неізолюваних систем можна сформулювати таким чином: **у термодинамічному процесі теплота витрачається на зміну внутрішньої енергії тіла і на роботу проти зовнішніх сил.**

Для 1 кг робочого тіла закон має вигляд:

$$q = \Delta u + l. \quad (2.20)$$

Рівняння (2.19) і (2.20) є виразом енергетичного балансу термодинамічних процесів, що наочно ілюструється простою схемою енергобалансу. Напрямок стрілок стосується додатних (рис. 2.8, а) або від'ємних (рис. 2.8, б) числових значень усіх величин рівняння (2.20):

- $q > 0$  – підведення теплоти до робочого тіла;
- $q < 0$  – відведення теплоти від робочого тіла;
- $\Delta u > 0$  – зростання внутрішньої енергії;
- $\Delta u < 0$  – зменшення внутрішньої енергії;
- $l > 0$  – виконання роботи робочим тілом;
- $l < 0$  – затрата роботи.



$a$  – підведення теплоти $b$  – відведення теплоти**Рис. 2.8 – Схема енергобалансу термодинамічного процесу**

Для кругового процесу, в якому початковий і кінцевий стани співпадають, запишемо:

$$\oint \delta q = \oint du + \oint \delta l.$$

Оскільки  $\oint \delta q = q_0$ ,  $\oint du = 0$ ,  $\oint \delta l = l_0$ , то:

$$q_0 = l_0. \quad (2.21)$$

Тобто робота в круговому процесі може здійснюватись тільки за рахунок затраченої зовні теплоти. Якщо б виявилось, що  $q_0 < l_0$ , то можна було б реалізувати вічний двигун першого роду, тобто виконувати роботу без затрати енергії ззовні.

У наш час прабатьківщиною перших вічних двигунів по праву вважають Індію. Так, Бхаскара в своєму вірші, датованому 1150 р., описує деяке колесо з прикріпленими по ободу довгими вузькими ємностями, наполовину заповненими ртуттю. В основі принципу дії такого першого “перпетум мобіле” була різниця моментів сил тяжіння, що утворюються рідиною, яка переміщується в ємностях, розташованих по колу колеса. Бхаскара обґрунтовує обертання колеса дуже просто: наповнене таким чином рідиною колесо при насадженні його на вісь, що лежить на двох нерухомих опорах, безперервно обертається само по собі.

### 2.3. Дві форми рівняння енергобалансу, диференціальні та інтегральні варіанти запису

Розрізняють дві форми рівняння енергобалансу. Розглянемо ці варіанти для рівноважних термодинамічних процесів.

**1. Перша форма рівняння енергобалансу.** За вихідне співвідношення можна прийняти рівняння (2.20) у диференціальній формі:

$$\delta q = du + \delta l.$$

Враховуючи, що  $\delta l = p dv$ , запишемо диференціальний варіант рівняння енергобалансу:

$$\delta q = du + p dv. \quad (2.22)$$

Інтегральний варіант рівняння (2.22) для кінцевого процесу має вигляд:

$$\int_1^2 \delta q = \int_1^2 du + \int_1^2 p dv,$$

або

$$\int_1^2 \delta q = (u_2 - u_1) + \int_1^2 p dv. \quad (2.23)$$

**2. Другий варіант рівняння енергобалансу.** Враховуючи існуюче визначення поняття ентальпії як термодинамічної функції у вигляді  $h = u + pv$ , запишемо  $dh = d(u + pv) = du + p dv + v dp$  або з урахуванням рівняння (2.22):

$$dh = \delta q + v dp.$$

Звідси одержимо диференціальний варіант рівняння енергобалансу:

$$\delta q = dh - v dp. \quad (2.24)$$

Інтегральний варіант рівняння (2.24) для кінцевого процесу має вигляд:

$$\int_1^2 \delta q = \int_1^2 dh - \int_1^2 v dp$$

або

$$\int_1^2 \delta q = (h_2 - h_1) - \int_1^2 v dp. \quad (2.25)$$

Якщо врахувати співвідношення, що  $\delta q = T ds$ , рівняння (2.22) та (2.24), то можна записати наступну термодинамічну тотожність:

$$du + p dv \equiv dh - v dp \equiv T ds. \quad (2.26)$$

#### **2.4. Перший закон термодинаміки у аналізі термодинамічних процесів**

**1. Процес при сталому тиску (ізобарний).** Для цього процесу справедливі наступні залежності:

$$p = \text{const}; \quad dp = 0; \quad \delta q_p = dh - v dp;$$

$$\delta q_p = dh; \int_1^2 \delta q_p = \int_1^2 dh; \quad q_{p(1 \rightarrow 2)} = h_2 - h_1. \quad (2.27)$$

В ізобарному процесі кількість теплоти чисельно дорівнює зміні ентальпії робочого тіла. У цьому процесі теплота, що підводиться, частково витрачається на зміну внутрішньої енергії тіла і частково на виконання роботи:

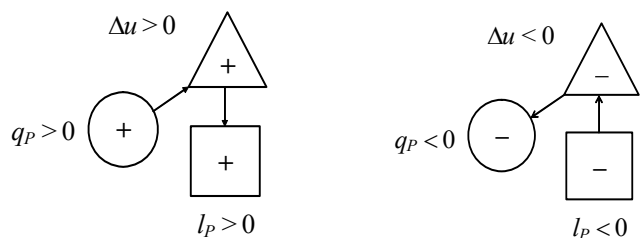
$$\delta q = du + p dv; \int_1^2 \delta q_p = \int_1^2 du + \int_1^2 p dv; \quad q_{p(1 \rightarrow 2)} = u_2 - u_1 + p(v_2 - v_1);$$

$$q_{p(1 \rightarrow 2)} = u_2 - u_1 + l_{p(1 \rightarrow 2)}. \quad (2.28)$$

Тому величина роботи ізобарного процесу є мірою різниці між змінами ентальпії і внутрішньої енергії робочого тіла:

$$l_{p(1 \rightarrow 2)} = (h_2 - h_1) - (u_2 - u_1). \quad (2.29)$$

Схема енергобалансу для ізобарного процесу, враховуючи рівняння (2.28), має вигляд, зображений на рис. 2.9.



а – виконання роботи

б – затрата роботи

Рис. 2.9 – Схема енергобалансу ізобарного процесу

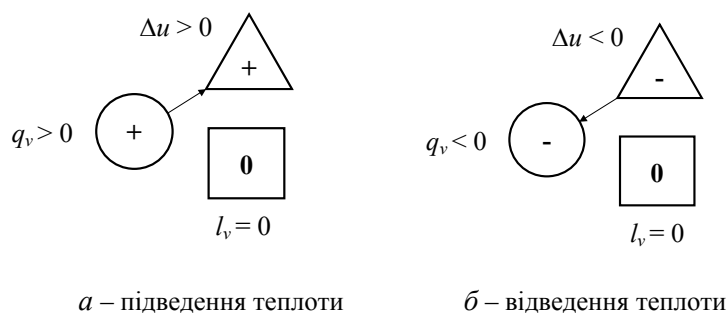
**2. Процес при сталому об'ємі (ізохорний).** Для цього процесу справедливі наступні залежності:

$$v = \text{const}; \quad dv = 0; \quad \delta q_v = du + p dv;$$

$$\delta q_v = du; \quad \int_1^2 \delta q_v = \int_1^2 du; \quad q_{v(1 \rightarrow 2)} = u_2 - u_1. \quad (2.30)$$

В ізохорному процесі кількість теплоти чисельно дорівнює

зміні внутрішньої енергії робочого тіла. У цьому процесі вся підведена теплота витрачається на зміну внутрішньої енергії тіла, бо термодинамічна робота дорівнює нулю.



**Рис. 2.10** – Схема енергобалансу ізохорного процесу

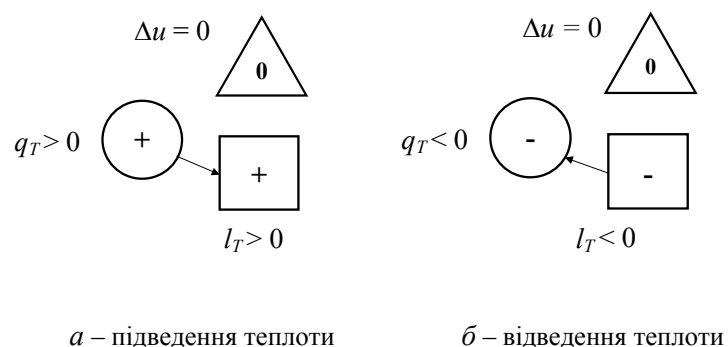
Схема енергобалансу для ізохорного процесу, враховуючи рівняння (2.26), має вигляд, зображений на рис. 2.10.

**3. Процес при сталій температурі (ізотермічний).** При  $u = \text{const}$ ,  $du = 0$ , тобто процес ізодинамічний. Для ідеального газу  $u = f(T)$ , то при  $T = \text{const}$ , відповідно  $dT = 0$ .

На підставі рівняння (2.22) отримуємо наступні залежності

$$\delta q_T = du + p dv; \int_1^2 \delta q_T = \int_1^2 p dv; \delta q_{T(1 \rightarrow 2)} = \int_1^2 p dv, \text{ тобто:}$$

$$q_{T(1 \rightarrow 2)} = l_{T(1 \rightarrow 2)}. \quad (2.31)$$



**Рис. 2.11 – Схема енергобалансу ізодинамічного (ізотермічного) процесу**

В ізодинамічному процесі (ізотермічний процес – це його окремий випадок) кількість теплоти еквівалентна термодинамічній роботі процесу. У ньому вся підведена теплота витрачається на виконання роботи.

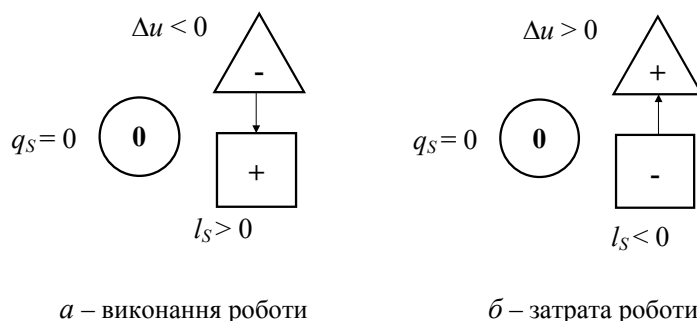
Схема енергобалансу для ізодинамічного процесу, враховуючи рівняння (2.31), має вигляд, зображений на рис. 2.11.

**4. Процес без підведення і відведення теплоти (адіабатний).**

Для ізоентропійного процесу маємо:  $S = \text{const}$ ;  $dS = 0$ ;  $q_s = 0$ ;  $\delta q_s = 0$ ;  $\delta q_s = du + pdv$ .

На підставі рівняння (2.22) можемо записати:

$$-du = pdv; \quad -\int_1^2 du = \int_1^2 pdv; \quad u_1 - u_2 = \int_{v_1}^{v_2} pdv. \quad (2.32)$$



**Рис. 2.12 – Схема енергобалансу адіабатного процесу**

В адіабатному процесі термодинамічна робота розширення (або стиснення) еквівалентна протилежній за знаком зміні внутрішньої енергії робочого тіла. Схема енергобалансу для адіабатного процесу, враховуючи рівняння (2.32), має вигляд, зображений на рис. 2.12.

**2.5. Перший закон термодинаміки для необоротних процесів**

Раніше були розглянуті варіанти першого закону термодинаміки для ізольованої – (2.17) та закритої системи – (2.19), за умови проходження рівноважних оборотних процесів. Вони передбачають, що три основні параметри: об'єм  $v$ , тиск  $p$  і температура  $T$ , характерні для стану газу, будучи у загальному випадку змінними протягом певного часу, в кожний заданий момент по всьому об'єму є однакові (цей стан називається **рівноважним**). Оборотні процеси – це процеси, які можуть проходити як у прямому, так і в зворотному напрямках, проходячи через однакові проміжні стани, причому система повертається у вихідне становище без додаткових затрат енергії. Оборотні процеси у будь-який момент можуть почати виконуватись у зворотному напрямі, змінивши яку-небудь незалежну змінну. При цьому по їх закінченні ні в самій системі, ні в навколишньому середовищі не залишається ніяких змін.

Умовами оборотності процесів є те, що вони мають протікати безмежно повільно (квазістатично) та виконання вимог зовнішньої та внутрішньої оборотності, до яких належать:

а) **зовнішня оборотність**, характеризується рівновагою:

- механічною (однаковість тиску для всього об'єму);
- термічною (однаковість температури у всій системі);

б) **внутрішня оборотність**, характеризується відсутністю:

- тертя;
- дифузії;
- інших односторонньо спрямованих процесів (нульові градієнти параметрів).

Таким чином, відсутність будь-яких залишкових змін у термодинамічній системі та навколишньому середовищі при поверненні системи у вихідне становище і є вирізняючою особливістю оборотного процесу. Оскільки в реальних умовах все це не спостерігається, підведення та відведення теплоти завжди здійснюється при наявній кінцевій різниці температур (**теплообмін**), механічна рівновага майже ніколи не забезпечується (із-за наявності періоду релаксації), існують, так звані вихори в робочому тілі і крім цього будь-яка зміна об'єму пов'язана з виникненням **тертя** між окремими частинками тіла. Тому всі реальні процеси в земних умовах є **необоротними**.

Ефективна робота виконана системою у необоротному процесі буде недостатня для повернення її у початковий стан. Як стверджував Макс Планк (1858–1947): "... з кожним необоротним

процесом система робить деякий такий крок вперед, сліди якого при жодних обставинах не можуть бути знищені”. Якщо система здійснює такий процес, то її повернення у вихідне становище завжди вимагає додаткових енергозатрат зі сторони навколишнього середовища.

Підсумовуючи, можна зробити висновок, що поняття оборотних процесів, які вивчає класична термодинаміка, існує як результат ідеалізації реальних незворотних процесів, і, наведені раніше вирази першого закону термодинаміки, при застосуванні їх до необоротних процесів, повинні мати відмінності.

Розглянемо необоротний процес, необоротність якого викликана вихровими рухами та внутрішнім тертям у робочому тілі. Класичним прикладом такого процесу може бути розширення газу у вакуум (змішування потоків газу, течія газу з тертям, дроселювання газу тощо). У такому процесі зовнішній механічний ефект неминуче знижується, причому робота, яка витрачається на подолання опорів  $\delta l_{\text{тер}}$ , згідно принципу еквівалентності повністю перетворюється на теплоту:  $\delta l_{\text{тер}} = \delta q_{\text{тер}}$ .

У такому випадку рівняння для ефективної роботи прийме вигляд:

$$\delta l_{\text{еф.}} = \delta l_{\text{теор.}} - \delta l_{\text{тер}} = pdv - \delta l_{\text{тер.}}$$

За таких умов математичний вираз першого закону термодинаміки для нерівноважного процесу набуде вигляду:

$$\delta q = du + \delta l_{\text{еф.}} = du + pdv - \delta l_{\text{тер.}}$$

або з урахуванням прийнятих припущень:

$$\delta q + \delta q_{\text{тер.}} = du + pdv. \quad (2.33)$$

Якщо ми позначимо  $\delta q + \delta q_{\text{тер.}} = \delta q_0$ , то одержимо загальний вираз рівняння першого закону термодинаміки (2.20).

Вираз (2.33) є першою формою рівняння енергобалансу для нерівноважних процесів.

Другу форму рівняння енергобалансу для нерівноважних процесів можна скласти з рівняння (2.24):

$$\delta q + \delta q_{\text{тер.}} = dh - vdp. \quad (2.34)$$

У випадку розгляду рухомої термодинамічної системи, рівняння енергобалансу для нерівноважних процесів буде відповідати виразу, знайденому раніше для рівноважних процесів:

$$-vdp = d\left(\frac{W^2}{2}\right) + \delta l_{\text{техн.}} + \delta l_{\text{тер.}} \quad (2.35)$$

де  $W$  – кінетична енергія;  $l_{\text{техн.}}$  – технічна робота рухомої термодинамічної системи.

Підставляючи це співвідношення у рівняння (2.34), якщо  $\delta l_{\text{тер.}} = \delta q_{\text{тер.}}$ , одержуємо:

$$\delta q = dh + d\left(\frac{W^2}{2}\right) + \delta l_{\text{техн.}} \quad (2.36)$$

Рівняння (2.36) не містить у явній формі величини кількості теплоти, що еквівалентна роботі подолання опорів.

### Контрольні питання

1. Що розуміють під повною енергією термодинамічної системи?
2. Що таке внутрішня енергія термодинамічної системи? Чи можна її визначити? Чому?
3. Чи може бути елементарна зміна внутрішньої енергії повним диференціалом? Чому?
4. Перерахуйте основні шляхи теплообміну термодинамічної системи із навколишнім середовищем.
5. Як визначити елементарну роботу термодинамічної системи проти зовнішнього тиску?
6. Що таке закрыта термодинамічна система? Чи справедливий закон збереження енергії для таких систем?
7. Сформулюйте перший закон термодинаміки. Запишіть його математичний вираз.
8. Доведіть, що створити вічний двигун першого роду неможливо.
9. У чому полягає відмінність внутрішньої енергії ідеального та реального газів?

10. Доведіть, що внутрішня енергія – параметр стану, а робота – параметр процесу термодинамічної системи. Наведіть ще приклади параметрів процесу.

11. Що мають спільного і чим відрізняються теплота та робота?

12. Наведіть схеми енергобалансів для основних ізопроесів.

13. Чим відрізняються форми запису енергобалансу?

14. Що таке робота проштовхування? Чи має вона місце в системі, у якій швидкість переміщення робочого тіла рівна нулю?

15. Чим відрізняється робота проштовхування від роботи розширення?

16. У якому випадку ентальпія може бути рівна нулю?

17. Як довести, що ентальпія є функцією стану?

### Тестові завдання

**1. Вкажіть найбільш повний варіант запису форм руху матерії:**

- а) електрична, теплова, механічна, хімічна, магнітна;
- б) гравітаційна, механічна, потенціальна, кінетична, обертова;
- в) теплова, ядерна, слабка, космічна, магнітна;
- г) хімічна, ядерна, хаотична, космічна, упорядкована.

**2. Вкажіть правильний варіант запису рівняння балансу енергії:**

- а)  $dE_n = dE_c + dE_\theta$ ;                      в)  $dE_n = dE_c + dE_\theta + dE_{mp}$ ;
- б)  $dE_n = -dE_c + dE_\theta$ ;                      г)  $dE_n = dE_c - dE_\kappa^{max} - dE_n^{зобн}$ .

**3. Внутрішня енергія робочого тіла включає:**

- а) кінетичну енергію поступального і обертового руху молекул;
- б) потенціальну енергію взаємодії молекул;
- в) енергію коливного руху атомів у молекулах;
- г) енергію електронних оболонок атомів і іонів;
- д) енергію взаємодії нуклонів в ядрах атомів;
- е) теплову енергію руху молекул, іонів, атомів і ядер.

**4. Одиницею виміру роботи в системі СІ є:**

- а) кілоджоуль;    б) кіловат;    в) кінська сила;    г) кілокалорія.

5. Робочою діаграмою називається зображення роботи процесу в координатах:

- а)  $p-v$ ; б)  $T-S$ ; в)  $H-S$ ; г)  $T-v$ ; д)  $H-p$ .

6. Вкажіть диференціальний варіант першої форми запису першого закону термодинаміки для ізобарного процесу ідеального газу:

- а)  $\delta q = pdv$ ; б)  $\delta q = dh$ ; в)  $\delta q = -vdp$ ; г)  $\delta q = du + pdv$ .

7. Вкажіть диференціальний варіант першої форми запису першого закону термодинаміки для ізотермічного процесу ідеального газу:

- а)  $\delta q = pdv$ ; б)  $\delta q = dh$ ; в)  $\delta q = -vdp$ ; г)  $\delta q = du + pdv$ .

8. Вкажіть диференціальний варіант першої форми запису першого закону термодинаміки для ізохорного процесу ідеального газу:

- а)  $\delta q = du + pdv$ ; б)  $\delta q = dh$ ; в)  $\delta q = -vdp$ ; г)  $\delta q = du$ .

9. Вкажіть інтегральний варіант першої форми запису першого закону термодинаміки для адіабатного процесу ідеального газу:

- а)  $\int \delta q = \int du + \int pdv$ ; б)  $\int \delta q = \int dh$ ; в)  $\int \delta q = \int dh$ ; г)  $\int du = \int pdv$ .

- б)  $\int du = -\int pdv$ ; г)  $\int \delta q = -\int vdp$ ;

10. Вкажіть інтегральний варіант першої форми запису першого закону термодинаміки для кругового ізобарного процесу ідеального газу:

- а)  $\int \delta q = \int dl$ ; б)  $\int \delta q = \int du$ ;

- б)  $\int \delta q = \int du + \int pdv$ ; г)  $\int \delta q > \int dl$ .

11. Вкажіть правильний варіант запису рівняння енергобалансу для ізотермічного процесу при виконанні роботи над тілом:

- а)  $l_s > 0$ ,  $\Delta u_s < 0$ ,  $q_s = 0$ ; б)  $l_s < 0$ ,  $\Delta u_s = 0$ ,  $q_s < 0$ ;

- б)  $l_s = 0$ ,  $\Delta u_s > 0$ ,  $q_s < 0$ ; г)  $l_s = 0$ ,  $\Delta u_s = 0$ ,  $q_s = 0$ .

12. Вкажіть правильний варіант запису рівняння енергобалансу для ізотермічного процесу при підведенні теплоти:

- а)  $l_m > 0$ ,  $\Delta u_T = 0$ ,  $q_m > 0$ ; б)  $l_m = 0$ ,  $\Delta u_T > 0$ ,  $q_m < 0$ ;

- б)  $l_m > 0$ ,  $\Delta u_T < 0$ ,  $q_m = 0$ ; г)  $l_m < 0$ ,  $\Delta u_T = 0$ ,  $q_m = 0$ ;

13. Вкажіть правильний варіант запису залежностей для ізохорного процесу:

- а)  $dv = 0$ ,  $\delta q = du$ ,  $\delta q = du + pdv$ ;

- б)  $dv = 0$ ,  $\delta q = dh$ ,  $\delta q = du - vdp$ ;  
 в)  $dv = 0$ ,  $\delta q = pdv$ ,  $\delta q = du - pdv$ ;  
 г)  $dv \neq 0$ ,  $\delta q = 0$ ,  $\delta q = du + pdv$ .

**14. Вкажіть одиницю виміру питомої ентальпії в системі СІ:**

- а) кДж/м<sup>3</sup>; б) кДж/кг; в) кВт/°С; г) кДж/кмоль.

**15. Яка частина теплоти, підведеної до 1 кг кисню в ізобарному процесі витрачається на зміну внутрішньої енергії** (прийняти показник адіабати  $k = 1,43$ )?

- а) 0,3; б) 0,45; в) 0,70; г) 0,67.

**16. Маємо наступний вираз:  $c_p T = c_v \Delta T + l$  – це запис першого закону термодинаміки для ...**

- а) нерівноважного ізобарного процесу;  
 б) рівноважного ізобарного процесу;  
 в) рівноважного ізобарного процесу для 1 кг робочого тіла;  
 г) рівноважного ізохорного процесу;  
 д) рівноважного адіабатного процесу для 1 кг ідеального газу.

**17. При підведенні до ідеального одноатомного газу 10 кДж теплоти, ним виконана робота, величина якої становить 4 кДж. Визначити початкове значення внутрішньої енергії цієї маси газу, якщо температура газу при цьому зросла в 5 раз:**

- а) 2,4 кДж; б) 1,5 кДж; в) 3,5 кДж; г) 14 Дж;  
 д) визначити неможливо, оскільки не визначена кількість газу.

**18. Куля, масою 20 г і швидкістю 350 м/с попадає в шерстяний кулевловлювач. Скільки джоулів теплоти при цьому виділиться?**

- а) 1225 кДж; б) 225 кДж; в) 2225 кДж; г) 25 кДж.

**19. Умовою оборотності термодинамічного процесу є:**

- а) наявність однаковості тиску в кожний момент часу для всього об'єму газу;  
 б) наявність однаковості температури в кожний момент часу для всього об'єму газу;  
 в) відсутність внутрішнього тертя між молекулами газу;  
 г) наявність одночасно всіх умов, перерахованих у варіантах а), б) та в);  
 д) правильної відповіді немає.

**20. Ентальпія реального газу залежить:**

- а) тільки від температури;

- б) від двох незалежних параметрів, від двох аргументів найбільш зручних у заданий момент часу для запису калоричного рівняння стану;
- в) тільки від тиску;
- г) тільки від зміни питомого об'єму.

## ТЕПЛОЄМНІСТЬ ІДЕАЛЬНИХ І РЕАЛЬНИХ ГАЗІВ ТА ТІЛ

---

- Теплоємність газів і тіл: визначення, класифікація, одиниці, фізичний зміст, співвідношення
- Теплоємність при постійному тиску і постійному об'ємі. Рівняння Майєра
- Молекулярно-кінетична теорія теплоємності
- Залежність теплоємності від температури. Істинна та середня теплоємність
- Теплоємність суміші ідеальних газів
- Основи термохімії. Закон Гесса

### 3.1. Теплоємність газів і тіл: визначення, класифікація, одиниці, фізичний зміст, співвідношення

При розрахунках теплових процесів найбільш важливим моментом є визначення кількості теплоти, яка приймає участь у них. Точне визначення теплоти дозволяє дати правильну оцінку роботи теплового обладнання, що є особливо важливим при виконанні як порівняльних досліджень, так і при проведенні економічних розрахунків.

Перший спосіб визначення теплоти як кількісної міри термічної взаємодії робочого тіла з навколишнім середовищем, полягає в знаходженні параметра стану, який відіграє роль координати стану. На основі досвіду елементарна кількість теплоти в рівноважному процесі може бути знайдена у вигляді добутку:

$$dQ = TdS,$$

де  $T$  – абсолютна температура (інтенсивний параметр) – потенціал термічної взаємодії;

$S$  – ентропія (екстенсивний параметр) – термічна координата стану, яка має зміст термічного заряду.

Інший спосіб обрахування кількості теплоти пов'язаний з поняттям теплоємності робочого тіла в процесі. Підведення теплоти до робочого тіла або її відведення від нього в будь-якому процесі приводить у загальному випадку до зміни температури тіла.

Відношення кількості теплоти  $Q_x$ , підведеної або відведеної в процесі, до відповідної зміни температури називається **теплоємністю тіла**  $C_x$  в заданому процесі, який характеризується параметром  $x$ :

$$C_x = \frac{Q_x}{t_2 - t_1}. \quad (3.1)$$

Із наведеного визначення випливає, що одне і те саме тіло може мати різну теплоємність залежно від виду процесу, а також вона може бути як додатною, коли знаки теплоти і зміни температури однакові, так і від'ємною – коли знаки теплоти і зміни температури різні. Теплоота при цьому визначається за формулою:

$$Q_x = C_x(t_2 - t_1). \quad (3.2)$$

Таким чином, з фізичної точки зору теплоємність визначає кількість енергії, необхідної для зміни температури тіла на один градус.

Крім цього, із означення випливає, що теплоємність є екстенсивним параметром, який залежить від маси системи. Щоб позбутися цього, вводять поняття питомої теплоємності, тобто теплоємності одиничної кількості речовини (для спрощення слово “питома” не вживають). Залежно від вибору одиниці кількості речовини теплоємність газів буває:

- масовою  $c$  – теплоємність 1 кг маси, Дж/(кг·К);
  - об'ємною  $c'$  – теплоємність 1 м<sup>3</sup> газу за нормальних умов, Дж/(м<sup>3</sup>·К). Нормальні фізичні умови відповідають наступним параметрам:  $P_0 = 760$  мм рт. ст., температура  $T_0 = 273$  К;
  - мольною  $c_\mu$  – теплоємність моля речовини Дж/(моль·К).
- Отже,

$$c = \frac{\delta Q}{m dT}; \quad (3.3)$$

$$c' = \frac{\delta Q}{V_n dT}; \quad (3.4)$$

$$c_\mu = \frac{\delta Q}{M dT}, \quad (3.5)$$

де  $V_n$  – об'єм газу за нормальних умов;

$M$  – кількість речовини, моль.

Між теплоємностями існує такий зв'язок:

$$c = \frac{c_\mu}{\mu}; \quad c' = \frac{c_\mu}{22,4}; \quad c' = \frac{c}{\rho_n}; \quad c = c'v_n, \quad (3.6)$$

де  $\rho_n$ ,  $v_n$  – відповідно густина і питомий об'єм тіла за нормальних умов.

### 3.2. Теплоємність при постійному тиску і постійному об'ємі. Рівняння Майера

Як уже зазначалося, кількість теплоти, що передається тілу при тепловій взаємодії з навколишнім середовищем визначається характером процесу (рис. 3.1).

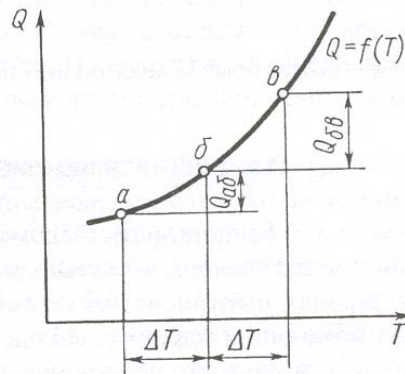


Рис. 3.1 – Залежність кількості теплоти від виду процесу

Як видно з рисунка, на ділянках  $a-b$  та  $b-v$  при зміні температури на одну і ту саму величину  $\Delta T$ , кількість переданої теплоти  $Q_{a-b}$  та  $Q_{b-v}$  буде різною. Нагрівання робочого тіла на один градус залежно від процесу потребує різну кількість теплоти, отже і теплоємність буде різною, а саме поняття “теплоємність” має сенс лише тоді, коли відомий характер процесу. Залежно від виду процесу теплоємність одного і того ж тіла може змінюватись в ши-

роких межах: від  $-\infty$  до  $+\infty$ . Дійсно, при  $T = \text{const}$  (ізотермічний процес)  $c = \infty$ , а при  $\delta Q = 0$  (адіабатний процес)  $c = 0$ .

Отже, теплоємність не є параметром стану, а характеризує властивості тіла і процесу. Дійсно, якщо  $\delta Q = TdS$ , то підставляючи цей вираз у формулу означення теплоємності при умові, що  $\Delta T \rightarrow 0$ , отримаємо:

$$C = \frac{TdS}{dT}. \quad (3.7)$$

Повна похідна  $dS/dT$  є функцією процесу. Це пояснюється тим, що зміна температури зумовлена не тільки кількістю підведеної в процесі теплоти  $\delta Q$ , а й величиною здійсненої роботи  $\delta L$ , яка визначається фізичними властивостями робочого тіла. Якщо параметр процесу  $x$  є постійним, то повна похідна замінюється частинною похідною  $(\partial S / \partial T)_x$ , а теплоємність позначається  $c_x$ .

У термодинаміці у випадку нагрівання газів найбільш практичне значення мають питомі масові теплоємності при постійному об'ємі  $v$  та тиску  $p$ :

$$c_v = \left( \frac{\partial q}{\partial T} \right)_v; \quad c_p = \left( \frac{\partial q}{\partial T} \right)_p.$$

Розглянемо фізичний зміст цих величин.

Для того, щоб встановити між ними взаємозв'язок, використаємо перший закон термодинаміки у вигляді:

$$\delta q = du + p dv.$$

В ізохорному процесі ( $v = \text{const}$ ) робота розширення  $p dv = 0$  і тоді:

$$c_v = (\partial q / \partial T)_v = (\partial u / \partial T)_v. \quad (3.8)$$

Для ідеального газу теплоємність при постійному об'ємі дорівнює приросту внутрішньої енергії при зміні температури на один градус. Це є визначенням фізичного змісту ізохорної теплоємності.

Для ізобарного процесу:

$$c_p = (\partial q / \partial T)_p = (\partial u / \partial T)_p + p(\partial v / \partial T)_p.$$

Оскільки внутрішня енергія ідеального газу не залежить від об'єму і тиску, то частинні похідні можна замінити повним диференціалом:

$$(\partial u / \partial T)_p = (\partial u / \partial T)_v = du / dT = c_v.$$

Із рівняння стану, за умови, що  $p = \text{const}$ , одержимо:

$$\left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = \frac{R}{p}$$

і тоді

$$c_p = c_v + p \left( \frac{R}{p} \right) = c_v + R. \quad (3.9)$$

Подібний вираз можна записати для молярної теплоємності:

$$c_{\mu p} = c_{\mu v} + R_{\mu}. \quad (3.10)$$

де  $R_{\mu}$  – універсальна газова стала,  $R_{\mu} = 8314 \text{ Дж/Кмоль} \cdot \text{К}$ .

Вирази (3.9) та (3.10) носять назву **рівняння Майєра**. Із них випливає, що теплоємність  $c_p > c_v$ . Це пояснюється тим, що в ізохорному процесі теплота витрачається тільки на зміну внутрішньої енергії, а в ізобарному – на зміну внутрішньої енергії та роботу розширення. Отже, зміна температури в процесі при  $p = \text{const}$  буде меншою, ніж зміна температури при  $v = \text{const}$ .

Таким чином, рівняння Майєра є окремим випадком першого закону термодинаміки стосовно одиниці кількості речовини в ізобарному процесі нагрівання при зміні температури на 1 К. Із рівняння (3.9) також випливає фізичний зміст газової сталої – це робота розширення, яку виконує 1 кг газу в ізобарному процесі при нагріванні його на один градус.

Для реального газу  $c_p - c_v > R$ , оскільки крім зовнішньої роботи, частина енергії витрачається на внутрішню роботу проти сил взаємодії молекул, що викликає потребу додаткової витрати теплоти. Ця нерівність носить назву **нерівність Майєра**, яка справедлива для реальних газів.

У термодинамічних розрахунках часто використовують відношення теплоємностей, яке позначають буквою  $k$ :

$$k = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c'_p}{c'_v} = \frac{c_{\mu p}}{c_{\mu v}}. \quad (3.11)$$

де  $k$  – показник адіабати або коефіцієнт Пуассона.

Із рівняння Майєра можна отримати наступні співвідношення для ізохорної та ізобарної теплоємностей:

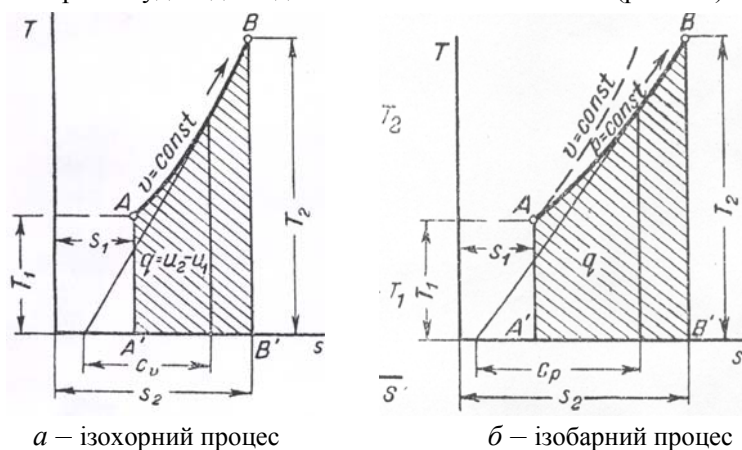
$$c_v = \frac{R}{k-1}; \quad c_p = \frac{kR}{k-1}.$$

Для реальних газів  $k$  залежить від температури і є змінною величиною, яка зменшується при зростанні температури. Дійсно,

$$k = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_v + R}{c_v} = 1 + \frac{R}{c_v} = 1 + \frac{R_\mu}{c_{\mu v}} = \frac{1,985}{c_{\mu v}}.$$

Із зростанням температури  $c_{\mu v}$  зростає і відповідно  $k$  зменшується, але залишається при цьому весь час більше одиниці.

Ще однією цікавою особливістю характеризуються графіки ізохорного та ізобарного процесів в  $T$ - $s$ -координатах. Як відомо, площа під графіком процесу відповідає кількості теплоти. Якщо прийняти приріст температури на один градус, то кількість теплоти на графіку буде відповідати теплоємності  $c_v$  чи  $c_p$  відповідно. З іншого боку ці теплоємності є ніщо інше, як похідна функції процесу по температурі. З математики відомо, що дотична до кривої процесу є геометричним трактуванням похідної. Отже, якщо провести дотичну в точці початку або кінця кривої процесу, то її проекція на вісь ентропії буде відповідати величині теплоємності (рис. 3.2).



*a* – ізохорний процес

*б* – ізобарний процес

Рис. 3.2 – До геометричного трактування теплоємностей  $c_v$  та  $c_p$

### 3.3. Молекулярно-кінетична теорія теплоємності

Теплоємність газів може бути визначена на підставі молекулярно-кінетичних уявлень. Оскільки молекулярно-кінетична теорія газів будується на законах ньютонівської механіки, то застосування її до теплоємностей газів має обмежений характер.

Більш задовільні результати дає квантова теорія. Проте для багатьох практичних випадків класична теорія збігається із дослідними даними.

Пояснюється це тим, що класична теорія є граничним випадком квантової і має певну сферу застосування, де результати за двома теоріями збігаються.

Внутрішня енергія газу складається з кінетичної енергії його молекул. Виходячи із основного рівняння молекулярно-кінетичної теорії:

$$\frac{m\bar{w}^2}{2} = \frac{3}{2}kT, \quad (3.12)$$

внутрішня енергія одного кіломоля:

$$U_{\mu} = N \frac{m\bar{w}^2}{2} = N \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}R_{\mu}T, \quad (3.13)$$

де  $N$  – число Авогадро ( $6,023 \cdot 10^{23}$ );

$k = R_{\mu} / N$  – стала Больцмана,  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К; інші

величини загальноприйняті.

Для визначення теплоємності газу використовують закон про рівномірний розподіл енергії за степенями вільності. Цей закон впливає із хаотичності теплового руху молекул. Оскільки жодному з напрямків не надається переваги, то на кожний із можливих напрямків припадає однакова кількість енергії.

Під кількістю степенів вільності розуміють найменшу кількість координат, що визначає положення тіла в просторі. Кількість степенів вільності збігається з кількістю можливих переміщень тіла. У молекулярно-кінетичній теорії одноатомні молекули газів розглядаються як матеріальні точки, що рухаються поступально.

Для матеріальної точки кількість степенів вільності  $i = 3$  – три координати поступального руху (рис. 3.3, а). Для двохатомних молекул, які жорстко зв'язані між собою (рис. 3.3, б), кількість

степенів вільності  $i = 5$  (три степеня вільності поступального і два – обертального рухів). Для три- та багатоатомних молекул газів кількість степенів вільності  $i = 6$  (рис. 3.3, в).

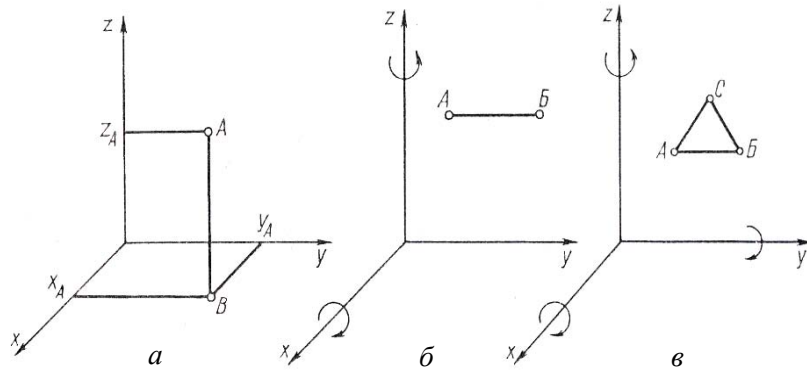


Рис. 3.3 – До визначення степеня вільності різних молекул газу

Як випливає із залежності (3.12), енергія поступального руху одноатомної молекули

$$\frac{m\bar{w}^2}{2} = \frac{3}{2}kT.$$

Отже на один степінь вільності поступального руху молекул в середньому припадає  $0,5kT$ . Розглянемо яка енергія припадає на один степінь вільності обертального руху.

Відповідь на це питання дає закон рівномірного розподілу енергії за степенями вільності, встановлений Дж. Максвеллом і Л. Больцманом: у рівноважній системі, що складається з великої кількості частинок (молекул) – кінетична енергія розподіляється в середньому порівну між різними степенями вільності руху частинок. На кожний степінь вільності при температурі  $T$  в середньому припадає енергія, що дорівнює  $0,5kT$ .

У загальному випадку, коли молекула має  $i$  степенів вільності, внутрішня енергія

$$U_{\mu} = \frac{i}{2}R_{\mu}T, \quad (3.14)$$

Розрахуємо молярні теплоємності газів. Якщо газ нагрівається при постійному об'ємі, то за першим законом термодинаміки він не виконує роботи і вся підведена теплота іде на зміну внутрішньої енергії. Для одного моля газу можна записати:

$$\delta Q = dU_{\mu} = c_{\mu v} dT.$$

звідки

$$c_{\mu v} = \frac{dU_{\mu}}{dT} = \frac{i}{2} R_{\mu}. \quad (3.15)$$

Тоді рівняння Майера (3.10) перепишеться так:

$$c_{\mu p} = \frac{i}{2} R_{\mu} + R_{\mu} = \frac{i+2}{2} R_{\mu}, \quad (3.16)$$

а рівняння (3.11)

$$k = \frac{\frac{i+2}{2} R_{\mu}}{\frac{i}{2} R_{\mu}} = \frac{i+2}{i}. \quad (3.17)$$

Постійні значення молярних теплоємностей для орієнтовних розрахунків, при невисоких температурах, табульовані (табл. 3.1).

**Таблиця 3.1 – Теплоємність ідеальних газів за молекулярно-кінетичною теорією**

Атомність газу	Число степенів вільності $i$	Молярна теплоємність, кДж/(кмоль·К)		Показник адіабати $k$
		$c_{\mu p}$	$c_{\mu v}$	
Одноатомний	3	20,93	12,56	1,67
Двоатомний	5	29,31	20,93	1,41
Три- і багатоатомний	6	33,26	29,31	1,33

Наведені розрахунки добре підтверджуються дослідними даними для одноатомних газів, в обмеженому інтервалі температур – для двоатомних газів, однак дають досить слабкий збіг результатів для багатоатомних газів.

Молярні теплоємності та значення показника адіабати ( $p = 1,01325 \cdot 10^5$  Па і  $T = 273,15$  К) деяких газів наведені в таблиці 3.2.

**Таблиця 3.2 – Молярні теплоємності газів в ідеальному стані**

Газ і його хімічна формула	$c_{\mu p}$ , кДж/(кмоль·К)	$c_{\mu v}$ , кДж/(кмоль·К)	$k = c_{\mu p} / c_{\mu v}$
Гелій, He	20,93	12,60	1,66
Водень, H <sub>2</sub>	28,62	20,3	1,41
Азот, N <sub>2</sub>	29,12	20,8	1,40
Оксид вуглецю, CO	29,12	20,81	1,40
Кисень, O <sub>2</sub>	29,27	20,96	1,397
Повітря	29,07	20,76	1,401
Діоксид вуглецю, CO <sub>2</sub>	35,86	27,545	1,302
Аміак, NH <sub>3</sub>	35,0	26,67	1,313
Метан, CH <sub>4</sub>	34,74	26,42	1,315

Для складних молекул типу C<sub>2</sub>H<sub>5</sub>OH, C<sub>6</sub>H<sub>6</sub> та інших, досліді показують, що навіть за нормальних умов значення  $c_{\mu v}$  дуже різняться. Так класична теорія теплоємностей для спирту дає  $c_{\mu v} = 3R_{\mu}$ , а за дослідними даними  $c_{\mu v} = 8R_{\mu}$ , тобто для складних молекул треба враховувати і степені вільності коливного руху молекул. У деяких випадках це дає непогані результати. Але і врахування степенів вільності коливного руху дає незадовільні результати для багатоатомних молекул.

Другим недоліком класичної теорії теплоємності газів є те, що вона не описує температурної залежності.

#### **3.4. Залежність теплоємності від температури. Істинна та середня теплоємність**

Для одноатомних газів дослідні значення  $c_{\mu v}$  досить непогано збігаються з розрахунковими, визначеними за формулою:

$$c_{\mu v} = \frac{3}{2} R_{\mu} \quad (3.18)$$

і не залежать від температури.

Для двоатомних газів молярна теплоємність не завжди відповідає теоретичним значенням. Для них залежність  $c_{\mu v}(T)$  має вигляд, наведений на рис. 3.4.

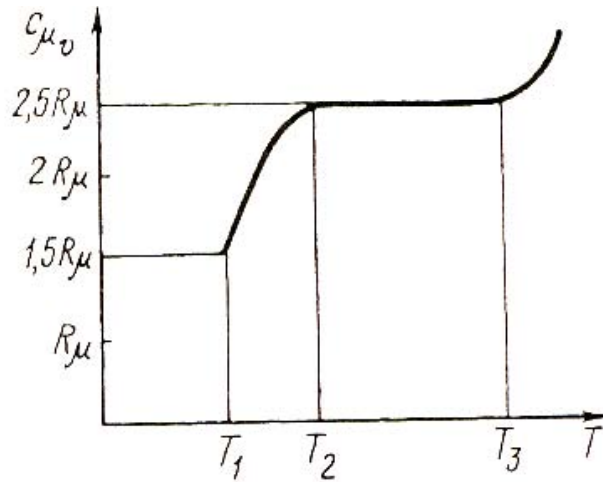


Рис. 3.4 – Залежність теплоємності газу від температури

Як видно, класичне значення  $c_{\mu v} = 2,5R_{\mu}$  має місце тільки для певного інтервалу температур. При  $T < T_1$  значення  $c_{\mu v}$  близьке до значення  $1,5R_{\mu}$ , тобто молекули двохатомного газу поводять себе так, як би для них властиві лише степені вільності поступального руху ( $T_1 \leq 50$  К).

В інтервалі температур  $T_1 \dots T_2$  ніби “виморожуються” степені вільностей коливного руху і теплоємність при цьому зростає. При  $T > T_3$  уже з’являються додаткові степені вільності коливального руху. Це реалізується при досить високих температурах (для молекул  $N_2$ ,  $O_2$ ,  $H_2$  та інших ці температури становлять кілька тисяч градусів).

В області кімнатних температур теплоємність  $c_{\mu v}$  двохатомних газів пов’язана з поступальним та обертальним рухами молекул і досить близька до теоретичного значення  $c_{\mu v} = 2,5R_{\mu}$ . Із зниженням температури теплоємність  $c_{\mu v}$  зменшується, наприклад, для  $H_2$  і  $D_2$  (дейтерію)  $c_{\mu v} = 1,5R_{\mu}$ . Для інших газів це значення  $c_{\mu v}$  не досягається, оскільки вони ще до цього зріджуються. Водень при 60 К поводить себе як одноатомний газ.

У випадку пружних молекул двохатомного газу треба врахувати степені вільності коливального руху, тоді максимальне теоретичне значення теплоємності  $c_{\mu\nu} = 3,5R_{\mu}$  не досягається, оскільки раніше настає дисоціація молекул газу на атоми.

Отже, розглянута класична теорія теплоємності ідеального газу, навіть при доповненні і уявленні про поступове “включення” степенів вільності обертального та коливального рухів, не дає задовільного пояснення температурної залежності теплоємності. Для багатоатомних газів ця картина ще більше ускладнюється.

Подальший розвиток проблеми показав, що теплоємність газів описується квантовою теорією, яка базується на уявленнях про дискретність енергетичних рівнів молекул. Квантова теорія, основи якої закладено М. Планком та А. Ейнштейном, дала змогу подолати труднощі класичної теорії теплоємності, але опис класичної теорії теплоємності виходить за рамки цього курсу і ми на ньому зупинятися не будемо.

У загальному вигляді, за квантовою теорією, залежність дійсної теплоємності від температури описується степеневим поліномом:

$$c_t = c_0 + at + bt^2 + \dots, \quad (3.19)$$

де  $c_t, c_0$  – теплоємності газу при температурі  $t$  і  $0$  °С;  $a, b$  – постійні величини для даного газу.

У технічних розрахунках нелінійну залежність теплоємності від температури замінюють лінійною залежністю типу:

$$\bar{c} \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{q_{1-2}}{t_2 - t_1} = c_0 + \frac{a}{2}(t_1 + t_2). \quad c_t = c_0 + at. \quad (3.20)$$

Тоді кількість підведеної в цьому процесі теплоти можна розрахувати за формулою:

$$q_{1-2} = \int_{t_1}^{t_2} (c_0 + at) dt. \quad (3.21)$$

У теплотехнічних розрахунках дуже часто доводиться розраховувати кількість теплоти, що підведена при зміні температури не від нуля, а від  $t_1$  до  $t_2$ . Такі розрахунки зручно проводити через середню теплоємність  $\bar{c} \Big|_{t_1}^{t_2}$  для цього інтервалу температур (рис. 3.5).

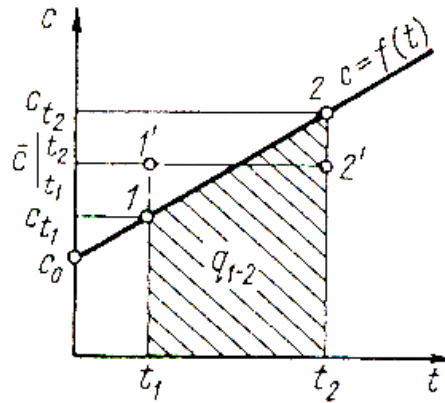


Рис. 3.5 – Схема визначення середньої теплоємності

Середня теплоємність дорівнює висоті прямокутника з точками  $t_2-t_1-1'-2'-t_2$ , площа якого дорівнює площі фігури  $t_1-1-2-t_2$ :

$$\bar{c} \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{q_{1-2}}{t_2 - t_1} = c_0 + \frac{a}{2}(t_1 + t_2). \quad (3.22)$$

Під **середньою теплоємністю** в інтервалі температур  $T_1 \dots T_2$  розуміють кількість теплоти, яку потрібно надати однорідному тілу, або відняти від нього, щоб змінити його температуру на один градус:

$$\bar{C} \Big|_{T_1}^{T_2} = \frac{Q_{1-2}}{\Delta T_{1-2}} = \frac{Q_{1-2}}{T_2 - T_1}, \quad (3.23)$$

де  $\bar{C} \Big|_{T_1}^{T_2}$  – середня теплоємність тіла в інтервалі температур  $T_1 \dots T_2$ ;  $Q_{1-2}$  – кількість теплоти, передана тілу в процесі 1–2;  $T_1, T_2$  – відповідно початкова і кінцева температури.

Границя, до якої прямує середня теплоємність при  $\Delta T \rightarrow 0$ , називається **істинною теплоємністю**:

$$C = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\delta q}{dT}, \text{ Дж/град.} \quad (3.24)$$

Виходячи з поняття істинної теплоємності можна отримати вирази для визначення кількості теплоти в процесі  $\delta q_x = c_x dt$  або:

$$q_x = \int_{t_1}^{t_2} c_x dt. \quad (3.25)$$

Тоді кількість теплоти, що підведена до системи в процесі 1–2,

$$q_{1-2} = \bar{c} \Big|_{t_1}^{t_2} (t_2 - t_1). \quad (3.26)$$

Підставивши у вираз (3.25) значення  $q_x$  з формули (3.26), отримуємо взаємозв'язок середньої та істинної теплоємностей:

$$\bar{c}_x \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} c_x dt}{\Delta t}. \quad (3.27)$$

У довідковій літературі наведено середні значення теплоємностей від 0 до  $t$  °С, які розраховуються за формулою (лінійна залежність):

$$\bar{c} \Big|_0^t = c_0 + \frac{a}{2}. \quad (3.28)$$

Тоді середня теплоємність в інтервалі температур  $t_1 \dots t_2$  (нелінійна залежність):

$$\bar{c} \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{\bar{c} \Big|_0^{t_2} \cdot t_2 - \bar{c} \Big|_0^{t_1} \cdot t_1}{t_2 - t_1}. \quad (3.29)$$

Існують і інші інтерполяційні формули для розрахунків середніх теплоємностей повітря для певних інтервалів температур. Подаємо такі формули для діапазону 0–1000 °С (лінійна залежність):

$$\bar{c}_{\text{шр}} \Big|_{t_{\text{ex}}}^{t_{\text{вух}}} = 28,8270 + 0,0027080(t_{\text{ex}} + t_{\text{вух}}), \text{ кДж/кмоль} \cdot \text{К};$$

$$\bar{c}_v \Big|_{t_{\text{ex}}}^{t_{\text{вух}}} = 0,7084 + 0,00009349(t_{\text{ex}} + t_{\text{вух}}), \text{ кДж/кг} \cdot \text{К};$$

$$\bar{c}_p \Big|_{t_{\text{ex}}}^{t_{\text{вух}}} = 0,9952 + 0,0027080(t_{\text{ex}} + t_{\text{вух}}), \text{ кДж/кг} \cdot \text{К};$$

$$\bar{c}'_v \Big|_{t_{\text{ex}}}^{t_{\text{вух}}} = 0,9161 + 0,00012091(t_{\text{ex}} + t_{\text{вух}}), \text{ кДж/м}^3 \cdot \text{К};$$

$$\bar{c}'_p \Big|_{t_{\text{ex}}}^{t_{\text{вух}}} = 1,287 + 0,0027080(t_{\text{ex}} + t_{\text{вух}}), \text{ кДж/м}^3 \cdot \text{К}.$$

Кількість теплоти, підведеної (чи відведеної) до системи, залежно від прийнятих одиниць кількості речовини розраховується за виразом:

$$Q_{1-2} = q_{1-2}m = q_{1-2}V_n = m \left[ \bar{c} \Big|_0^{t_2} \cdot t_2 - \bar{c} \Big|_0^{t_1} \cdot t_1 \right] = V_n \left[ \bar{c}' \Big|_0^{t_2} \cdot t_2 - \bar{c}' \Big|_0^{t_1} \cdot t_1 \right]. \quad (3.30)$$

У таблиці 3.3 наведена класифікація різних видів теплоємностей залежно від одиниць кількості речовини (масові, об'ємні, молярні), температури (істинні та середні) і процесу (ізохорні та ізобарні).

**Таблиця 3.3 – Класифікація різних видів теплоємностей**

Теплоємність	Масова, кДж/(кг·К)		Об'ємна, кДж/(м <sup>3</sup> ·К)		Молярна, кДж/(кмоль·К)	
	істинна	середня	істинна	середня	істинна	середня
Ізохорна	$c_v$	$\bar{c}_v$	$c'_v$	$\bar{c}'_v$	$c_{\mu v}$	$\bar{c}_{\mu v}$
Ізобарна	$c_p$	$\bar{c}_p$	$c'_p$	$\bar{c}'_p$	$c_{\mu p}$	$\bar{c}_{\mu p}$

### 3.5. Теплоємність суміші ідеальних газів

При розрахунках теплових установок приходиться мати справу із газовими сумішами, а в таблицях подаються теплоємності тільки для окремих ідеальних газів, тому необхідно знати, як розраховується теплоємність суміші.

Теплоємність газової суміші обчислюється за її складом і теплоємністю окремих газів, які входять в задану газову суміш. Суміш може бути задана масовим, об'ємним та молярним складом. Нехай вона задана масовим складом, тоді її маса:

$$m = \sum_{i=1}^n m_i,$$

де  $m_i$  – маса  $i$ -го компонента, який входить в суміш.

Очевидно, що для збільшення температури газової суміші на  $\Delta t$ , необхідно збільшити температуру на  $\Delta t$  кожного газу цієї суміші. При цьому на нагрів кожного газу суміші необхідно затратити кількість теплоти

$$q_i = m_i \cdot c_i \cdot \Delta t,$$

де  $c_i$  – масова теплоємність  $i$ -го газу суміші.

Теплоємність газової суміші визначається з рівняння теплового балансу:

$$m \cdot c_{\text{сум}} \cdot \Delta t = \sum m_i \cdot c_i \cdot \Delta t,$$

де  $c_{\text{сум}}$  – теплоємність газової суміші.

Розділивши ліву та праву частину рівняння на  $m \cdot \Delta t$ , одержимо:

$$c_{\text{сум}} = \sum_{i=1}^n g_i \cdot c_i, \quad (3.31)$$

де  $g_i$  – масова частина  $i$ -го газу, який входить в суміш.

З цього виразу випливає, що теплоємність суміші газів, заданої масовими частинами (масова теплоємність суміші) дорівнює сумі добутків масових часток на масову теплоємність кожного газу.

За допомогою аналогічних міркувань, можна знайти подібні за структурою вирази для визначення об'ємної та мольної теплоємності газової суміші.

Запишемо ці залежності для ізобарної та ізохорної теплоємності, якщо суміш задана:

– масовими частками

$$c_{v_{\text{сум}}} = \sum_{i=1}^n g_i c_{v_i}; \quad c_{p_{\text{сум}}} = \sum_{i=1}^n g_i c_{p_i};$$

– об'ємними частками

$$c'_{v_{\text{сум}}} = \sum_{i=1}^n r_i c'_{v_i}; \quad c'_{p_{\text{сум}}} = \sum_{i=1}^n r_i c'_{p_i};$$

– молярними частками

$$c_{\mu_{\text{сум}}} = \sum_{i=1}^n r_i \cdot \mu_i \cdot c_{v_i}; \quad c'_{\mu_{\text{сум}}} = \sum_{i=1}^n r_i \cdot \mu_i \cdot c_{p_i}.$$

### 3.6. Основи термохімії. Закон Гесса

У результаті протікання хімічної реакції відбувається корінна зміна речовини. Цей процес можна характеризувати таким чином, що вихідні речовини зникають і утворюються нові, що включають масу і внутрішню енергію вихідних речовин. При цьому можливо, що  $U_1 > U_2$  або  $U_1 < U_2$ , де  $U_1$  – сума внутрішньої енергії вихідних

речовин;  $U_2$  – сума внутрішньої енергії продуктів реакції при тій же температурі.

У першому випадку реакція відбувається з саморозігрівом, продукти реакції мають температуру вище температури вихідних речовин на величину різниці  $\Delta U = U_2 - U_1$ .

При охолодженні до температури системи в початковому стані продукти реакції віддають теплоту в кількості  $Q = U_2 - U_1 = \Delta U$ .

Такі реакції мають назву – екзотермічні.

У другому випадку реакція відбувається з самоохолодженням і для того, щоб продукти реакції мали температуру вихідних речовин, необхідно підводити теплоту зовні. Такі реакції відбуваються з поглинанням теплоти  $Q = U_2 - U_1$  і мають назву – ендотермічні.

Теплота, що виділяється або поглинається в результаті хімічної реакції, називається тепловим ефектом реакції  $Q$ .

Термохімія – це розділ хімічної термодинаміки, присвячений вивченню теплових ефектів хімічних реакцій, що займається їх систематизуванням і формулюванням загальних закономірностей.

Слід відмітити, що в термохімії знаки теплових ефектів протилежні тим, що прийняті в математичному виразі першого закону термодинаміки. Так, наприклад, в термодинаміці теплота, що втрачає система, вважається від'ємною ( $-Q$ ). В термохімії теплота, що виділяється в результаті хімічної реакції (а вона утворюється за рахунок зменшення енергії системи) приймається позитивною.

**Теплові ефекти при постійному об'ємі і постійному тиску.**

Якщо реакція протікає при постійному об'ємі, то робота розширення системи проти дії зовнішніх сил відсутня. В такому випадку  $L = 0$  і рівняння першого закону термодинаміки приймає вигляд:

$$Q_v = U_2 - U_1 = \Delta U. \quad (3.32)$$

У тому ж випадку, коли реакція протікає при постійному тиску, відбувається робота розширення:

$$L = p(V_2 - V_1), \quad (3.33)$$

звідси теплота реакції буде:

$$Q_p = U_2 - U_1 + p(V_2 - V_1), \quad (3.34)$$

або

$$Q_p = (U_2 + pV_2) - (U_1 + pV_1) = \Delta H, \quad (3.35)$$

Зв'язок між  $Q_p$  і  $Q_v$  безпосередньо встановлюється з рівняння:

$$Q_p = Q_v + p\Delta V. \quad (3.36)$$

При цьому зміна об'єму  $\Delta V = V_2 - V_1$  обумовлена зміною числа молей газоподібних учасників реакції  $\Delta M = M_2 - M_1$ . Тому за рівнянням Менделєєва–Клапейрона:

$$p\Delta V = \Delta MRT, \quad (3.37)$$

звідси

$$Q_p = Q_v + \Delta MRT \quad (3.38)$$

або в символах термодинаміки:

$$\Delta H = \Delta U + \Delta MRT. \quad (3.39)$$

Таким чином, тепловий ефект при постійному тиску ( $Q_p$ ) відрізняється від теплового ефекту при постійному об'ємі ( $Q_v$ ) на величину роботи, обумовленої зміною числа молей газоподібних продуктів реакції ( $\Delta MRT$ ).

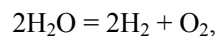
Якщо реакція відбувається без змін числа молей, то  $\Delta M = 0$ ,  $L = 0$  і  $Q_p = Q_v$ . У системах, що складаються тільки із твердих і рідких речовин, зміни об'єму дуже малі і  $Q_p \sim Q_v$ .

**Закон Гесса.** Оскільки внутрішня енергія та ентальпія є функціями стану і їх зміни не залежать від шляху процесу, то і теплові ефекти не залежать від шляху процесу. Зокрема, для хімічних реакцій це положення було встановлене дослідним шляхом Г.Г. Гессом у 1836 р. і відоме під назвою закону Гесса: *тепловий ефект хімічної реакції при сталій температурі не залежить від проміжних стадій, а визначається лише вихідним і кінцевим станом системи.*

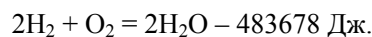
З цього закону витікає ряд важливих чинників, що дозволяють встановити величину і знак теплового ефекту в тому випадку, коли це неможливо зробити дослідним шляхом.

1. Тепловий ефект реакції розпаду дорівнює за величиною і протилежний за знаком тепловому ефекту зворотної реакції з'єднання.

Прикладом може слугувати реакція дисоціації парів води:



тепловий ефект якої неможливо визначити експериментально. Експериментально визначається теплота згорання водню:



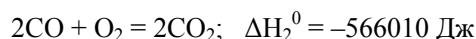
На основі закону Гесса тепловий ефект реакції дисоціації одного моля водяних парів дорівнює  $+\frac{483678}{2} = +241839$  Дж.

2. Якщо дві реакції з різних початкових станів приводять до одного і того ж кінцевого стану, то різниця їх теплових ефектів дорівнює тепловому ефекту переходу з одного початкового стану в інший.

Так, наприклад, реакції горіння вуглецю:



і оксиду вуглецю:



приводять систему в один і той же кінцевий стан і протікають з різним тепловим ефектом.

Після віднімання другого рівняння від першого отримаємо:



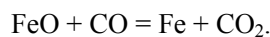
що відповідає переходу від одного початкового стану в інший. При цьому

$$\Delta H_3^0 = -\Delta H_1^0 + \Delta H_2^0 = -221010 \text{ Дж.}$$

3. Якщо здійснюються дві реакції, які з одного початкового стану приводять систему до різного кінцевого стану, то різниця їх теплових ефектів дорівнює тепловому ефекту переходу системи з одного кінцевого стану в інший.

4. Тепловий ефект реакції дорівнює різниці між сумою ентальпій продуктів реакції і сумою ентальпій вихідних речовин, з врахуванням стехіометричних коефіцієнтів хімічного рівняння (ентальпії простих речовин приймаються рівними нулю).

Як приклад може слугувати реакція:



Відомо, що  $\Delta H_{CO_2}^0 = -393421$  Дж;  $\Delta H_{Fe}^0 = 0$ ;

$$\Delta H_{FeO}^0 = -26652 \text{ Дж}; \Delta H_{CO}^0 = -110460 \text{ Дж.}$$

Звідси:

$$\Delta H^0 = \Delta H_{CO_2}^0 + \Delta H_{Fe}^0 - \Delta H_{FeO}^0 - \Delta H_{CO}^0 = -18600 \text{ Дж.}$$

**Залежність теплового ефекту від температури (рівняння Кірхгофа).** У термодинамічних таблицях величини ентальпії речовин приводять при температурі 298 К (25 °С) і тиску 101325 Н/м<sup>2</sup> (1 ат).

Такі величини називають стандартними і відмічаються нижнім індексом, що вказує абсолютну температуру і верхнім індексом (°), що тиск дорівнює одній атмосфері ( $\Delta H_{298}^0$ ). Це відповідає тепловому ефекту в умовах, коли початкові речовини мали температуру 25 °С і продукти реакції охолоджені до тієї ж температури. Однак в дійсності частіше всього реакція відбувається при значно більш високих температурах з тепловими ефектами, що не співпадають з калориметричними. Тому дуже часто виникає необхідність визначати тепловий ефект реакції при різних інших температурах її протікання.

Розв'язок цієї задачі можливий в рамках першого закону термодинаміки. Відомо, що:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p = C_p.$$

$$\text{Таким чином, } \left[\frac{\partial(\Delta H)}{\partial T}\right]_p = \Delta C_p.$$

Останнє співвідношення називають рівнянням Кірхгофа. Воно показує, що температурний коефіцієнт теплового ефекту реакції ( $\Delta H$ ) дорівнює алгебраїчній сумі молярних теплоємностей речовин, що приймають участь в реакції. При цьому теплоємності продуктів реакції необхідно брати з позитивним знаком, а вихідних речовин – з негативним.

При інтегруванні рівняння Кірхгофа в межах від  $T_1$  до  $T_2$  отримаємо:

$$\Delta H_{T_2} = \Delta H_{T_1} + \int_1^2 \Delta C_p dt, \quad (3.40)$$

Таким чином, для знаходження теплового ефекту при температурі  $T_2$  необхідно знати його величину при будь-якій іншій температурі (наприклад, стандартній і залежність теплоємностей речовин, що приймають участь в реакції, в інтервалі температур  $T_1$  та  $T_2$ ).

Знайдемо вираз для температурної залежності величини  $\Delta H_T^0$  реакції горіння оксиду вуглецю:



Скористаємося функціями теплоємностей:

$$C_p^{\text{CO}} = 6,5 + 0,001T,$$

$$C_p^{\text{O}_2} = 6,5 + 0,001T,$$

Звідси:

$$\Delta C_p = 2C_p^{\text{CO}_2} - 2C_p^{\text{CO}} - C_p^{\text{O}_2} = -5,5 + 0,0112T - 0,00000372T^2,$$

Підставляючи цей вираз  $\Delta C_p$  в рівняння (3.40), отримаємо після інтегрування:

$$\begin{aligned} \Delta H_r^0 &= -566095 - 5,5(T - 298) \\ &+ 0,0056(T^2 - 298^2) - 0,00000124(T^3 - 298^3). \end{aligned}$$

Аналогічні розрахунки можуть бути проведені для реакції при постійному об'ємі, виходячи з виразу:

$$\left[ \frac{\partial(\Delta U)}{\partial T} \right]_V = \Delta C_V.$$

Рівняння Кірхгофа можна застосувати також до поліморфних і агрегатних перетворень.

#### Контрольні питання

1. Що називається теплоємністю? Сформулюйте її фізичну суть.
2. Що таке питома теплоємність?
3. Дайте визначення масової, об'ємної та молярної теплоємностей.
4. Наведіть одиниці виміру масової, об'ємної та молярної теплоємностей.
5. Сформулюйте фізичну суть ізобарної і ізохорної масової, об'ємної та молярної теплоємностей.
6. З'ясуйте співвідношення між масовою, об'ємною та молярною теплоємностями з аналізу розмірностей, беручи за основу розмірність теплоємності: а) масової; в) об'ємної; в) молярної.

7. Чим відрізняється середня теплоємність від істинної теплоємності?
8. Сформулюйте фізичну суть рівняння Майєра.
9. У чому різниця між теплоємностями ідеальних та реальних газів?
10. Використовуючи аналітичний вираз першого закону термодинаміки та рівняння Майєра, поясніть чому:
  - а)  $c_p > c_v$ , для ідеальних газів;
  - б)  $c_p \gg c_v$ , для реальних газів.
11. Запишіть рівняння кількості теплоти через середню теплоємність.
12. Наведіть графічну залежність теплоємностей газів від температури.
13. Сформулюйте геометричну суть ізохорної і ізобарної теплоємностей.
14. Як показник адіабати виразити через ізохорну теплоємність і універсальну газову постійну?
15. Як показник адіабати виразити через калоричні параметри стану?
16. Запишіть рівняння масової, об'ємної та молярної теплоємностей для газової суміші при ізобарному процесі.
17. Що називається тепловим ефектом процесу? Яка різниця між тепловим ефектом та теплотою процесу?
18. Яка різниця між тепловими ефектами при  $p = \text{const}$  та  $v = \text{const}$ ? В яких випадках цією різницею можна знехтувати?
19. Сформулюйте закон Гесса. Як можна розрахувати теплові ефекти реакцій, використовуючи закон Гесса?
20. Як залежить тепловий ефект процесу від температури? Запишіть рівняння Кірхгофа у диференціальній та інтегральній формах.

### Тестові завдання

1. *Питома теплоємність – це теплофізична величина, що показує . . . .*
  - а) яку кількість теплоти необхідно передати тілу, щоб його температура змінилася на 1 °С;
  - б) якою кількістю теплоти можна нагріти тіло масою 1 кг;

в) яку кількість теплоти потрібно передати тілу масою 1 кг, щоб його температура збільшилась на 1 °С;

г) яка кількість теплоти виділяється із тіла масою 1 кг при зміні його температури на 1 °С.

**2. Вкажіть правильну одиницю виміру питомої теплоємності:**

- а) Дж/с; б) Дж/кг·К; в) Дж/м<sup>2</sup>; г) Дж/м<sup>2</sup>·К.

**3. Яке із наведених тверджень неправильне?**

I) кількість теплоти, переданої одноатомному ідеальному газу в ізобарному процесі завжди більша, ніж в ізохорному процесі з такою масою газу і при однаковій зміні температури;

II) кількість теплоти, переданої одноатомному ідеальному газу в ізобарному процесі завжди менша, ніж в ізохорному процесі з такою масою газу і при однаковій зміні температури;

III) при адиабатному стиску газу його температура завжди збільшується;

IV) ізотермічне охолодження заданої маси одноатомного ідеального газу завжди викликає від'ємну роботу цієї маси газу.

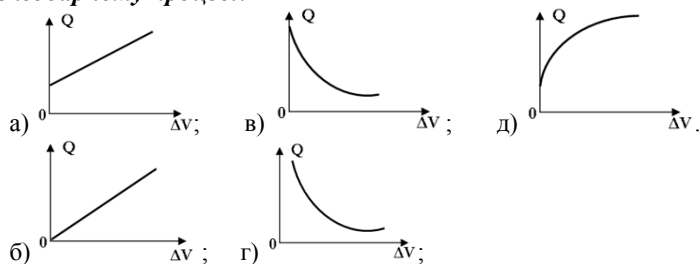
- а) тільки I; б) тільки II; в) тільки III; г) тільки IV; д) I, III, IV.

**4. Аргон масою 10 г нагріли до 27 °С при постійному тиску.**

**Чому дорівнює робота газу і кількість підведеної теплоти?**

- а)  $L = 54$  Дж,  $Q = 81$  Дж; г)  $L = 600$  Дж,  $Q = 900$  Дж;  
б)  $L = 81$  Дж,  $Q = 135$  Дж; д)  $L = 900$  Дж,  $Q = 600$  Дж.  
в)  $L = 54$  Дж,  $Q = 135$  Дж;

**5. Який із наведених графіків показує залежність кількості підведеної теплоти одноатомному ідеальному газу від зміни його об'єму в ізобарному процесі:**



**6. У закритій посудині знаходиться 4 г неону і 1 г аргону.**

**Чому дорівнює питома теплоємність цієї суміші ідеальних газів?**

- а) 0,54; б) 5,4; в) 540; г) 150;  
д) для відповіді інформації недостатньо.

**7. Питома теплоємність ідеального газу залежить від ...**

- а) маси тіла;  
 б) того, на скільки зміниться температура тіла;  
 в) роду речовини, із якої складається тіло.

**8. Теплоємність адиабатного процесу ідеального газу дорівнює:**

- а)  $-\infty$ ;      б) 1      в) 0;      г)  $-1$ ;      д)  $+\infty$ .

**9. Вкажіть правильний вираз показника адиабати  $k$  для ідеального газу:**

- а)  $1 + \frac{R_{\mu}}{c_{\mu_v}}$ ;    б)  $1 - \frac{R_{\mu}}{c_{\mu_v}}$ ;    в)  $1 + \frac{R}{c_{\mu_v}}$ ;    г)  $1 - \frac{R_{\mu}}{c_v}$ ;    д)  $1 + \frac{1,985}{c_{\mu_v}}$ .

**10. Теплоємності деякого газу мають значення  $c_{\mu_p} = 20,93$**

**та  $c_{\mu_v} = 12,56$ . Вкажіть атомність цього газу.**

- а) одноатомний;      г) багатоатомний;  
 в) трьохатомний;    д) для відповіді інформації недостатньо.  
 б) двоатомний;

**11. Вкажіть правильний вираз рівняння Майєра для об'ємних теплоємностей:**

- а)  $c'_p - c'_v = \frac{R_{\mu}}{22,4}$ ;      в)  $c'_p + c'_v = \frac{1,985}{\mu}$ ;  
 б)  $c_{\mu_p} - c_{\mu_v} = R_{\mu}$ ;      г)  $c'_p - \frac{1,985}{\mu} = -c'_v$ .

**12. Вкажіть вираз для визначення теплоти процесу через істинну теплоємність:**

- а)  $q = \int_{t_1}^{t_2} c_x dt$ ;      в)  $q = \int_{t_1}^{t_2} c_x (t_2 - t_1)$ ;  
 б)  $q = c_x (t_1 + t_2)$ ;      г)  $q = c_x dt$ .

**13. Питома теплоємність води дорівнює 4200 Дж/кг·град. Яка кількість теплоти виділиться при охолодженні води масою 10 кг на 20 °С?**

- а) 42 кДж;      б) 420 кДж;      в) 20 кДж;      г) 840 кДж.

## ДРУГИЙ ТА ТРЕТІЙ ЗАКОНИ ТЕРМОДИНАМІКИ

- Коловий процес або цикл, основні визначення та характеристики
- Загальні положення і формулювання другого закону термодинаміки
- Цикли Карно: прямий, зворотний, еквівалентний, їх к.к.д.  
Середньоінтегральна термодинамічна температура
- Математичний вираз другого закону термодинаміки.  
Зміна ентропії: термодинамічний і фізичний зміст
- Третій закон термодинаміки

### 4.1. Коловий процес або цикл, основні визначення та характеристики

При однократному розширенні газу можна отримати лише незначну кількість роботи, оскільки через деякий час температура і тиск газу вирівнюються з параметрами навколишнього середовища і щоб повторно одержати роботу, тіло стисненням треба повернути в початковий стан. Отже, для безперервного одержання роботи розімкнені термодинамічні процеси непридатні. Робоче тіло має здійснювати коловий процес, внаслідок якого всі параметри і функції стану змінюються таким чином, що в кінці циклу набувають початкових значень. Цикли в  $p$ - $v$ - і  $T$ - $s$ -координатах зображаються замкненими кривими (рис. 4.1, а, б).

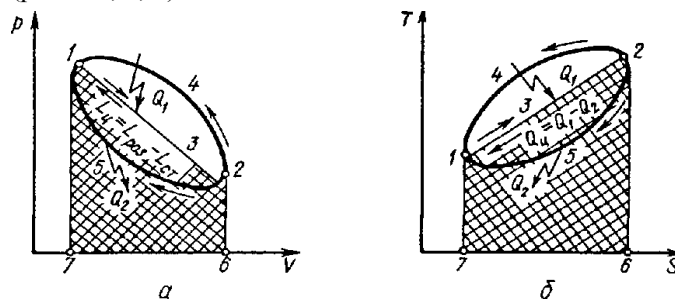


Рис. 4.1 – Графічне зображення циклу

Припустимо, що з підведенням деякої кількості теплоти  $q_1$  робоче тіло розширюється вздовж лінії  $1-3-2$ . При цьому виконується робота, яка еквівалентна площі  $1-3-2-6-7-1$  (рис. 4.1, *a*). Повернення системи в початковий стан можна здійснити відведенням теплоти трьома шляхами:

1. Крива стиснення  $2-3-1$  збігається з кривою розширення. У цьому випадку додатна робота розширення дорівнює від'ємній роботі стиснення і сумарна робота циклу дорівнює нулю.

2. Крива стиснення  $2-4-1$  лежить над кривою розширення. У цьому випадку робота стиснення  $L_{cm}$ , що дорівнює площі  $2-4-1-7-6-2$ , буде більшою за роботу розширення.

3. Крива стиснення  $2-5-1$  лежить під кривою розширення, і вигравш у роботі циклу буде дорівнювати площі  $1-3-2-5-1$ .

Отже, процес розширення газу потрібно здійснювати вздовж шляху, який відрізняється від шляху стиснення, інакше додатна робота розширення буде відповідати від'ємній роботі стиснення:

$$l_{роз} = \int_{v_1}^{v_2} p dv = l_{см} = \int_{v_2}^{v_1} p dv,$$

а сумарна робота циклу – дорівнювати нулю. Таким чином, щоб одержати сумарну роботу, процес розширення має проходити при більш високих тисках, ніж процес стиснення.

Кількість підведеної в процесі розширення теплоти еквівалентна площі  $1-3-2-6-7-1$  (рис. 4.1, *b*), а сам процес відбувається із збільшенням ентропії ( $\Delta S > 0$ ). Щоб повернути систему в початковий стан, потрібно відвести деяку кількість теплоти  $q_2$ , внаслідок чого ентропія системи зменшується ( $\Delta S < 0$ ). Кількість теплоти, що перетворюється в циклі у роботу, дорівнює  $q_u = q_1 - q_2$ . Кількість теплоти  $q_2$  залежить від форми шляху, яким система повертається в початковий стан. Якщо система повертається за кривою  $2-5-1$ , то  $q_2 < q_1$ , якщо за  $2-3-1$ , то  $q_2 = q_1$ , за  $2-4-1$  –  $q_2 > q_1$ . В першому випадку у циклі може бути одержана додатна робота.

Проінтегруємо рівняння першого закону термодинаміки для циклу:

$$\oint \delta q = \oint du + \oint p dv. \quad (4.1)$$

Оскільки внутрішня енергія  $u$  є функцією стану, тоді  $\oint du = 0$  і врахувавши, що

$$\oint dq = q_1 - |q_2| = q_u, \text{ а } \oint pdv = l_{\text{роз}} - l_{\text{ст}} = l_u,$$

то можна записати

$$q_1 - |q_2| = l_u. \quad (4.2)$$

Як бачимо, в роботу перетворюється не вся теплота підведена ззовні до робочого тіла, а тільки різниця між підведеною і відведеною у навколишнє середовище.

Залежно від призначення, цикли бувають прямими або зворотними. **Прямими** називаються цикли, які застосовують для одержання роботи за рахунок теплоти. **Зворотні** цикли призначені для перенесення теплоти від більш холодних до більш гарячих тіл.

Прямі цикли здійснюються за годинниковою стрілкою і  $l_u > 0$ . Для того, щоб це здійснити, треба мати джерело теплоти при високій температурі, яке передає робочому тілу теплоту  $q_1$  та джерело з низькою температурою, куди відводиться теплота  $q_2$ .

Система, від якої відводиться теплота  $q_1$ , називається **тепловіддавачем** або **гарячим джерелом теплоти**, а система, якій віддається теплота  $q_2$  – **теплоприймачем** або **холодним джерелом**.

Замкнені термодинамічні процеси знайшли практичне застосування в теплових машинах, оскільки вони дають можливість безперервно перетворювати теплоту в роботу або переводити теплоту на більш високий потенціальний рівень.

**Умови роботи теплової машини:**

1. Вона повинна бути періодично-діючою і зміна стану робочого тіла у ній має здійснюватись за круговим процесом.

2. Для здійснення кругового процесу необхідно мати окрім верхніх джерел теплоти і нижні (холодні) джерела теплоти, які би мали різну температуру.

3. Щоб одержати максимальну роботу, треба здійснити оборотний цикл, коли підведена теплота  $q_1$  буде максимальна, а відведена  $q_2$  – мінімальна. Для цього теплоту  $q_1$  від тепловіддавача до робочого тіла слід передавати в оборотному процесі за нескінченно малої різниці температур (ізотермічний процес). Віддачу теплоти  $q_2$  від робочого тіла до теплоприймача слід здійснювати за таких самих умов.

4. Для того щоб забезпечити умови оборотності, процеси мають проходити з нескінченно малою швидкістю. Якщо температура робочого тіла змінюється в процесі теплообміну, то треба мати нескінченно велику кількість джерел теплоти з нескінченно малою різницею температур і робоче тіло має послідовно контактувати з ними.

Розглянемо деякі термодинамічні характеристики для оцінки циклів.

Ефективність перетворення теплоти в роботу, або ступінь досконалості процесу теплової машини, характеризується **термічним коефіцієнтом корисної дії**  $\eta_t$ , під яким розуміють відношення кількості теплоти, що перетворилась у роботу, до кількості підведеної теплоти:

$$\eta_t = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} = \frac{L_u}{Q_1} \quad (4.3)$$

або через питомі величини

$$\eta_t = \frac{q_1 - |q_2|}{q_1} = 1 - \frac{|q_2|}{q_1} = \frac{l_u}{q_1}. \quad (4.4)$$

Величина  $q_2$  за абсолютним значенням завжди більша нуля, то термічний коефіцієнт завжди менше одиниці. Чим більше значення  $\eta_t$ , тим досконаліший цикл, тим більше теплоти перетворюється у роботу. Термічний коефіцієнт міг би дорівнювати одиниці лише за умови  $q_1 = \infty$  або  $q_2 = 0$ , чого, здійснити неможливо. Слід зауважити, що назва  $\eta_t$ , як коефіцієнта корисної дії не є вдалою. Відведення теплоти  $q_2$  до холодного джерела не є втратою, це плата за можливість повернути систему в початковий стан після здійснення роботи. Отже, термічний к.к.д. циклу характеризує тільки здатність теплоти перетворюватися в роботу, тобто  $\eta_t$ , є по суті коефіцієнтом перетворюваності теплоти в роботу у циклі.

У зворотному циклі, робота розширення робочого тіла відбувається за нижчих тисків і температур, ніж стиснення, а робота розширення менша роботи стиснення. Цикл можна здійснити, лише виконавши зовнішню роботу.

У таких циклах змінюється напрям переходу теплоти. Так, теплота  $q_2$  підводиться до робочого тіла від холодного джерела за низької температури. При цьому витрачається деяка зовнішня робота  $l_u$ , що перетворюється у внутрішню енергію робочого тіла і підвищує його температуру. Сумарна енергія робочого тіла віддається гарячому джерелу (навколишнє середовище) при більш високій температурі. Отже, в циклі здійснюється передача теплоти  $q_2$  від менш нагрітого до більш нагрітого тіла. Із закону збереження енергії:

$$q_2 + l_u = q_1. \quad (4.5)$$

За такими циклами працюють холодильні установки. Ефективність циклу визначається *холодильним коефіцієнтом*  $\varepsilon$ , який чисельно дорівнює відношенню кількості теплоти, яка відбирається від холодного джерела  $q_2$ , до витраченої роботи:

$$\varepsilon = \frac{q_2}{l_{\text{ч}}} = \frac{q_2}{q_1 - q_2} = \frac{1}{\eta_t} - 1. \quad (4.6)$$

Найбільш ефективним вважається такий зворотний цикл, коли за мінімальної витрати зовнішньої роботи відбирається найбільша кількість теплоти  $q_2$ . Величина  $q_2$  називається *питомою холодопродуктивністю*.

Установки, що працюють за зворотними циклами ще за більш високих температур джерел теплоти, ніж у холодильних машинах, називають *тепловими насосами*. Вони застосовуються для підвищення потенціалу вторинних теплоносіїв, що потім використовують для опалення приміщень, у теплообмінних апаратах тощо. Економічність їх циклу характеризується коефіцієнтом перетворення теплоти або *опалювальним коефіцієнтом*:

$$\psi = \frac{q_1}{l_{\text{ч}}} = \frac{q_2 - l_{\text{ч}}}{l_{\text{ч}}} = \varepsilon + 1. \quad (4.7)$$

#### 4.2. Загальні положення і формулювання другого закону термодинаміки

Природним процесам властива направленість і незворотність. Розбити яйце і зробити яєчню нескладно, але відновити сире яйце із яєчні неможливо. Запах з відкритого флакона одеколону наповнює кімнату, але назад у флакон його не збереш. І причина такої незворотності процесів, яка відбувається у Всесвіті криється у другому законі термодинаміки, який при всій його простоті є самим складним і досить часто неправильно трактованим законом класичної фізики.

Перший закон термодинаміки встановлює чисельний зв'язок між різними видами енергії за умови їх взаємоперетворень у будь-якому процесі. Однак закон нічого не говорить про особливості перетворення, які процеси можливі і в якому напрямку вони проходять. Як показує досвід, природні процеси є необоротними, не-

рівноважними і проходять у певному напрямку – в бік досягнення більш стійкого рівноважного стану. Рівноважні стани імовірніші, тому всі природні процеси прямують до рівноваги.

Під час теплообміну теплота самочинно переходить від тіла з більшою температурою до тіла з меншою температурою, але зворотний процес самочинно відбуватися не може. Для його здійснення потрібно виконати деяку роботу. Крім того, перетворення теплоти в роботу і навпаки мають свої специфічні особливості. Робота просто і повністю перетворюється в теплоту (завдяки силам тертя), і процес цей є необоротним. Щоб здійснити його, достатньо в навколишньому середовищі мати приймач теплоти. Однак, зовсім по-іншому відбувається перетворення теплоти в роботу. Теплоту протягом тривалого часу неможливо безпосередньо перетворювати у роботу лише охолодженням системи. Для цього потрібно створити спеціальні умови. Перетворення теплоти в роботу в теплових машинах відбувається внаслідок передачі деякої кількості теплоти  $q_1$ , від гарячого джерела робочому тілу. Робоче тіло, розширюючись, виконує роботу. При цьому не вся теплота перетворюється в роботу. Для того, щоб повернути робоче тіло в початковий стан, нам потрібно від нього відвести деяку кількість теплоти  $q_2$  (рис. 4.2).

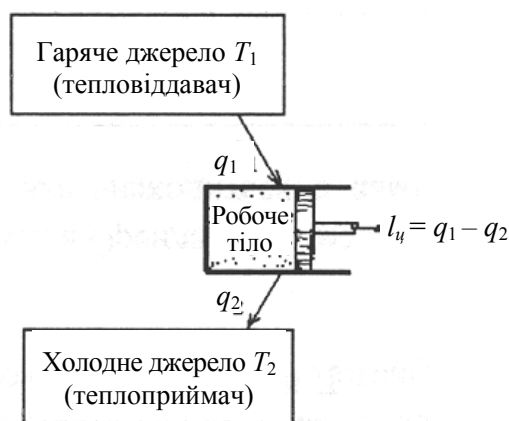


Рис. 4.2 – Перетворення теплоти у роботу в тепловій машині

Як узагальнення, можна сформулювати такі твердження:

**1. Самочинна передача енергії між двома системами у формі роботи відбувається при різних значеннях тиску і направлена від системи з більшим тиском до системи з меншим тиском.**

*2. Самочинна передача енергії між двома системами у формі теплоти відбувається при різних значеннях температури і направлена від системи з більшою температурою до системи з меншою температурою.*

*3. При незворотній передачі енергії у формі роботи частина її перетворюється у теплоту.*

*4. При незворотній передачі енергії у формі теплоти відбувається перетворення частини потенціально-можливої роботи у теплоту.*

*5. Оскільки у незворотних процесах частина роботи перетворюється у теплоту, зміна ентропії у таких процесах завжди більша, ніж у зворотних.*

На сьогодні існує значна кількість формулювань другого закону термодинаміки (більше 16-ти), які відображають різну ступінь узагальнення термодинамічних процесів, але найбільш відомими є формулювання таких вчених, як Саді Карно, Рудольфа Клаузіуса, Уільяма Томсона (Кельвін), Людвіга Больцмана, М. Смолуховського. Наведемо ці формулювання, які розташуємо у хронологічному порядку їх появи, відмітивши при цьому, що всі вони мають певний характер частковості.

*1. Для отримання від теплоти роботи, необхідно мати різницю температур.*

*1а. Ніякий двигун не може перетворити теплоту в роботу зі стопроцентним ефектом.*

*(Саді Карно, 1824 р.)*

*2. Теплота не може самочинно переходити від менш нагрітих тіл до більш нагрітих або некомпенсований перехід теплоти від тіла з меншою температурою до тіла з більшою температурою неможливий.*

*2а. Неможлива передача теплоти від холодного тіла до теплого.*

*(Рудольф Клаузіус, 1850 р.)*

*3. Теплоту будь-якого тіла неможливо перетворити в роботу, не виконуючи ніякої іншої дії, крім охолодження цього тіла.*

*(Уільям Томсон, лорд Кельвін, 1851 р.)*

*4. Неможливо створити вічний двигун (perpetuum mobile) другого роду.*

*(Уільям Освальд, 1888 р.)*

**5. Всі процеси у навколишньому світі протікають від менш імовірного стану до більш імовірного стану.**

**5а. У замкнутій системі ентропія не може зменшуватись.**

*(Людвіг Больцман, 1872 р.)*

Під вічним двигуном другого роду розуміють двигун, який міг би працювати з одним джерелом теплоти. Дійсно, якщо допустити, що двигун безперервної дії міг би працювати лише завдяки теплоті від охолодження тепловіддавача, то, використовуючи необмежені запаси теплоти в навколишньому середовищі (атмосфера, вода океанів), можна отримати практично необмежене джерело енергії, тобто вічний двигун.

Як показують розрахунки, енергії від охолодження води Світового океану лише на  $0,01\text{ }^{\circ}\text{C}$  достатньо на покриття потреб усіх країн Землі на 1700 років. Проте, згідно з другим законом термодинаміки, для використання теплоти необмежених джерел потрібно мати теплоприймач з температурою, нижчою, ніж температура навколишнього середовища.

Отже, виходячи з імовірності стану системи, другий закон термодинаміки можна сформулювати ще так: які б процеси не відбувалися у макроскопічній системі, вона не може самочинно переходити із більш імовірного у менш імовірний стан. Кінцевий стан завжди буде або більш імовірним (необоротні процеси), або, принаймні, залишиться таким самим (оборотні процеси). Таке формулювання другого закону є найбільш загальним.

#### **4.3. Цикли Карно:**

**прямий, зворотний, еквівалентний, їх к.к.д.  
Середньоінтегральна термодинамічна температура**

Як було раніш показано, теплова машина може працювати тільки здійснюючи колові процеси, тобто цикли. При цьому обов'язково має бути процес розширення, оскільки тільки у ньому робота додатна, а для того, щоб забезпечити безупинну роботу теплової машини, процес розширення повинен постійно повторюватись. Це можливо здійснити двома способами:

1) робоче тіло, здійснивши процес розширення, видаляється із машини і до неї вводиться нова порція робочого тіла в такій самій кількості і при тих самих параметрах, і процес повторюється;

2) робоче тіло, виконавши процес розширення, повертається у початковий стан, а потім знову повторює процес розширення.

Щоб одержати максимальну роботу, цикл має бути оборотним, тобто складатися лише з оборотних термодинамічних процесів, бо тільки в цьому випадку не відбувається втрат роботи і знецінення (деградації) теплоти. Кількість джерел теплоти може бути зменшена до двох, якщо теплоту підводити до робочого тіла і відводити від нього за ізотермічних умов. У цьому випадку джерела теплоти повинні мати нескінченно велику теплоємність, щоб з відведенням чи підведенням деякої кількості теплоти їх температура не змінювалась.

**1. Прямий цикл Карно.** Вперше його запропонував у 1824 р. Саді Карно. За наявності одного тепловіддавача і одного теплоприймача, відповідно при температурах  $T_1$  і  $T_2$ , що не змінюються з часом, цикл має наступний вигляд. Спочатку в ізотермічному процесі розширення  $1-2$  від об'єму  $v_1$  і тиску  $p_1$  до об'єму  $v_2$  і тиску  $p_2$  теплота  $q_1$  від тепловіддавача оборотно передається робочому тілу при температурі  $T_1$ . Газ при цьому виконує роботу, що визначається площею  $1-2-v_2-v_1-1$  (рис. 4.3, а).

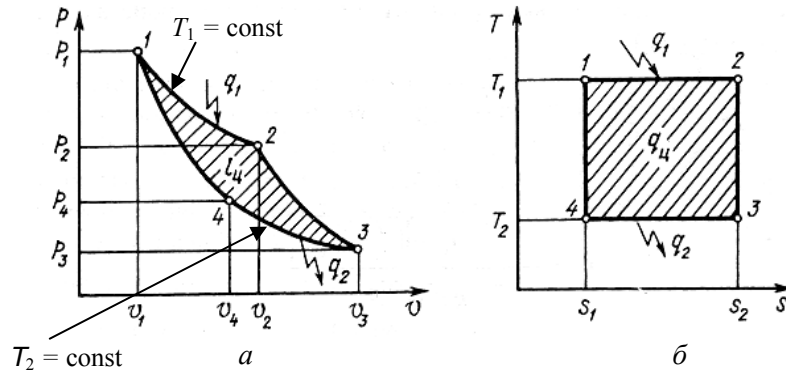


Рис. 4.3 – Цикл Карно у  $p-v$ - та  $T-s$ -координатах

Зміна температури робочого тіла від температури  $T_1$  до температури  $T_2$  відбувається під час його розширення від  $v_2$  до  $v_3$  в адіабатному процесі  $2-3$ . При цьому виконується робота, що еквівалентна площі  $2-3-v_3-v_2-2$ . Оскільки процес адіабатний ( $\delta_q = 0$ ), то робота виконується за рахунок зменшення внутрішньої енергії системи  $l_{2-3} = \Delta u_{2-3} = c_v(T_1 - T_2)$ .

Стиснення 3–4 відбувається в ізотермічному процесі при температурі теплоприймача  $T_2$  внаслідок відведення теплоти  $q_2$ . Робота стиснення визначається площею 3–4– $v_4$ – $v_3$ –3. Кінцеві параметри процесу  $p_4, v_4, T_4$  мають бути такими, щоб при подальшому стисненні в процесі 4–1 адіабата пройшла через початкову точку 1. Робота циклу дорівнює сумі робіт усіх процесів. Враховуючи знаки, сумарна робота циклу додатна і визначається площею фігури 1–2–3–4.

На тепловій діаграмі  $T$ – $s$  (рис. 4.3, б) цикл Карно зображується прямокутником 1–2–3–4. Підведення теплоти  $q_1$  в ізотермічному процесі відбувається при температурі  $T_1$ . Кількість підведеної теплоти відповідає площі 1–2– $s_2$ – $s_1$ –1, тобто  $q_1 = (s_2 - s_1)T_1$ . В адіабатному процесі 2–3 температура тіла знижується до температури теплоприймача  $T_2$ . Кількість теплоти, що віддає робоче тіло в ізотермічному процесі стиснення, еквівалентна площі 3–4– $s_1$ – $s_2$ –3 і визначається формулою  $q_2 = (s_1 - s_2)T_2 = -(s_2 - s_1)T_2$ .

Робота, що витрачається на адіабатне стиснення 4–1, збільшує внутрішню енергію робочого тіла і його температура підвищується до  $T_1$ .

Різниця  $q_1 - |q_2|$ , що перетворилася в роботу, відповідає площі прямокутника 1–2–3–4.

Термічний к.к.д. циклу Карно, як і будь-якого теплового циклу, можна визначити за формулою:

$$\eta_t = \frac{q_1 - |q_2|}{q_1}. \quad (4.8)$$

Підведена і відведена кількість теплоти в ізотермічних процесах буде рівна

$$q_1 = RT_1 \ln \frac{v_2}{v_1}; \quad q_2 = RT_2 \ln \frac{v_3}{v_4},$$

тоді

$$\eta_t = \frac{RT_1 \ln \frac{v_2}{v_1} - \left| RT_2 \ln \frac{v_3}{v_4} \right|}{RT_1 \ln \frac{v_2}{v_1}}. \quad (4.9)$$

Щоб цикл був замкнений, точки 1 та 4 мають розмішуватися на одній і тій самій адіабаті. Використовуючи рівняння

адіабати, можна записати  $T_1 v_1^{k-1} = T_2 v_4^{k-1}$ . Подібне рівняння запишемо для станів 2 та 3:  $T_1 v_2^{k-1} = T_2 v_3^{k-1}$ .

Поділивши останнє рівняння на передостаннє, отримаємо умову замкненості циклу:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{v_3}{v_4}. \quad (4.10)$$

Підставивши вираз (4.10) у рівняння (4.9), отримаємо:

$$\eta_t = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (4.11)$$

Як бачимо,  $\eta_t$  залежить тільки від абсолютних температур тепловіддавача і теплоприймача і не залежить від властивостей робочого тіла. Це положення дістало назву **теорему Карно**. Вираз дійсний для будь-якої теплової машини, що працює за оборотним циклом. Термічний коефіцієнт завжди менший від одиниці. Якщо  $T_2 = 0$  або  $T_1 = \infty$ , то  $\eta_t = 1$ , однак це неможливо здійснити, оскільки не існує джерел теплоти як з нескінченно високою температурою, так і з температурою, що дорівнює абсолютному нулю. Якщо  $T_1 = T_2$ , то  $\eta_t = 0$ .

К.к.д. циклу Карно має найбільше значення порівняно із значенням  $\eta_t$  будь-якого циклу, що здійснюється в цьому ж інтервалі температур  $T_1 \dots T_2$ . Для доведення цього зобразимо цикл Карно 1-2-3-4 і довільний цикл a-b-в-г, що здійснюється в тих же межах температур (рис. 4.4), та визначимо їх к.к.д.

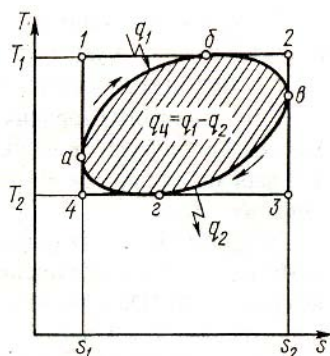


Рис. 4.4 – Схема доведення максимальної роботи циклу

Як відомо, для будь-якого циклу  $\eta_t = 1 - q_2/q_1$ . Із рисунка видно, що в циклі Карно  $q_1^k$  дорівнює площі  $1-2-s_2-s_1-1$  а  $q_2^k$  – площі  $4-3-s_2-s_1-4$ .

Для довільного циклу  $q_1^d$  відповідає площі  $a-b-e-s_2-s_1-a$ , а  $q_2^d$  – площі  $a-z-e-s_2-s_1-a$ . Оскільки  $q_1^k > q_1^d$ , а  $q_2^d > q_2^k$ , то  $\eta_t^k > \eta_t^d$ .

Отже, максимально можливе перетворення теплоти в роботу здійснюється в циклі Карно. Оскільки цикл Карно складається із ідеальних оборотних процесів, то він дістав назву **ідеального циклу Карно**. Незважаючи на це, він має велике практичне значення, оскільки порівняння к.к.д. реальних циклів і циклу Карно дає можливість зробити висновок про досконалість циклу.

Проаналізуємо, як впливають зміни температур  $T_1$  та  $T_2$  на к.к.д. циклу Карно. Для цього візьмемо похідні від виразу (4.11):

$$\left(\frac{\partial \eta_t}{\partial T_1}\right)_{T_2} = -\frac{T_2}{T_1^2}; \quad \left(\frac{\partial \eta_t}{\partial T_2}\right)_{T_1} = -\frac{1}{T_1} = -\frac{T_1}{T_1^2}. \quad (4.12)$$

Оскільки  $T_1 > T_2$ , то

$$\left(\frac{\partial \eta_t}{\partial T_1}\right)_{T_2} < \left(\frac{\partial \eta_t}{\partial T_2}\right)_{T_1}.$$

Це свідчить про те, що швидкість зміни термічного к.к.д. циклу Карно меншою мірою залежить від температури тепловіддавача  $T_1$ , ніж від температури теплоприймача  $T_2$ .

Ефективність перетворення теплоти в роботу залежить від відношення температур  $T_2/T_1$ . Чим більша  $T_1$  і менша  $T_2$ , тим вищий к.к.д. Нині максимальна температура  $t_1$ , що реалізується в теплових двигунах, може досягати 2000 °С. Температура  $t_2$  обумовлена температурою навколишнього середовища. Визначимо  $\eta_t$ , залежно від  $t_1$  за умови, що  $t_2 = 15$  °С (середньорічна розрахункова температура для України):

$t_1, \text{°C}$	200	400	600	800	1000	1300	1400	1600	1800
$\eta_t$	0,39	0,53	0,67	0,73	0,77	0,80	0,83	0,85	0,86

Для парових машин  $t_{1\max} = 650$  °С (температура, при якій можуть працювати лопатки парових турбін) і  $t_{2\min} = 30$  °С (температура пари в конденсаторі). Тоді  $\eta_t = 67,7$  %. Для двигунів внутрішнього згорання  $t_{1\max} = 2000$  °С і  $t_{2\min} = 300$  °С. Тоді  $\eta_t = 74$  %. Але

реальні двигуни не працюють за циклом Карно і їх к.к.д. значно нижчий. Для парових установок він не перевищує 40 %, а для двигунів внутрішнього згоряння – 42 %.

Як бачимо із розгляду циклу Карно, для максимального перетворення теплоти в роботу треба здійснити рівноважну передачу теплоти від тіла з температурою  $T_1$  до тіла з температурою  $T_2$ . Якби такий теплообмін здійснювався безпосередньо між тілами, то він обов'язково був би необоротним. Оборотний процес передачі теплоти можна здійснити лише за допомогою посередника (робочого тіла), що виконує роботу розширення.

Передача теплоти  $q_1$  робочому тілу від тепловіддавача з температурою  $T_1$  здійснюється в ізотермічному процесі. Тільки цей процес передачі теплоти є рівноважним (оборотним). Перехід системи з температурного рівня  $T_1$  на рівень  $T_2$  відбувається в адиабатному процесі. Передача теплоти  $q_2$  від робочого тіла до теплоприймача здійснюється теж в оборотному (ізотермічному) процесі при температурі  $T_2$ . При цьому кількість теплоти, що передається теплоприймачу, менша, ніж кількість теплоти, що віддає тепловіддавач, на величину виконаної роботи. Отже, лише наявність робочого тіла дає можливість оборотно здійснити передачу енергії між тілами з різною температурою. При цьому неможливо всю підведену до системи теплоту перетворити в роботу, як і оборотно безперервно перетворювати теплоту в роботу за наявності лише одного джерела енергії.

**2. Зворотний цикл Карно.** Як уже згадувалося, зворотні цикли застосовуються для передачі теплоти від холодного до гарячого тіла. На рис. 4.5 наведено схему зворотного циклу Карно (позначення точок залишається таким, як і в прямому циклі).

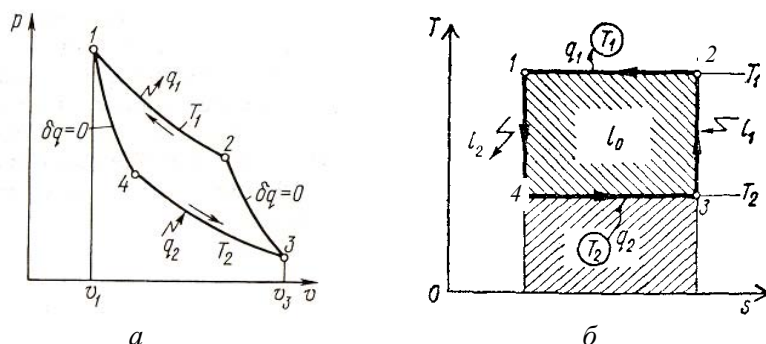


Рис. 4.5 – Зворотний цикл Карно

Робоче тіло із стану 1 розширюється за адіабатою 1–4. Робота розширення реалізується із-за зменшення внутрішньої енергії, і система охолоджується до температури  $T_2$ . Потім робота розширення  $l_{4-3}$  відбувається в ізотермічному процесі внаслідок підведення теплоти  $q_2$  від холодного джерела. Стиснення системи відбувається за адіабатою 3–2. Робота стиску йде на зростання внутрішньої енергії системи і температура її збільшується від  $T_2$  до  $T_1$ . Подальший стиск 2–1 відбувається в ізотермічних умовах внаслідок передачі теплоти  $q_1$  гарячому джерелу.

Робота розширення циклу дорівнює площі 1–4–3– $v_1$ – $v_3$ –1, а робота стиснення – площі 3–2–1– $v_1$ – $v_3$ –3. Як бачимо, робота стиснення більша, ніж робота розширення, тобто на здійснення циклу треба затратити зовнішню роботу, яка дорівнює різниці робіт розширення і стиснення:  $l_u =$  площі 1–4–3–2–1. Робота стиснення перетворюється в теплоту і разом з теплою  $q_2$  передається гарячому джерелу. Отже, можна стверджувати, що для передачі теплоти з нижчого температурного рівня на вищий треба затратити деяку роботу (компенсаційний процес). Як показано раніше, ефективність зворотного циклу характеризують за допомогою холодильного коефіцієнта  $\varepsilon$ , під яким розуміють відношення відведеної теплоти  $q_2$  до роботи циклу  $l_u$ , тобто він показує кількість теплоти, яка відбирається від холодного джерела при виконанні одиничної роботи:

$$\varepsilon = \frac{T_2(s_2 - s_1)}{T_1(s_2 - s_1) - T_2(s_2 - s_1)} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}. \quad (4.13)$$

Холодильний коефіцієнт не є к.к.д. холодильної машини, хоча і характеризує її ефективність. Його числове значення, залежно від співвідношення  $q_1$  і  $q_2$ , може бути як більшим, так і меншим за одиницю. Ефективність ідеального зворотного циклу Карно, як і прямого, залежить лише від абсолютних температур тепловіддавача і теплоприймача. При цьому найбільше значення  $\varepsilon$  буде в оборотному циклі Карно та за чим вищого значення  $T_2$ .

**3. Еквівалентний цикл Карно. Середньоінтегральна термодинамічна температура.** Як уже відмічалось, вимірювання температури за допомогою термометрів залежить від фізичних властивостей термометричних тіл, що використовують в цих термометрах, і це не дозволяє однозначно визначити температуру в проміжках між реперними точками.

Незалежність термічного к.к.д. циклу Карно від фізичних властивостей робочого тіла, яке здійснює цикл, дозволяє ввести нову шкалу температур, що вперше запропонував У. Томсон (Кельвін).

Для побудови цієї шкали використаємо вирази (4.4) і (4.11), звідки випливає, що

$$q_2 / q_1 = T_2 / T_1. \quad (4.14)$$

Як видно, у цьому виразі замість відношення температур можна використати відношення питомої теплоти. Якщо вважати, що величини  $q_1$  і  $q_2$  можуть бути попередньо виміряні, то для визначення абсолютної температури треба одній з температур ( $T_1$  чи  $T_2$ ) надати певного значення, тобто вибрати реперну точку. На IX Генеральній конференції з мір та ваг (1948 р.) було прийнято рішення температурі потрійної точки води приписати значення 273,16 К (точно). Тоді, здійснюючи цикл Карно, в якому теплоприймач має температуру  $T_2 = 273,16$  К, і знаючи відношення  $q_2/q_1$  (або відношення робіт  $l_2/l_1$  в ізотермічних процесах  $T_2$  і  $T_1$ ), можна визначити температуру  $T_1$ . Побудована на цій основі шкала дістала назву **термодинамічної температурної шкали** або **шкали Кельвіна**. Вибір значення температури в потрійній точці 273,16 К пов'язаний з бажанням зберегти стоградусну шкалу температур Цельсія.

Нижньою межею шкали Кельвіна є абсолютний нуль. Якщо здійснити цикл Карно в межах температур  $T_1$  та  $T_2 = 0$ , то  $q_2 = 0$ , тобто за таких умов уся підведена теплота перетворилась би в роботу ( $q_1 = l$ ) і к.к.д. такого циклу дорівнював би одиниці. Така температура приймається за абсолютний нуль.

Практична реалізація термодинамічної шкали викликає великі труднощі, тому була введена міжнародна практична шкала температур (МПШТ), яка є реалізацією термодинамічної шкали температур і будується на дванадцяти реперних точках, температура яких легко відтворюється в лабораторних умовах. Одна із цих точок задається самим визначенням градуса термодинамічної шкали (температура потрійної точки води 273,16 К). Інші точки встановлюються на основі температур фазових переходів різних речовин – від потрійної точки гелію до температури плавлення золота (1064,43 °С). На основі цих точок і будується міжнародна практична шкала температур.

Для порівняння ефективності циклів і характеристики процесів використовують кількість теплоти, що підводиться до системи. Якщо теплота підводиться в довільному рівноважному процесі, то

площа між кривою процесу і віссю  $s$  в координатах  $T-s$  дорівнює кількості теплоти. Дійсно, із визначення ентропії:

$$q_{1-2} = \int_{s_1}^{s_2} T ds, \text{ що дорівнює площі } 1-2-s_2-s_1. \quad (4.15)$$

Неізотермічні процеси теплообміну зручно описувати, як ізотермічні, за допомогою поняття середньоінтегральної термодинамічної температури, під якою розуміють таку умовно постійну температуру еквівалентного ізотермічного процесу  $\bar{T}_{1-2}$ , в якому кількість підведеної теплоти  $q_{1-2}$  і зміна ентропії  $\Delta s_{1-2}$  дорівнюють показникам реального процесу. Тоді:

$$\bar{T}_{1-2} = \frac{q_{1-2}}{\Delta s_{1-2}} = \frac{\int_{s_1}^{s_2} T ds}{s_2 - s_1}. \quad (4.16)$$

У  $T-s$ -координатах середньоінтегральна температура дорівнює висоті умовного прямокутника  $s_1-3-4-s_2$ , площа якого дорівнює площі  $1-2-s_2-s_1$  (рис. 4.6).

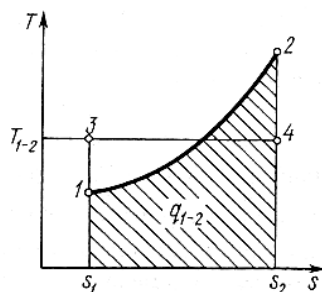


Рис. 4.6 – До визначення середньоінтегральної термодинамічної температури

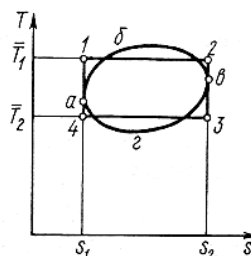


Рис. 4.7 – Еквівалентний цикл Карно

Користуючись поняттям середньоінтегральної температури, кількість теплоти умовного процесу визначають за виразом:

$$q_{1-2} = \bar{T}_{1-2} \Delta s_{1-2}. \quad (4.17)$$

Визначимо середньоінтегральну температуру для політропного процесу, теплоємність якого є постійною:

$$q_{1-2} = c_n(T_2 - T_1), \quad \Delta s_{1-2} = c_n \ln T_2 / T_1,$$

тоді:

$$\bar{T}_{1-2} = \frac{c_n(T_2 - T_1)}{c_n \ln T_2 / T_1} = (T_2 - T_1) / \ln(T_2 / T_1). \quad (4.18)$$

Отже, середньоінтегральна температура залежить не від характеру процесу, а лише від температури на початку та в кінці процесу.

Розглянемо довільний цикл  $a-b-e-a$  (див. рис. 4.7). Термічний к.к.д. такого циклу можна визначити за формулою  $\eta_t = 1 - |q_2| / q_1$ . Кількості підведеної і відведеної теплоти визначають за формулою (4.17):  $q_1 = \bar{T}_1 \Delta s_{a-e}$ ;  $q_2 = \bar{T}_2 \Delta s_{e-a}$ . Підставивши  $q_1$  та  $q_2$  у вираз для к.к.д., дістанемо

$$\eta_t = 1 - \bar{T}_2 / \bar{T}_1. \quad (4.19)$$

Отже, довільний цикл можна замінити циклом  $1-2-3-4$ , який складається з двох ізотерм ( $\bar{T}_2$  і  $\bar{T}_1$ ) і двох адіабат, проведених через найменше і найбільше значення ентропії в довільному циклі. Такий цикл дістав назву **еквівалентного циклу Карно**. Робота і к.к.д. еквівалентного циклу дорівнюють таким самим показникам у довільному циклі.

#### 4.4. Математичний вираз другого закону термодинаміки.

##### Зміна ентропії: термодинамічний і фізичний зміст

У техніці залежності завжди подають у кількісній формі, тобто у вигляді математичних співвідношень між фізичними величинами. Для першого закону це вдалося зробити завдяки введенню поняття внутрішньої енергії як параметра стану в поєднанні з характеристиками процесу – теплотою і роботою. У другому законі це завдання виконується за допомогою введеного Р. Клаузіусом параметра стану – ентропії.

##### 1. Математичний вираз другого закону термодинаміки.

Для виводу цього виразу використаємо вирази для к.к.д. теплових циклів. Як показано раніше, термічний к.к.д. будь-якого прямого циклу визначається за формулою  $\eta_t = 1 - q_2 / q_1$ . Для оборотного циклу Карно –  $\eta_t = 1 - T_2 / T_1$ .

Порівняємо ці вирази:  $1 - q_2/q_1 = 1 - T_2/T_1$ , або  $q_2/T_2 = q_1/T_1$ .

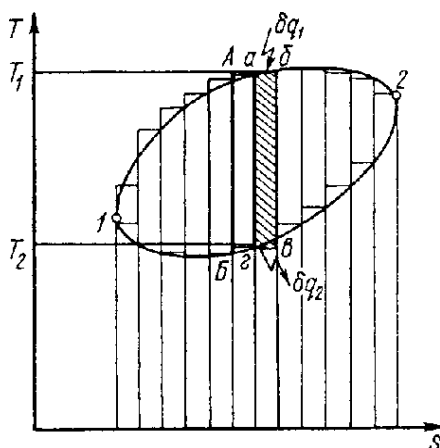
Враховуючи, що теплота  $q_2$  має від'ємний знак, останній вираз набуде вигляду:

$$\frac{q_1}{T_1} + \frac{q_2}{T_2} = 0. \quad (4.20)$$

Величину  $q/T$  називають *приведеною теплотою*. Отриманий результат можна сформулювати так: алгебраїчна сума зведеної теплоти для оборотного циклу Карно дорівнює нулю. Цей висновок є характеристикою оборотного циклу, не залежить від властивостей тіл, які здійснюють цей цикл, і буде справедливим для будь-якого довільного циклу.

Розглянемо деякий довільний оборотний цикл (рис. 4.8). Розіб'ємо його на  $n$  елементарних циклів. Для цього проведемо ряд адіабат. Оскільки адіабати лежать на нескінченно малій відстані одна від одної, то одержані цикли можна розглядати як елементарні цикли Карно  $a-b-c$ . Температуру на ділянці  $a-b$  (підведення теплоти) можна вважати постійною і рівною  $T_1$ , а на ділянці  $c-b$  (відведення теплоти) –  $T_2$ .

Для двох суміжних елементарних циклів Карно одна й та сама адіабата, наприклад  $A-B$ , є спільною, вздовж якої адіабатний процес проходить в одному циклі у напрямку від  $A$  до  $B$ , то відбувається процес розширення системи, а у суміжному – від  $B$  до  $A$ , відбувається стиснення системи.



**Рис. 4.8 – Довільний цикл у  $T$ - $s$ -координатах**

Внаслідок оборотності всі перетворення в адіабатних процесах повністю компенсуються і сума береться тільки по зовнішньому контуру основного циклу  $1-2-1$ . Тоді вираз (4.20) для елементарного циклу Карно запишеться так:

$$\frac{\delta q_1}{T_1} = \frac{\delta q_2}{T_2} = 0. \quad (4.21)$$

Враховуючи сукупність елементарних циклів Карно, вираз (4.21) для всього циклу:

$$\sum \frac{\delta q_1}{T_1} + \sum \frac{\delta q_2}{T_2} = 0. \quad (4.22)$$

Якщо кількість циклів нескінченно зростає, то суму у виразі (4.22) можна замінити інтегралами:

$$\int_1^2 \frac{\delta q_1}{T_1} + \int_2^1 \frac{\delta q_2}{T_2} = 0, \quad (4.23)$$

або для замкнутого контуру циклу, не враховуючи знаків підведеної і відведеної теплоти:

$$\oint \frac{\delta q}{T} = 0. \quad (4.24)$$

Вираз (4.24), виведений на основі другого закону термодинаміки, є його математичним виразом і має назву **інтеграла Клаузіуса**. Він є характеристикою будь-якого оборотного циклу, який здійснюється будь-яким робочим тілом.

Слід пам'ятати, що вираз під знаком інтеграла буде дорівнювати нулю в тому випадку, коли одні члени  $\delta q_2/T$  будуть додатні, а інші – від'ємні, тобто на одних ділянках циклу теплота буде підводитись ( $\delta q_1 > 0$ ), а на інших – відводиться ( $\delta q_2 < 0$ ). Цим підтверджується, що неможливо здійснити цикл за наявності тільки одного джерела енергії теплоти, який би тільки віддавав теплоту. Треба мати також джерело теплоти, якому необхідно віддавати частину теплоти.

**2. Зміна ентропії в довільних оборотних і необоротних процесах.** Підінтегральний вираз рівняння (4.24) за визначенням називається зміною ентропії системи:  $\delta q/T = ds$ .

Оскільки ентропія є функцією стану, то, інтегруючи цей вираз за будь-яким оборотним циклом, дістанемо:

$$\oint \frac{\delta q}{T} = \oint ds = 0. \quad (4.25)$$

Цей математичний вираз є другим законом термодинаміки для оборотних процесів, або принципом (законом) існування ентропії. Ентропія є тепловою координатою стану, а її зміна відбувається тільки внаслідок передачі (віддачі) теплоти системі.

Тепер розглянемо особливості нерівноважних процесів. Як уже зазначалося, нерівноважні процеси проходять у певному напрямку і передача енергії відбувається з більш високого рівня температури або тиску на нижчі. Так, механічна енергія передається тільки тоді, коли між системами існує різниця тисків, спрямована в бік системи з меншим тиском і ніколи навпаки. Подібно теплова енергія передається системі з меншою температурою. Ці процеси є нерівноважними.

Розглянемо зміну ентропії в необоротних процесах. Система здійснює цикл, який складається із необоротного 1–3–2 і оборотного 2–4–1 процесів (рис. 4.9).

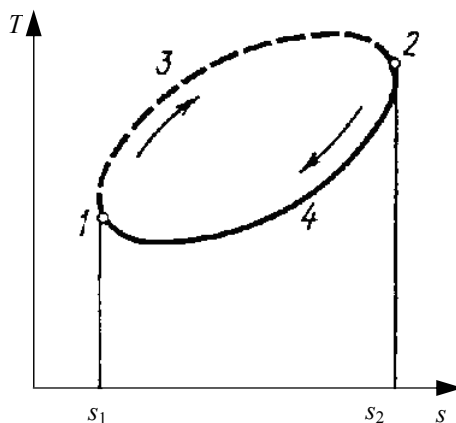


Рис. 4.9 – Зміна ентропії в необоротних процесах

Оскільки необоротний процес графічно зобразити неможливо, то умовно позначимо його штриховою лінією, тоді весь цикл буде необоротним.

У зв'язку з необоротністю процесу  $1-3-2$  додатна робота розширення буде менша, ніж в оборотному процесі, і вираз (4.24) запишеться так:

$$\int_{1-2-3} \frac{\delta q}{T} + \int_{2-4-1} \frac{\delta q}{T} < 0. \quad (4.26)$$

Оскільки другий інтеграл береться для оборотного процесу, то він дорівнює зміні ентропії процесу  $s_1-s_2$ . Тоді вираз (4.26) набуде вигляду

$$\int_{1-2-3} \frac{\delta q}{T} + (s_1 - s_2) < 0;$$

або

$$\int_{1-2-3} \frac{\delta q}{T} < s_2 - s_1. \quad (4.27)$$

Оскільки ентропія є функцією стану, то її зміна при переході системи із стану  $1$  у стан  $2$  не залежить від того, був процес оборотним чи необоротним ( $\Delta s_{1-3-2} = \Delta s_{1-4-2}$ ). Це свідчить про те, що підінтегральна функція  $\delta q/T$  в необоротних процесах не є параметром стану. Для елементарного процесу вираз (4.27) запишеться так:

$$ds > \frac{\delta q}{T}, \quad (4.28)$$

Ця нерівність є математичним виразом другого закону термодинаміки для нерівноважних процесів і має назву принципу (закону) зростання ентропії. Отже, другий закон термодинаміки об'єднує два факти – принцип існування ентропії ( $ds = 0$ ), що описує рівноважні процеси, і принцип зростання ентропії ( $ds > 0$ ), що описує нерівноважні процеси. Зростання ентропії з фізичного погляду пояснюється тим, що в необоротних (реальних) процесах частина роботи завдяки силам тертя обов'язково перетворюється в теплоту, тобто з'являється внутрішня теплота, яка і збільшує ентропію. Враховуючи оборотність і необоротність процесів, вираз (4.28) переписується так:

$$ds \geq \frac{\delta q}{T}, \quad (4.29)$$

а для будь-якого циклу рівняння (4.27) буде:

$$\oint ds \geq \oint \frac{\delta q}{T}. \quad (4.30)$$

Цей вираз є математичним записом другого закону термодинаміки для оборотних (знак рівняння) і необоротних (нерівність) колових процесів. Зауважимо, що у виразі (4.27) величина  $T$  є температурою тепловіддавача і теплоприймача, а не робочого тіла. Якщо теплота передається робочому тілу, то  $\delta q$  буде додатною, а коли відводиться – від'ємною.

Тепер розглянемо ізолювану систему, яка не перебуває в тепловій взаємодії з навколишнім середовищем ( $\delta q = 0$ ), тоді рівняння (4.29) перепишеться так:

$$ds \geq 0. \quad (4.31)$$

Отже, якщо в адіабатичній системі проходять оборотні (ідеальні) процеси, то ентропія не змінюється, залишається постійною величиною. Якщо в системі відбуваються необоротні реальні процеси, то ентропія системи завжди збільшується. Зменшуватися ентропія ізолюваної системи не може.

**3. Фізичний зміст ентропії.** Розглянемо процес механічної взаємодії системи з навколишнім середовищем. Хай відбувається процес адіабатного стиснення ідеального газу з одного й того ж початкового стану 1 (рис. 4.10) в оборотному 1–2 і необоротному 1–2' процесах. Газ стискається до одного й того ж питомого об'єму  $v_2$ . Вважаючи, що через деякий час система після необоротного процесу прийде в стан рівноваги, кінцевий стан системи 2' є цілком визначеним.

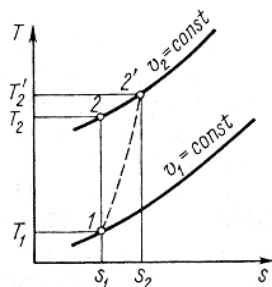


Рис. 4.10 – Оборотне і необоротне адіабатне стиснення ідеального газу

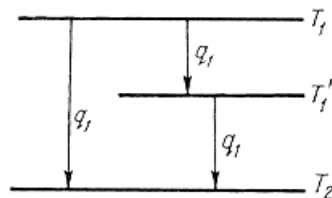


Рис. 4.11 – До визначення втрати працездатності системи

Внаслідок необоротного стиснення температура  $T_2' > T_2$ , і внутрішня енергія  $u_2' > u_2$ . Із першого закону термодинаміки робота стиснення оборотного процесу  $|l_{об}| = u_2 - u_1$ , а необоротного –  $|l_{необ}| = u_2' - u_1$ . В необоротному процесі  $l_{необ} > l_{об}$ , оскільки частина енергії витрачається на подолання тертя.

Для оборотного процесу  $1-2$  ентропія не змінюється ( $s_1 = s_2$ ), а в необоротному  $s_2 > s_1$  тобто ентропія зростає. Отже, хоча необоротний процес відбувається без теплообміну ( $\delta q = 0$ ), ентропія системи зростає. Це свідчить про те, що в необоротних процесах ентропія змінюється не тільки внаслідок підведення (відведення) теплоти, як і в оборотних процесах ( $ds = \delta q/T$ ), а й за рахунок теплоти тертя.

Збільшення ентропії адіабатної системи внаслідок механічної взаємодії ніяким механічним шляхом не можна привести до початкового стану. Повернення ентропії системи до початкового стану можливе лише за умови зняття ізоляції і відведенням деякої кількості теплоти. У цьому відношенні теплота і робота еквівалентні одне одному (перший закон термодинаміки). Однак вони і суттєво різняться. Так, тільки завдяки тепловіддачі можна зменшити ентропію, а збільшити її можна як за рахунок підведення теплоти, так і внаслідок будь-якого необоротного процесу, для якого завжди  $ds > \delta q/T$ .

Якщо систему, що не перебуває в стані рівноваги з навколишнім середовищем, ізолювати, то через деякий час під дією внутрішніх градієнтів переносу система самочинно прийде в стан рівноваги. Відбудеться згасання механічних коливань, вирівнювання температури, густини та ін.

Усі процеси, що приводять ізольовану систему в рівноважний стан, є нерівноважними і самочинно збільшують ентропію системи. Отже, перехід системи із нерівноважного, тобто нестійкого в термодинамічному понятті стану, в рівноважний супроводжується зростанням ентропії. В рівноважному стані система набуває найбільшого значення ентропії. Стан системи з максимальною ентропією є найстійкішим.

Тепер розглянемо, як впливають необоротні процеси на перетворення теплоти в роботу. Для прикладу визначимо втрату працездатності системи за наявності необоротної передачі теплоти при різних температурах. Для цього розглянемо два ідеальних цикли Карно, в яких робочим тілом передається однакова кількість теплоти  $q_1$  (див. рис 4.11). Перший цикл здійснюється в інтервалі тем-

ператур  $T_1 \dots T_2$ . У другому випадку теплота  $q_1$  спочатку передається проміжному джерелу, що має температуру  $T_1' < T_1$  а потім – робочому тілу машини. Температура теплоприймача в обох випадках однакова ( $T_2$ ).

Розглянемо зміну працездатності цієї системи. Оскільки в останньому випадку теплота передається при більш низькій температурі, то додатна робота розширення  $l'$  буде менша, ніж в циклі Карно  $l_\kappa$ .

Втрата працездатності системи із-за появи необоротного процесу передачі теплоти може бути розрахована таким виразом:

$$\begin{aligned} \Delta l &= l_\kappa - l' = q_1 \eta_\kappa - q_1 \eta' = q_1 \left( 1 - \frac{T_2}{T_1} \right) - q_1 \left( 1 - \frac{T_2}{T_1'} \right) = \\ &= q_1 \left( \frac{T_2}{T_1'} - \frac{T_2}{T_1} \right) = T_2 \left( \frac{q_1}{T_1'} - \frac{q_1}{T_1} \right) = T_2 \Delta s. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Це рівняння дістало назву *рівняння Гюї–Стодоли*. Зменшення працездатності системи пов'язане з наявністю необоротних процесів і дорівнює добутку зміни ентропії на температуру теплоприймача. Втрата працездатності пов'язана з втратами теплоти в навколишнє середовище.

Усі необоротні процеси відбуваються за умови розсіювання енергії, її знецінення, деградації, оскільки система переходить на більш низький енергетичний рівень.

Із цього випливає фізичний зміст ентропії як міри необоротності процесу. Збільшення ентропії закритої системи є кількісною мірою втрати працездатності системи при проходженні в ній необоротних процесів. Всі природні процеси необоротні, і вони проходять тільки в одному напрямку.

Оборотні процеси необхідно розглядати як граничний випадок необоротних процесів. У природі вони не трапляються. Оборотної процеси є найбільш енергетично досконалими, оскільки в роботу перетворюється найбільша частина запасу внутрішньої енергії.

**4. Розрахунок зміни ентропії в різних процесах.** Розглянемо деякі окремі випадки розрахунку зміни ентропії нагрівання при сталому об'ємі та сталому тиску.

При сталому об'ємі:

$$\Delta S_V = \int_{T_1}^{T_2} C_V \frac{dT}{T}. \quad (4.33)$$

При сталому тиску:

$$\Delta S_p = \int_{T_1}^{T_2} C_p \frac{dT}{T}. \quad (4.34)$$

У невеликому температурному інтервалі можна вважати теплоємність постійною. Тоді:

$$\Delta S = C_V \ln \frac{T_2}{T_1} \quad (4.35)$$

або

$$\Delta S = C_p \ln \frac{T_2}{T_1}. \quad (4.36)$$

**Ізотермічне розширення ідеального газу.** Як впливає з визначення калоричних параметрів для ідеального газу, внутрішня енергія якого залежить тільки від температури з використанням рівняння стану ідеального газу отримуємо:

$$\Delta S = R \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (4.37)$$

або

$$\Delta S = -R \ln \frac{p_2}{p_1} = R \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (4.38)$$

**Змішання двох ідеальних газів при сталих температурі і тиску.** Якщо змішувати  $M_1$  і  $M_2$  молів ідеальних газів, що займають об'єми  $V_1$  і  $V_2$ , загальна зміна ентропії дорівнює сумі змін ентропій кожного із газів унаслідок зміни об'ємів від початкового до загального ( $V_1 + V_2$ ):

$$\Delta S = M_1 R \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1} + M_2 R \ln \frac{V_1 + V_2}{V_2}. \quad (4.39)$$

**Фазові перетворення.** Фазові (агрегатні) перетворення (плавлення, випаровування, перехід з однієї модифікації в іншу тощо) відбуваються при сталих температурі і тиску. Теплота такого

переходу дорівнює зміні ентальпії при фазовому перетворенні  $\Delta H_{ф.л.}$ , тому:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \frac{\Delta H_{ф.л.}}{T_{ф.л.}}. \quad (4.40)$$

**Необоротні процеси.** Для необоротних процесів  $dS > \frac{\delta Q}{T}$ . У цьому випадку необхідно представити необоротний

процес у вигляді послідовності яких-небудь оборотних процесів, що переводять систему із вихідного стану 1 у кінцевий стан 2. Оскільки ентропія є функцією стану, то її зміна у необоротному процесі буде дорівнювати сумі ентропій в оборотних процесах.

Розглянемо, наприклад, зміну ентропії при затвердінні 1 моля переохолодженої рідини, що знаходиться при температурі  $T$ , більш низькій, ніж температура  $T_{пл.}$ :

рідина (Т)  $\rightarrow$  кристали (Т)  $\Delta S = ?$

Цей перехід можна замінити сукупністю таких процесів:

1. Оборотно нагрівання рідини до температури плавлення, для якого:

$$\Delta S_1 = C_{p,рід} \ln \frac{T_{пл.}}{T}. \quad (4.41)$$

2. Кристалізація рідини при температурі  $T_{пл.}$ , зміна ентропії

$$\Delta S_2 = \frac{\Delta H_{кр}}{T_{пл.}} = -\frac{\Delta H_{пл.}}{T_{пл.}}. \quad (4.42)$$

3. Оборотно охолодження твердої речовини до температури  $T$ , при якому зміна ентропії:

$$\Delta S_3 = C_{p,тв} \ln \frac{T}{T_{пл.}}. \quad (4.43)$$

Загальна зміна ентропії

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3. \quad (4.44)$$

Розглянуті співвідношення дають можливість розрахувати тільки зміни ентропії, але не дозволяють знайти її абсолютне значення. Ентропію можна обчислити на основі постулату Планка, згідно з яким ентропія ідеального кристала індивідуальної речо-

вини дорівнює нулю при абсолютному нулі температури:

$$S_0 = 0. \quad (4.45)$$

Цей постулат називають також третім законом термодинаміки у формулюванні Планка.

Для реального тіла можливі порушення кристалічної ґратки, із-за чого ентропія твердого тіла навіть при абсолютному нулі буде більшою нуля. Однак, ці відмінності незначні і з достатньою для практичних розрахунків точністю її можна вважати рівною нулю.

Постулат Планка використовується для розрахунку абсолютних ентропій хімічних сполук. Для цього необхідно знати теплоємність речовини, починаючи із можливо більш низьких температур, а також теплоти агрегатних перетворень. Зміна ентропії речовини при переході від нуля до деякої температури  $T$  дорівнює  $\Delta S = S_T - S_0$ , але оскільки  $S_0 = 0$ , то  $S_T = \Delta S$ , і задача розрахунку  $S$  зводиться до розрахунку змін ентропії, які можна визначити з рівнянь (4.33)–(4.40).

У довідкових таблицях термодинамічних властивостей речовин наводяться величини  $S_{298}^0$  – стандартні ентропії при 298 К і  $P = 1,013 \cdot 10^5$  Па. Для знаходження абсолютних ентропій в інших умовах необхідно для цих значень додати зміни, пов'язані з переходом із стандартного стану в новий.

### **5. Статистичний зміст другого закону термодинаміки.**

Другий закон термодинаміки для необоротних процесів в ізольованих системах дає тлумачення ентропії як міри необоротності процесів із макроскопічних позицій. З іншого боку, цей закон дає змогу зробити висновки про напрям проходження нерівноважних процесів, до яких належать процеси переносу (вирівнювання) – теплообмін, масообмін, дифузія тощо.

Закон зростання ентропії в ізольованій системі для випадку необоротних процесів відіграє надзвичайно важливу роль. Він забороняє процеси, пов'язані із зменшенням ентропії. Кінцевим результатом необоротних процесів переносу є рівноважний стан, для якого ентропія досягає максимального значення.

Але, як було показано в роботах Л. Больцмана, Дж. К. Максвелла, Дж. У. Гіббса, М. Смолуховського, другий закон термодинаміки не є абсолютним законом природи. Важливим є питання про межі застосування другого закону термодинаміки. При цьому, звичайно, говорять про верхню і нижню межі. Нижня межа зумовлена

тим, що цей закон є справедливим для макросистем і не може застосовуватись для мікросистем. Під мікросистемами розуміють системи, лінійні розміри яких є одного порядку з розмірами молекул (при цьому тепловий рух, що зумовлений великою кількістю частинок, втрачає сенс). Верхня межа закону зумовлена поняттям термодинамічної системи. Для галактичних і тим паче метагалактичних систем значення енергії взаємодії між макроскопічними системами стають приблизно однаковими із значеннями їх внутрішньої енергії і система перестає бути термодинамічною. Тому некритичне перенесення закономірностей переносу в макросистемах Землі на Всесвіт привело Р. Клаузіуса до хибних висновків про так звану “теплову смерть Всесвіту”. Клаузіус стверджував: “Всесвіт з часом прийде в стан термодинамічної рівноваги, що відповідатиме максимуму ентропії. При цьому температури в усіх місцях Всесвіту вирівнюються, зникнуть всі причини, що зумовлюють появу будь-яких макроскопічних процесів, і, отже, неможливим стане життя”.

Важливими у цьому напрямі були праці Л. Больцмана, який на основі законів статистичної фізики і теорії імовірностей дав тлумачення другого закону термодинаміки. Коротко розглянемо суть теорії Больцмана.

Як зазначалося раніше, всі природні процеси самочинно проходять від менш імовірних до більш імовірних станів. При цьому ентропія системи зростає. Отже, між ентропією системи  $S$  та термодинамічною імовірністю її макростану  $w$  існує функціональна залежність:

$$S = f(w). \quad (4.46)$$

Вигляд функції  $f(w)$  можна визначити, виходячи із адитивності ентропії та з того, що імовірність такого стану системи згідно з теоремою множення імовірностей дорівнює добуткові імовірностей відповідних станів частин системи, якщо їх можна вважати взаємозалежними.

Під термодинамічною імовірністю макростану  $w$  розуміють кількість мікростанів, за допомогою яких реалізується макростан системи, або іншими словами – величина  $w$  визначається кількістю мікророзподілів, якими здійснюється цей макростан. Наприклад, нехай макростан системи визначається двома параметрами –  $v$  та  $u$ . Внутрішня енергія системи дорівнює сумі енергій всіх частинок, що її утворюють. Енергія окремих частинок може бути різною, але сума має залишатись постійною. Отже, цей макростан системи

може бути реалізований багатьма різними мікростанами. Самочинний перехід макросистеми із одного стану в інший пов'язаний із збільшенням кількості мікростанів, за допомогою яких реалізується останній. Це свідчить про те, що необоротні процеси проходять за умови зростання ентропії і термодинамічної імовірності системи.

На відміну від математичної імовірності, що завжди менша за одиницю, термодинамічна імовірність виражається великими числами. Для прикладу знайдемо зв'язок між величинами  $S$  та  $w$ . Для цього розглянемо систему, що складається із двох частин: відповідно з ентропіями  $S_1$  та  $S_2$  і термодинамічними імовірностями  $w_1$  та  $w_2$ . Ентропія загальної системи буде  $S$ , а термодинамічна імовірність  $w$  і можна записати, що  $S_1 = f(w_1)$ ;  $S_2 = f(w_2)$ ;  $S = f(w)$ .

Ентропія всієї системи як адитивна величина  $S = S_1 + S_2$ , а термодинамічна імовірність  $w = w_1 \cdot w_2$ . Тоді:

$$S = f(w_1, w_2) = f(w_1) + f(w_2). \quad (4.47)$$

Після математичних перетворень вираз (4.47) набуває логарифмічний характер:

$$S = k \ln w, \quad (4.48)$$

де  $k = R_\mu/N$  – стала Больцмана.

Вираз (4.48) є рівнянням Больцмана і показує, що ентропія системи в певному стані пропорційна натуральному логарифму імовірності системи в цьому стані. Принцип Больцмана є одним із найважливіших формулювань другого закону термодинаміки, що характеризує його статистичний характер.

Одночасно принцип Больцмана глибше розкриває фізичний зміст ентропії як міри неупорядкованості системи, характеристики імовірності стану системи, як міри наближення ізольованої системи до рівноважного стану.

Статистичний характер другого закону термодинаміки свідчить, що в принципі в ізольованій системі можуть відбуватися процеси, які зумовлюють не зростання, а навпаки – зменшення ентропії. Але імовірність таких процесів у земних умовах є дуже малою.

Прикладом відхилень від другого закону термодинаміки є так звані флуктуації (випадкові відхилення спостережуваних фізичних величин від їх середніх значень) густини енергії та інших фізичних величин. Згідно з “флуктуаційною гіпотезою” Больцмана рівноважний стан системи є найбільш імовірним. У рівноважній макро-

системі Всесвіту можуть самочинно створюватися які завгодно великі флуктуації. Всяка флуктуація має зникати, але одночасно в інших місцях Всесвіту мають створюватися нові флуктуації. Отже, за Больцманом, одні світи мають гинути, а інші – виникати. Проти флуктуаційної гіпотези Л. Больцмана було висунуто низку заперечень. Одним із них є зникаюче мале значення імовірності великих флуктуацій.

Зауважимо, що ні концепція “теплової смерті” Р. Клаузіуса, ні “флуктуаційна гіпотеза” Больцмана не враховували специфіки Всесвіту як гравітаційної системи, в еволюції якої значну роль відіграють далекодіючі гравітаційні сили взаємодії.

Згідно із сучасними даними, метagalактика є системою, що розширюється. Galактики рухаються одна відносно одної. Отже, зважаючи на нестационарний характер Всесвіту, некоректно екстраполювати другий закон термодинаміки на астрофізичні системи.

Врахування гравітаційних сил притягання в теорії А. Ейнштейна приводить до висновку, згідно з яким для Всесвіту не існує стану максимальної ентропії. Базуючись на сучасних даних астрофізики, можна стверджувати, що Всесвіт є системою, що постійно оновлюється. Одні зірки зникають, інші – виникають. Астрофізик В. Амбарцумян у 1947 р. відкрив новий тип зоряних систем – групи молодих зірок (зоряні асоціації) віком декілька мільйонів років (Земля існує близько 5 млрд років). Тобто було показано, що процес утворення зірок у Всесвіті продовжується.

Отже, на основі викладеного можна стверджувати, що неможливо поширювати дію другого закону термодинаміки на Всесвіт, де діють інші закономірності, ніж у межах Землі.

#### 4.5. Третій закон термодинаміки

Третій закон термодинаміки був встановлений Вальтером Нернстом у 1906 р. (лауреат Нобелівської премії 1920 р.) на основі узагальнення експериментальних досліджень різних речовин при дуже низьких температурах. Він відомий як теплова теорема або принцип Нернста: *в будь-якому рівноважному ізотермічному процесі, проведеному за абсолютного нуля температури, зміна ентропії системи дорівнює нулю*, тобто  $T \rightarrow 0$  ізотермічний процес відбувається без зміни ентропії, а сама вона перестає бути функцією стану:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \left( \frac{\partial S}{\partial p} \right)_T = \lim_{T \rightarrow 0} \left( \frac{\partial S}{\partial v} \right)_T \rightarrow 0.$$

Принцип Нернста був розвинутий М. Планком у 1911 р., який припустив, що при температурі абсолютного нуля, ентропія всіх однорідних кристалічних (конденсованих) речовин у стані рівноваги перетворюється в нуль, тобто  $S_{T=0} = 0$ . Відповідно до цього ізотерма-ізоентропа в  $T$ - $s$ -координатах перетворюється в точку (початок координат). У результаті цього замкнений круговий процес, що складається наприклад, з двох ізотерм і двох адіабат (цикл Карно), у випадку тепловідведення при  $T \rightarrow 0$  зобразився би в  $T$ - $s$ -координатах відрізком прямої на осі  $T$ , тобто його площа дорівнює нулю. В зв'язку з цим, третій закон термодинаміки деколи формулюють як принцип неможливості вічного двигуна третього роду – двигуна, в якому міг би здійснюватися замкнений круговий процес з відведенням теплоти від робочого тіла при абсолютному нулі температури.

Важливі висновки, які випливають з третього закону термодинаміки:

1. При  $T \rightarrow 0$  всі речовини втрачають пружність і можливість до термічного розширення:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \left( \frac{1}{p} \cdot \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = 0; \quad \lim_{T \rightarrow 0} \left( \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial v}{\partial T} \right)_v = 0.$$

2. При  $T \rightarrow 0$  поведінка парамагнітних тіл відрізняється від закону Кюрі:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_{M_K} = 0.$$

3. Теплоємність за постійного тиску і постійного об'єму у будь-яких процесах при температурі, близькій до абсолютного нуля, прямує до нуля.

4. Із закону випливає твердження про неможливість досягнення абсолютного нуля температури, за якийсь наперед визначений час. Він, звичайно, не забороняє наближуватись до нього дуже близько.

#### Контрольні питання

1. Що називають коловим (або циклічним) термодинамічним процесом?
2. Що в термодинаміці розуміють під поняттям “робоче тіло”?
3. Який термодинамічний процес називають зворотним? Яка його практична цінність?
4. Що в термодинаміці розуміють під коефіцієнтом корисної дії?
5. Що таке холодильний коефіцієнт? Чи може він бути більшим за одиницю?
6. Сформулюйте другий закон термодинаміки. У чому полягає його основний зміст?
7. Що таке цикл Карно? Перерахуйте послідовність ізопроцесів, які складають цикл Карно.
8. Що розуміють під поняттям “зведена кількість теплоти”?
9. Як визначають ступінь досконалості прямих і зворотних циклів?
10. Як впливають зміни температур  $T_1$  і  $T_2$  на к.к.д. циклів?
11. Сформулюйте теорему Карно.
12. Що таке еквівалентний цикл Карно? З яких ізопроцесів він складається?
13. Чому дорівнює сума зведеної теплоти для циклу Карно?
14. Який математичний вираз називають інтегралом Клаузіуса?
15. Що таке середньоінтегральна температура?
16. Чи має другий закон термодинаміки абсолютний характер?
17. Виведіть формулу Больцмана для розрахунку ентропії системи.
18. Запишіть рівняння для розрахунку змін ентропії в оборотних процесах (при змінах температури, тиску, об’єму, фазових перетвореннях).
19. У якому із оборотних процесів – ізотермічному, адіабатному, ізобарному, ізохорному – ентропія не змінюється?
20. Як розрахувати зміни ентропії в необоротних процесах?
21. На основі якого положення можна розрахувати абсолютне значення ентропії?

#### Тестові завдання

1. Як зміниться термічний коефіцієнт корисної дії циклу Карно при зниженні температури теплоприймача?

- а) зменшиться; б) збільшиться; в) залишиться постійним.

2. Як зміниться холодильний коефіцієнт зворотного циклу Карно при підвищенні температури теплоприймача?

- а) зменшиться; б) збільшиться; в) залишиться постійним.

3. Вкажіть аналітичну форму запису другого закону термодинаміки для кругових оборотних процесів ідеальних газів:

- а)  $\oint \delta q/T > 0$ ; б)  $\oint \delta q/T = 0$ ; в)  $\oint \delta q/T < 0$ ; г)  $\oint ds > 0$ .

4. Теплова машина має к.к.д. 25%. Середня потужність перенесення теплоти в теплоприймач у процесі її роботи становить 3 кВт. Яку кількість теплоти отримує робоче тіло від тепловідавача за 10 с?

- а) 0,4 кДж; б) 20 кДж; в) 10 кДж; г) 40 кДж.

5. Вкажіть аналітичну форму запису другого закону термодинаміки для кругових необоротних процесів ідеальних газів:

- а)  $\oint \delta q/T = 0$ ; б)  $\oint \delta q/T > 0$ ; в)  $\oint \delta q/T < 0$ ; г)  $\oint ds < 0$ .

6. Вкажіть аналітичну форму запису другого закону термодинаміки для розімкнутих оборотних процесів ідеальних газів:

- а)  $\int_1^2 \delta q/T = \Delta s$ ; б)  $\int_1^2 \delta q/T > 0$ ; в)  $\int_1^2 \delta q/T < 0$ ; г)  $\Delta S \geq 0$ .

7. Вкажіть аналітичну форму запису другого закону термодинаміки для розімкнутих необоротних процесів ідеальних газів:

- а)  $\int_1^2 \frac{\delta q}{T} < \Delta s$ ; б)  $\int_1^2 \frac{\delta q}{T} = 0$ ; в)  $\int_1^2 \frac{\delta q}{T} \leq 0$ ; г)  $\int_1^2 \frac{\delta q}{T} > 0$ .

8. Вкажіть аналітичну форму запису другого закону термодинаміки для ізольованої термодинамічної системи, в якій відбуваються оборотні термодинамічні процеси:

- а)  $\Delta S = 0$ ; б)  $\Delta S < 0$ ; в)  $\Delta S > 0$ ; г)  $\Delta S > \int_1^2 \delta q/T$ .

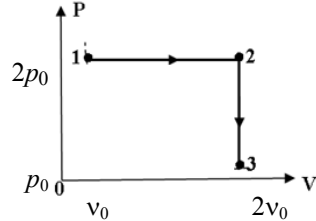
9. Вкажіть аналітичну форму запису другого закону термодинаміки для ізольованої термодинамічної системи, в якій відбуваються необоротні термодинамічні процеси:

- а)  $\Delta S = 0$ ;      б)  $\Delta S > 0$ ;      в)  $\Delta S > \int_1^2 \frac{\delta q}{T}$ ;      г)  $\Delta S < 0$ .

10. Яка кількість теплоти перетворюється в роботу в циклі Карно, якщо зміна ентропії на ділянці між двома адіабатами –  $\Delta s = 5$  кДж/к<sup>2</sup>, а різниця температури між двома ізотермами –  $\Delta T = 100$  К?

- а) 0,5 кДж;      б) 50 кДж;      в) 5 МДж;      г) 0,5 МДж.

11. Ідеальний газ переводять із стану 1 в стан 3 (див. рис.). Чому дорівнює робота, виконана газом?



- а)  $0,5p_0v_0$ ;      б)  $p_0v_0$ ;      в)  $2p_0v_0$ ;      г)  $4p_0v_0$ .

12. Деяка кількість ідеального газу з відомими параметрами розширяється до об'єму  $V$  один раз ізобарно, а другий – ізотермічно. Яке із наведених тверджень правильне?

- а) при ізотермічному розширенні виконана газом робота більша;  
 б) при ізобарному розширенні виконана газом робота більша;  
 в) газ виконує однакову роботу як при ізобарному, так і при ізотермічному розширенні;  
 г) газ виконує роботу тільки при ізобарному розширенні.

13. Теплова машина, працюючи за прямим циклом Карно, має к.к.д. 20%. Визначте відношення кількості теплоти, відведеної від тіла, до роботи двигуна, що приводить в рух машину, якщо вона буде виконувати зворотний цикл.

- а) 0,5;      б) 20;      в) 5;      г) 4.

14. Третій закон термодинаміки:

- а) вказує на прямування до нуля ентропії системи при зменшенні температури до 0 °С;  
 б) вказує на прямування до нуля ентальпії системи при зменшенні температури до 0 °С;  
 в) стверджує про прямування до нуля теплоємностей при зменшенні температури до 0 °С;  
 г) свідчить про рівність нулю ентропії будь-якого тіла при температурі, рівній 0 °С.

**15. Основний сенс другого закону термодинаміки – це те, що:**

- а) зміна внутрішньої енергії тіла показує можливість реалізації вічного двигуна другого роду;
- б) роботу не можна отримати за рахунок енергії тіл, які знаходяться у термодинамічній рівновазі;
- в) роботу отримують за рахунок енергії тіл, що знаходяться у термодинамічній рівновазі;
- г) робота представляє собою сукупність макрофізичних процесів передачі енергії.

## Частина 2

### Розділ 5

# ЗАГАЛЬНА ТЕОРІЯ ТЕПЛООБМІНУ. ПОШИРЕННЯ ТЕПЛОТИ ТЕПЛОПРОВІДНІСТЮ

---

- Предмет і основні задачі теорії.  
Види переносу теплоти, основні визначення
- Теплопровідність. Основні поняття та терміни
- Закон Фур'є. Коефіцієнт теплопровідності
- Механізм передачі теплоти в основних видах робочих тіл
- Диференціальне рівняння теплопровідності
- Умови однозначності

Будь-яке реальне (тобто необоротне) перетворення енергії пов'язано з її переходом в теплоту (повністю або частково).

Перший закон термодинаміки показує, яка частина теплоти витрачається на виконання роботи, а яка на зміну внутрішньої енергії системи. Таким чином, він визначає енергетичний баланс і відповідає на питання: “Яку кількість теплоти виділено (поглинуто) в процесі перетворення енергії?”

Другий закон термодинаміки стверджує, що в нерівномірно нагрітій системі теплота самочинно передається від більш нагрітої області до менш нагрітої, тобто він відповідає на питання: “В якому напрямі відбувається передача теплоти?”. Ці два закони мають важливе значення, але не можуть вирішити задачу, пов'язану з самочинним необоротним теплопереносом в просторі, де температура розподілена нерівномірно. Нагадаємо, що в термодинаміці ми свідомо не використовували реальний час, а процес передачі енергії вважали квазістатичним, тобто дуже повільним.

Теплопередача – складний фізичний процес. Його визначають форма і розміри термодинамічної системи, розподіл температури в ній та в навколишньому середовищі, теплофізичні властивості речовин тощо. Процеси теплопередачі відіграють виключно важливу роль у природі та техніці. Ці процеси за своєю природою дуже різноманітні, вирізняються великою складністю і, як правило, мають свій розвиток у вигляді цілого комплексу різноманітних явищ, від яких залежить як температурний режим навколишнього середовища, так і окремих складових термодинамічних систем.

### 5.1. Предмет і основні задачі теорії. Види переносу теплоти, основні визначення

**Теплопередача**, а точніше теорія тепло- і масообміну – це наука, яка вивчає процеси поширення теплоти (або маси, оскільки виявлена явна аналогія таких процесів) в просторі.

Основні поняття і закономірності були сформульовані в рамках загальнофізичної теорії на початку її розвитку. Так, наприклад, основи аналітичної теорії теплопровідності були закладені бароном Жан Батіст Жозефом Фур'є, префектом м. Осера, ще у 1807 р., за що він був удостоєний у 1811 р. премії Французької академії наук. До середини ХІХ ст. були сформульовані основи теорії подібності, а в 1915 р. вона була вперше використана Вільгельмом Нуссельтом для дослідження процесів теплообміну. Дещо раніше англієць Осборн Рейнольдс використав її при вивченні гідродинамічних процесів, озвучивши ідею про аналогію окремих теплових та гідродинамічних явищ.

Як самостійна наука вона виокремилась на початку ХХ ст. і особливо бурхливо розвивалась в 30–50-ті роки цього століття. При цьому необхідно відмітити досить вагомий внесок в її розвиток, який зробили вітчизняні вчені В.І. Кірпічов, М.О. Міхєєв, С.С. Кутателадзе, Г.Н. Кружилін, О.В. Ликов, О.А. Гухман, О.В. Нестеренко та інші.

Закономірності переносу теплоти в твердих, рідинних і газоподібних тілах і кількісні характеристики цього процесу є предметом теорії теплопередачі. З методичної точки зору розрізняють три основні (елементарні) способи переносу теплоти: **теплопровідність**, **конвекція**, **теплове випромінювання** (рис. 5.1). Різноманітні поєднання цих елементарних механізмів і створюють розмаїття конкретних процесів теплообміну, яке ми зустрічаємо на практиці.



Рис. 5.1 – Основні механізми перенесення теплоти

Процес передачі теплоти **теплопровідністю** відбувається між безпосередньо дотичними поверхнями або частинками тіл (атомами, молекулами, вільними електронами) з різною температурою і

представляє собою молекулярний процес передачі теплоти. Перенесення теплоти теплопровідністю залежить від фізичних властивостей тіла, його геометричних розмірів, а також від різниці температур між різними частинами тіла. При нагріванні тіла кінетична енергія його молекул зростає і частинки більш нагрітої області тіла, співударяючись із сусідніми молекулами, передають їм частину своєї кінетичної енергії.

**Конвекція** – це процес поширення тепла, здійснюваний рухом (при переміщенні) значних мас рідини, газу, сипучих тіл. У рідинах і газах процес перенесення теплоти конвекцією завжди супроводжується теплопровідністю, оскільки при цьому здійснюється і безпосередній контакт частинок з різною температурою. Одночасне перенесення теплоти конвекцією і теплопровідністю називається **конвективним теплообміном**. Він може бути вільним і вимушеним. Якщо рух робочого тіла здійснюється за рахунок різниці температур (різниці густин), то такий конвективний теплообмін називають вільним. Якщо рух робочого тіла викликаний штучно (вентилятор, змішувач), то теплообмін вимушений.

**Теплове випромінювання** – процес передачі тепла від одного тіла до іншого, через проміжне, прозоре для теплового випромінювання середовище з допомогою електромагнітних хвиль. Випромінювання, на відміну від теплопровідності і конвективного теплообміну не вимагає, щоб тіла дотикались або були розділені матеріальним середовищем, теплообмін випромінюванням відбувається і у вакуумі.

Конвективний теплообмін між твердою поверхнею і рідиною або газом називається **тепловіддачею**. Тепловіддача може супроводжуватись тепловим випромінюванням. У цьому випадку схема теплообміну здійснюється сукупністю процесів теплопровідності, конвекції і теплового випромінювання, що відбуваються одночасно.

Тепловіддача – явище складне. В тонкому шарі, який безпосередньо дотикається з поверхнею тіла, теплота передається теплопровідністю. В шарах, які достатньо віддалені від поверхні, відбувається конвективний теплообмін. Інтенсивність тепловіддачі залежить від багатьох факторів і в основному від властивостей і особливостей течії теплоносія.

Перенесення теплоти від одного рідкого або газоподібного середовища в інше, таке саме середовище, через розділяючу їх стінку чи перегородку називають **теплопередачею**. Зрозуміло, що

теплопередача – це ще більш складний процес. Він включає дві тепловіддачі (з обох сторін стінки) і теплопровідність через стінку.

Теплообмін в рідинних і газоподібних сумішах супроводжується переносом однієї речовини в іншу, тобто *масообміном*. Якщо теплообмін характеризується вирівнюванням температури, то масообмін виявляється в установленні рівноважної концентрації речовини. Сумісне, одночасне виконання процесів тепло- і масообміну називається *тепломасообміном*.

Теплообмін зумовлений спільним перенесенням теплоти, випромінюванням і теплопровідністю називають *складним теплообміном*. У цьому випадку складний процес теплообміну здійснюється сукупністю одночасно виконуваними процесами теплопровідності, конвекції і теплового випромінювання, хоча досить часто одним або навіть двома способами нехтують з урахуванням їх відносно невеликого вкладу в сумарне теплоперенесення.

## 5.2. Теплопровідність. Основні поняття та терміни

Теплопровідність визначається тепловим рухом мікрочастинок. У теорії теплопровідності не вивчається мікроскопічний механізм перенесення теплоти і тіло розглядається як суцільне. Процес передачі теплоти теплопровідністю в твердому тілі супроводжується зміною температури, як в просторі, так і в часі:

$$T = f(x, y, z, \tau), \quad (5.1)$$

де  $x, y, z$  – координати точки;  $\tau$  – час.

Розподіл температури у теплопровідному середовищі характеризує, так зване, *температурне поле*. М. Фарадей, який вперше запропонував цю назву, розумів, що поле температури не є еквівалентним гравітаційному полю чи електромагнітному. Мова іде про сукупність миттєвих значень температури в цей момент часу в усіх точках досліджуваного тіла чи середовища.

Якщо температура тіла є функцією координат і часу, то температурне поле буде нестационарним, тобто залежним від часу, а тепловий режим несталим. Це записується наступним виразом, яке називають *рівнянням поля температури*:

$$T = f(x, y, z, \tau), \quad \frac{\partial t}{\partial \tau} \neq 0. \quad (5.2)$$

Несталий режим може бути однозначним, якщо тіло весь час нагрівається або охолоджується, і коливальним, якщо періоди нагріву і охолодження тіла чергуються. Якщо температура тіла є функцією тільки координат і не змінюється в часі, то температурне поле тіла буде **стаціонарним**:

$$T = f(x, y, z), \quad \frac{\partial t}{\partial \tau} = 0. \quad (5.3)$$

Якщо температурне поле є функцією тільки двох координат, то воно називається **двомірним**, а якщо функцією тільки однієї координати – **одномірним**. Найбільш простий вигляд має рівняння одномірного стаціонарного температурного поля:

$$T = f(x); \quad \frac{\partial t}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0. \quad (5.4)$$

Якщо з'єднати всі точки тіла з однакою температурою, то одержимо поверхню рівних температур, яка називається **ізотермічною**. Оскільки в даній точці тіла в даний момент часу можливе тільки одне значення температури, то ізотермічні поверхні не перетинаються, вони або замикаються самі на себе, або закінчуються на межі тіла. Перетин ізотермічних поверхонь площиною дає на цій площині родину ізотерм (рис. 5.2).

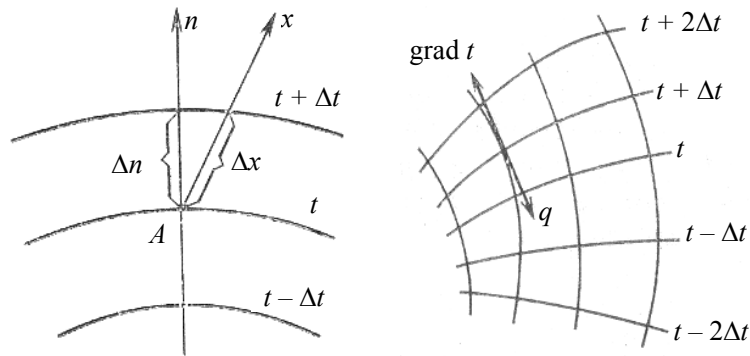


Рис. 5.2 – Розташування векторів градієнта температури та ліній теплового потоку

При переміщенні з будь-якої точки  $A$  інтенсивність зміни температури за різними напрямками неоднакова. Найбільшу температурну різницю на одиницю довжини будемо спостерігати в напрямі нормалі до ізотермічної поверхні.

Зростання температури в напрямку нормалі до ізотермічної поверхні характеризується **градієнтом температури** – вектором, направленим по нормалі до ізотермічної поверхні, у бік зростання температури і чисельно рівним похідній від температури по цьому напрямку, тобто

$$\text{grad}t = \vec{n}_0 \frac{\partial t}{\partial n}, \quad (5.5)$$

де  $\vec{n}_0$  – одиничний вектор, нормальний до ізотермічної поверхні і направлений у бік зростання температури;  $\partial t / \partial n$  – похідна від температури по нормалі  $n$ .

Значення градієнта температури  $\partial t / \partial n$  неоднакове для різних точок ізотермічної поверхні. Воно більше там, де відстань  $\Delta n$  між ізотермічними поверхнями менша. Скалярну величину градієнта температури  $\partial t / \partial n$  окремі автори називають **температурним градієнтом**.

Похідна  $\partial t / \partial n$  в напрямку зменшення температури від’ємна. Проекції вектора  $\text{grad}t$  на координатні осі  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  дорівнюють:

$$(\text{grad}t)_x = \frac{\partial t}{\partial n} \cos(n, \hat{x}) = \frac{\partial t}{\partial x}; \quad (5.6)$$

$$(\text{grad}t)_y = \frac{\partial t}{\partial n} \cos(n, \hat{y}) = \frac{\partial t}{\partial y}; \quad (5.7)$$

$$(\text{grad}t)_z = \frac{\partial t}{\partial n} \cos(n, \hat{z}) = \frac{\partial t}{\partial z}. \quad (5.8)$$

Одиниця виміру градієнта температури у системі СІ – град/м. З фізичної точки зору градієнт температури характеризує інтенсивність зміни температури.

Необхідною умовою поширення теплоти є нерівномірність розподілу температури в досліджуваному середовищі, тобто необхідна відмінність від нуля температурного градієнта в різних точ-

ках тіла.

Розглянемо кількісні характеристики процесу перенесення теплоти, до яких відносять наступні величини:

1) **густина теплового потоку** – кількість теплоти, яка передається в одиницю часу через одиницю площі поверхні. Ця величина вимірюється в  $\text{Вт}/\text{м}^2$  і позначається буквою  $q$ . Необхідно звернути увагу, що так само в термодинаміці назначають і другу величину – питому кількість теплоти, тобто віднесену до одиниці маси робочого тіла;

2) **тепловий потік** – кількість теплоти, яка передається в одиницю часу через довільну поверхню  $F$ , і яка в теорії теплообміну називається потужністю теплового потоку, позначається буквою  $Q_\tau$ . Одиницею його виміру є Дж/с, тобто Ватт (Вт);

3) **кількість теплоти** – загальний потік теплоти, який передається за довільний час  $\tau$  через довільну поверхню  $A$ . Позначається ця величина  $Q$ , одиницею виміру є джоуль (Дж).

Використовуючи ці позначення запишемо співвідношення між розглянутими величинами:

$$q = \frac{Q_\tau}{F} = \frac{Q}{\tau F}. \quad (5.9)$$

У загальному випадку тепловий потік  $Q_\tau$ , а відповідно кількість теплоти  $Q$  може змінюватись як за часом, так і за напрямками, але вираз (5.9) можна записувати тільки в диференціальній формі:

$$q = \frac{\partial Q_\tau}{\partial F} = \frac{\partial^2 Q}{\partial \tau \cdot \partial F}. \quad (5.10)$$

### 5.3. Закон Фур'є. Коефіцієнт теплопровідності

Для поширення теплоти в будь-якому тілі необхідна наявність різниці температур в різних точках тіла. Ця умова відноситься і до передачі теплоти теплопровідністю, при якій градієнт температури в різних точках тіла не повинен бути рівним нулю.

У 1804 році французький фізик Ж. Біо припустив, що кількість теплоти  $d^2Q$ , яка проходить через будь-яку ізотермічну поверхню у бік зменшення температури повинна бути пропорційна часу  $d\tau$ , площі поверхні  $dF$ , різниці температур  $\Delta T$  між двома

ізотермами і обернено пропорційна відстані між ними  $\Delta n$ :

$$d^2Q = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta n} dF d\tau. \quad (5.11)$$

У 1807 році Ж.-Б. Фур'є показав, що при  $\Delta n > 0$  це рівняння прийме наступний вигляд:

$$dQ = -\lambda dF \cdot d\tau \left( \frac{\partial t}{\partial n} \right). \quad (5.12)$$

Це співвідношення має назву **закон Фур'є** і встановлює зв'язок між кількістю теплоти  $dQ$ , що проходить через елементарну площадку  $dF$ , яка розташована на ізотермічній поверхні за проміжок часу  $d\tau$  і градієнтом температури.

Знак “-” (мінус) показує на те, що теплота передається в бік зменшення температури. Коефіцієнт пропорційності  $\lambda$ , який вирівнює розмірності лівої і правої частини у цьому виразі, носить назву **коефіцієнт теплопровідності** і є фізичним параметром, що характеризує здатність речовини проводити теплоту. Розмірність коефіцієнта теплопровідності визначається із співвідношенням

$$\lambda = \frac{|q|}{\left| \frac{\partial t}{\partial n} = 1 \right|} = \frac{|dQ|}{dF d\tau \left| \frac{\partial t}{\partial n} = 1 \right|}, \text{ Вт/м} \cdot \text{К}. \quad (5.13)$$

Як відмічалось раніше, кількість теплоти, що проходить за одиницю часу через одиницю площі ізотермічної поверхні, називається густиною теплового потоку і використовуючи гіпотезу Фур'є ми можемо записати:

$$\vec{q} = \frac{dQ}{dF \cdot d\tau} = -\vec{n}_0 \lambda \frac{\partial t}{\partial n}. \quad (5.14)$$

Вектор густини теплового потоку  $\vec{q}$  спрямований по нормалі до ізотермічної поверхні. Його позитивний напрямок збігається з напрямком зменшення температури, оскільки теплота завжди передається від більш нагрітого тіла до менш нагрітого. Вектори  $\vec{q}$  і  $\text{grad}t$  лежать на одній прямій, але спрямовані в протилежні напрями. Лінії, дотичні до яких збігаються з напрямком  $q$ , називають **лініями теплового потоку**. Вони ортогональні до ізотермічних поверхонь.

Скалярна величина вектора густини теплового потоку  $q$

буде дорівнювати:

$$q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n}. \quad (5.15)$$

Рівняння (5.15) є математичним записом основного закону теплопровідності, який формулюється наступним чином: **густина теплового потоку пропорційна градієнту температури.**

Використовуючи закономірність (5.12), можна повернутись до кількісних характеристик процесу перенесення теплоти і записати дещо інші вирази для їх визначення.

**Густина теплового потоку** як кількість теплоти, що проходить за одиницю часу через одиницю ізотермічної поверхні:

$$q = \frac{dQ}{dF d\tau} = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n}, \text{ Вт/м}^2. \quad (5.16)$$

Густина теплового потоку визначається не тільки величиною, але і напрямом:

$$\vec{q} = \vec{i}q_x + \vec{j}q_y + \vec{k}q_z, \quad (5.17)$$

де  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – одиничні вектори (орти) декартової системи координат;  $q_x, q_y, q_z$  – проекції вектора  $\vec{q}$  на осі  $x, y$  та  $z$ .

**Тепловий потік** як кількість теплоти, яка проходить в одиницю часу через поверхню  $F$ :

$$Q_\tau = \int_A q \cdot dF = -\int_A \lambda \frac{\partial t}{\partial n} dF, \text{ Вт}, \quad (5.18)$$

а також **повна кількість теплоти**, що пройде через цю поверхню за час  $\tau$ :

$$Q = -\int_0^\tau \int_A \lambda \frac{\partial t}{\partial n} \cdot dF d\tau, \text{ Дж}. \quad (5.19)$$

Таким чином, для визначення кількості теплоти, яка проходить через будь-яку довільну поверхню твердого тіла, необхідно знати температурне поле всередині досліджуваного тіла. Саме знаходження температурного поля і є основним завданням аналітичної теорії теплопровідності.

#### 5.4. Механізм передачі теплоти для основних видів робочих тіл

Фур'є вважав, що цей коефіцієнт постійний, але він у загальному випадку залежить від температури, тиску та природи речовини. Він чисельно дорівнює густині теплового потоку при градієнті температури, який дорівнює одиниці. Цей параметр не має такого глибокого змісту, як, наприклад, теплоємність, він лише встановлює зв'язок між модулем двох векторів  $\vec{q}$  та  $\text{grad}t$ . Досліди показують, що для багатьох матеріалів (рис. 5.3), з достатньою для практики точністю, залежність коефіцієнта теплопровідності від температури можна прийняти лінійною:

$$\lambda_t = \lambda_0 [1 + b(t - t_0)], \quad (5.20)$$

де  $\lambda_0$  – значення коефіцієнта теплопровідності при температурі  $t_0$ ;  $b$  – постійна, що визначається дослідним шляхом.

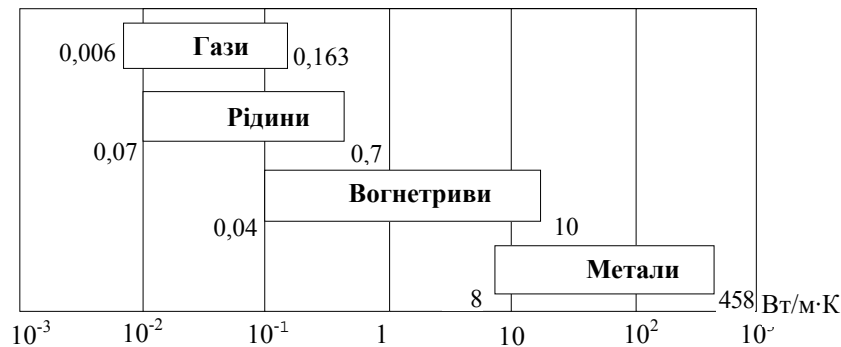


Рис. 5.3 – Інтервали значень коефіцієнта теплопровідності різних речовин

Переважно коефіцієнт теплопровідності для різних матеріалів визначається експериментальними методами і його числові значення наводяться у довідникових таблицях.

Розглянемо деякі особливості механізму передачі теплоти теплопровідності в основних видах робочих тіл.

**1. Теплопровідність газів.** Згідно з кінетичною теорією перенесення теплоти теплопровідністю в газах при звичайних тисках і температурах визначається перенесенням кінетичної енергії молекулярного руху в результаті хаотичного руху і зіткнення окремих

молекул газу. При цьому коефіцієнт теплопровідності визначається співвідношенням:

$$\lambda = \frac{\bar{w} \cdot l^* \cdot c_v \cdot \rho}{3}, \quad (5.21)$$

де  $\bar{w}$  – середня швидкість переміщення молекул газу, м/с;  
 $l^*$  – середня довжина вільного пробігу молекул газу між зіткненнями;  
 $c_v$  – масова теплоємність газу при постійному об'ємі, Дж/кг·К;  $\rho$  – густина газу, кг/м<sup>3</sup>.

Коефіцієнт теплопровідності газів суттєво не змінюється зі зміною тиску. Виключення складають дуже малі (< 2,66 кПа) і дуже великі (> 2 ГПа) тиски.

Середня швидкість переміщення молекул газу залежить від температури:

$$\bar{w} = \sqrt{\frac{3R_\mu T}{\mu}}, \quad (5.22)$$

де  $R_\mu$  – універсальна газова постійна,  $R_\mu = 8314,2$  Дж/кмоль·К;

$T$  – температура, К;  $\mu$  – молекулярна маса газу, кг/кмоль;

Теплоємність газів з підвищенням температури зростає, отже і коефіцієнт теплопровідності також зростає. Коефіцієнт теплопровідності  $\lambda$  газів при 0 °С змінюється в межах від 0,006 до 0,163 Вт/м·К. Найбільшу теплопровідність має найлегший газ – водень ( $\lambda = 0,172$  Вт/м·К при  $t = 20$  °С). У більш вагомих газах теплопровідність менше.

**2. Теплопровідність рідин.** Механізм поширення теплоти в краплинних рідинах можна прийняти як перенесення енергії неузгодженими пружними коливаннями.

Коефіцієнт теплопровідності рідин можна визначити за формулою:

$$\lambda_p = A \cdot c_p \sqrt[3]{\frac{\rho^4}{\mu}}, \quad (5.23)$$

де  $A$  – коефіцієнт, пропорційний швидкості поширення пружних хвиль в рідині, не залежить від природи рідини, але залежить від температури, при цьому  $A_p \cdot c_p = \text{const}$ ;  $c_p$  – масова

теплоємність рідини при постійному тискові, Дж/кг·К;  $\rho$  – густина рідини, кг/м<sup>3</sup>;  $\mu$  – молекулярна маса, кг/кмоль;

Через те, що густина рідини з підвищенням температури зменшується, то, з рівняння (5.23) для рідин з постійною молекулярною масою (неасоційовані і слабкоасоційовані рідини), з підвищенням температури коефіцієнт теплопровідності також повинен зменшуватись. Для асоційованих рідин (вода, гліцерин тощо) у формулу (5.23) треба ввести коефіцієнт асоціації, що враховує зміну молекулярної маси і залежить від температури.

Досліди підтверджують, що для більшості рідин з підвищенням температури коефіцієнт теплопровідності  $\lambda$  зменшується, виключення складають вода і гліцерин.

Коефіцієнт теплопровідності краплинних рідин змінюється в межах від 0,07 до 0,7 Вт/м·К. При підвищенні тиску коефіцієнти теплопровідності рідин зростають.

**3. Теплопровідність твердих тіл.** Коефіцієнт теплопровідності для металів знаходиться в межах від 20 до 458 Вт/м·К.

Найбільше значення коефіцієнта теплопровідності має срібло:  $\lambda = 458$  Вт/м·К.

У металах основним передавачем теплоти є вільні електрони. Передача теплоти з допомогою коливальних рухів атомів або в вигляді пружних звукових хвиль не виключається, але її частка незначна порівняно з перенесенням енергії електронним газом. Через те, що в металах носієм теплової енергії є електрони, то коефіцієнти тепло- і електропровідності пропорційні один одному.

При підвищенні температури в результаті посилення теплової неоднорідності розсіювання електронів збільшується. Останнє можна пояснити збільшенням структурної неоднорідності, яка призводить до розсіювання електронів, наприклад, для чистої міді  $\lambda = 396$  Вт/м·К, для цієї ж міді з слідами миш'яку  $\lambda = 142$  Вт/м·К. На відміну від чистих металів коефіцієнти теплопровідності сплавів при підвищенні температури збільшуються (табл. 5.1). Як правило, для матеріалів з великою густиною коефіцієнт теплопровідності має більше значення.

**Таблиця 5.1 – Зміна коефіцієнта теплопровідності металів і сплавів залежно від температури**

Речовина	Температура, °С			
	100	300	500	700
Алюміній (Al)	206	272	371	–

Бронза (95,5Cu; 3,2Si; 1,3Mn)	48	54	–	–
Дюралюміній	181	204	–	–
Латунь (58Cu; 40Zn; 2Mn)	78	97	115	–
Мідь (Cu)	385	371	359	–
Сталь вуглецева 15	54,4	46,0	37,7	–
Сталь хромнікелева (EИ283)	14,6	–	21,6	25,1

Багато будівельних і теплоізоляційних матеріалів мають пористий склад і застосування закону Фур'є до таких тіл є деякою мірою умовним.

Наявність пор в матеріалі не дозволяє розглядати такі тіла як суцільне середовище. Для пористих тіл вводиться поняття *ефективного коефіцієнта теплопровідності*. Ефективний коефіцієнт теплопровідності пористого тіла чисельно дорівнює коефіцієнту теплопровідності деякого однорідного тіла, через яке при однаковій формі, розмірах і температурах на межах проходить та ж кількість теплоти, як і крізь дане пористе тіло.

Ефективний коефіцієнт теплопровідності пористих матеріалів значною мірою залежить від їх вологості. Для вогкого матеріалу коефіцієнт теплопровідності значно більший, ніж для сухого, і води окремо. Наприклад, для сухої цегли  $\lambda = 0,35$  Вт/м·К, води –  $\lambda = 0,6$  Вт/м·К, а для вологої цегли  $\lambda = 1,0$  Вт/м·К.

Коефіцієнти теплопровідності будівельних і теплоізоляційних матеріалів мають значення, що знаходяться приблизно в межах від 0,023 до 2,9 Вт/м·К. Матеріали, які мають коефіцієнти теплопровідності менше 0,25 Вт/м·К, називаються *теплоізоляційними*.

### 5.5. Диференціальне рівняння теплопровідності

Для складних процесів, до яких відноситься передача теплоти теплопровідністю, при встановленні залежності між величинами, що характеризують це явище, використовують методи математичної фізики, які розглядають перебіг процесу не у всьому середовищі, а в елементарному об'ємі речовини протягом нескінченно малого відрізка часу. Зв'язок між величинами, що характеризують теплопровідність, встановлюється диференціальним рівнянням теплопровідності, при доведенні якого приймають наступні допущення:

1. Тіло однорідне та ізотропне.
2. Коефіцієнт теплопровідності, теплоємність і густина се-

редовища постійні.

3. Закономірність розподілу внутрішніх джерел теплоти відома –  $q_v = f(x, y, z, \tau)$ , де  $q_v$  – об’ємна густина внутрішніх джерел теплоти, Вт/м<sup>3</sup>.

4. Використаний перший закон термодинаміки збереження енергії, згідно з яким різниця між кількістю теплоти, яка входить в елементарний об’єм за час  $d\tau$  і виходить з нього за той же час плюс кількість теплоти, що виділяється внутрішніми джерелами теплоти, витрачається на зміну внутрішньої енергії або зміну ентальпії цього елементарного об’єму без виконання роботи.

Відповідно до цього закону вся теплота, що виділена внутрішніми джерелами  $dQ_{\text{вн}}$  і внесена зовні в елементарний об’єм шляхом теплопровідності  $dQ_T$  за час  $d\tau$ , йде на зміну внутрішньої енергії речовини  $dU$ :

$$dQ_{\text{вн}} + dQ_T = dU. \quad (5.24)$$

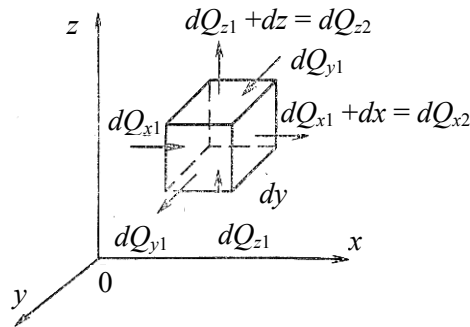


Рис. 5.4 – До доведення диференціального рівняння теплопровідності

Виділимо елементарний паралелепіпед з ребрами  $dx, dy, dz$  (рис. 5.4). Кількість теплоти, яка проходить шляхом теплопровідності у виділений об’єм за напрямом осі  $Ox$  через площадку  $dy \cdot dz$  за час  $d\tau$  дорівнює:

$$dQ_{x_1} = q_x dy \cdot dz \cdot d\tau = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} dx \cdot dz \cdot d\tau. \quad (5.25)$$

На протилежній грані паралелепіпеда температура отримає приріст  $\frac{\partial t}{\partial x} dx$  і буде становити  $t + \frac{\partial t}{\partial x} dx$ . Кількість відведеної через

цю грань теплоти дорівнює:

$$dQ_{x_2} = -\lambda \frac{\partial}{\partial x} \left( t + \frac{\partial t}{\partial x} dx \right) \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau. \quad (5.26)$$

Різниця між кількістю теплоти, яка підведена до паралелепіпеда і відведена від нього, представляє собою теплоту, внесену теплопровідністю за напрямом  $Ox$  і вона рівна:

$$dQ_x = dQ_{x_1} - dQ_{x_2} = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} dx \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau. \quad (5.27)$$

Аналогічно визначається теплота, яка вноситься за напрямом осей  $Oy$  та  $Oz$ .

$$dQ_y = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} dx \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau, \quad (5.28)$$

$$dQ_z = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} dx \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau. \quad (5.29)$$

Повна кількість теплоти, яка внесена в елементарний паралелепіпед шляхом теплопровідності становить:

$$dQ_T = dQ_x + dQ_y + dQ_z = \lambda \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) dx \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau. \quad (5.30)$$

Тут добуток  $dx \cdot dy \cdot dz$  – це об'єм елементарного паралелепіпеда,  $dV$ .

Кількість теплоти, яка виділилася в цьому об'ємі за рахунок внутрішніх джерел:

$$dQ_{\text{вн}} = q_v \cdot dV \cdot d\tau. \quad (5.31)$$

Приріст внутрішньої енергії можна виразити через масу паралелепіпеда  $\rho \cdot dV$ , теплоємність  $c$  і приріст температури  $\frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau$ .

$$dU = c \cdot \rho \cdot dV \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau} \cdot d\tau. \quad (5.32)$$

Якщо ми підставимо в рівняння (5.24) значення для  $dQ_T$ ,  $dQ_{\text{вн}}$  та  $dU$ , то після відповідних скорочень отримаємо:

$$c \cdot \rho \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau} = \lambda \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + q_v. \quad (5.33)$$

Сума часток других похідних  $\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$  будь-якої функції в математиці носить назву *оператора Лапласа* і позначається буквою  $\nabla^2$ .

Величина  $a_T = \frac{\lambda}{c \cdot \rho}$  носить назву *коефіцієнт температуро-провідності* і характеризує теплову інерційність середовища. Вперше цей термін використав Д. Максвелл.

Тоді рівняння прийме вигляд:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a_T \nabla^2 t + \frac{q_v}{c \cdot \rho}. \quad (5.34)$$

Воно має назву *диференціальне рівняння теплопровідності* або *рівняння Фур'є*.

Коефіцієнт температуропровідності  $a_T$  ( $\text{м}^2/\text{с}$ ) – фізичний параметр речовини. Із рівняння (5.34) випливає, що зміна температури в часі для будь-якої точки тіла пропорційна величині  $a_T$ . Для нестационарних теплових процесів вона характеризує швидкість зміни температури.

Можна розглянути умову, коли внутрішні джерела теплоти відсутні ( $q_v = 0$ ), тоді рівняння прийме вигляд:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a_T \nabla^2 t. \quad (5.35)$$

Це *рівняння Фур'є–Кірхгофа* для тримірного нестационарного температурного поля при відсутності внутрішніх джерел теплоти.

Диференціальне рівняння теплопровідності для стаціонарного тримірного температурного поля при наявності внутрішніх джерел теплоти називається *рівнянням Пуассона* і має вигляд:

$$\nabla^2 t + \frac{q_v}{\lambda} = 0. \quad (5.36)$$

Диференціальне рівняння теплопровідності для стаціонарного тримірного температурного поля при відсутності внутрішніх

джерел теплоти називається *рівнянням Лапласа*:

$$\nabla^2 t = 0. \quad (5.37)$$

Якщо коефіцієнт теплопровідності залежить від зміни температури, то диференціальне рівняння теплопровідності можна записати наступним чином:

$$\frac{1}{c \cdot \rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) \right] + \frac{q_v}{c \cdot \rho} = \frac{\partial t}{\partial \tau}. \quad (5.38)$$

Для анізотропних тіл диференціальне рівняння теплопровідності має вигляд:

$$\frac{1}{c \cdot \rho} \left[ \lambda_x \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right] + \frac{q_v}{c \cdot \rho} = \frac{\partial t}{\partial \tau}. \quad (5.39)$$

Диференціальне рівняння теплопровідності можна записати в різних системах координат. Зокрема, для областей з осьовою симетрією зручно використовувати сферичну чи циліндричну системи координат і тоді рівняння приймуть вигляд:

– циліндрична система ( $r$  – радіус-вектор,  $\varphi$  – полярний кут,  $z$  – апліката)

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a_T \left( \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{c \cdot \rho}; \quad (5.40)$$

– сферична система ( $r$  – радіус-вектор,  $\mu = \cos\theta$ ,  $\theta$  і  $\psi$  – відповідно полярна відстань і довгота)

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a_T \left( \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ (1-\mu^2) \frac{\partial t}{\partial \mu} \right] + \frac{1}{r^2(1-\mu^2)} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial \psi^2} \right) + \frac{q_v}{c \cdot \rho}. \quad (5.41)$$

### 5.6. Умови однозначності

Як будь-яке диференціальне рівняння, рівняння Фур'є має безмежну множину рішень. Щоб із цієї множини вибрати рішення конкретної задачі, потрібно при інтегруванні рівняння враховувати і використовувати для визначення постійних констант математичний опис особливостей саме цього конкретного випадку. Такий опис особливостей конкретної задачі називається *умовами однозначності* або (менш вдало) *крайовими умовами* (рис. 5.5).

При доведенні диференціального рівняння теплопровідності виділявся із тіла елементарно малий об'єм і при цьому зникає значна кількість інформації, яка досить важлива для розв'язку конкретної задачі. Саме умови однозначності повинні повернути ці втрати, містячи наступну інформацію:

– про форму і розміри тіла (*геометричні умови*);

– про фізичні властивості речовини, включно із значеннями теплофізичних коефіцієнтів  $\lambda$ ,  $c$ ,  $\rho$  та інших (*фізичні умови*). Якщо теплофізичні властивості задані числами, тобто в рамках конкретної задачі вони постійні, то говорять про *лінійну задачу теплопровідності*. Також додатково може бути заданий закон розподілу внутрішніх джерел теплоти;

– про розподіл температури в тілі в початковий момент часу, тобто необхідно знати вид температурного поля  $t_0 = f(x, y, z)$  при  $\tau = 0$  (*початкові умови*). Іноді використовують наближене співвідношення:

$$t_0 = f(x, y, z, 0) = \lim_{\tau \rightarrow 0} f(x, y, z, \tau).$$

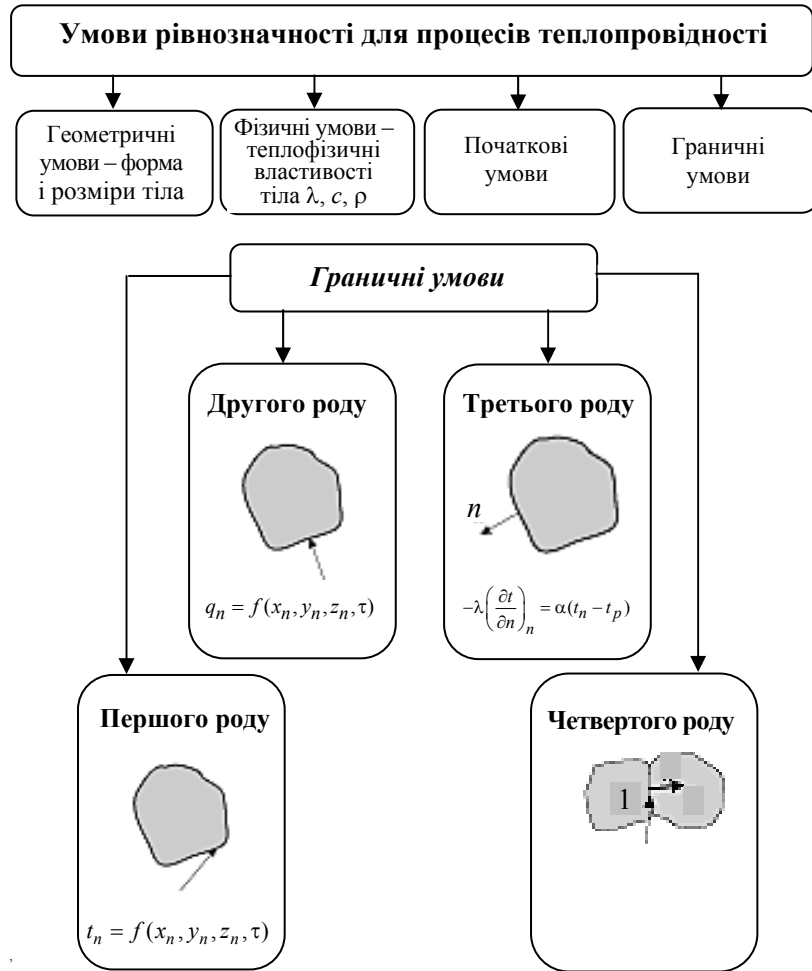


Рис. 5.5 – Умови однозначності для крайової задачі теплопровідності

У найпростішому випадку  $t_0 = \text{const}$  і задається чисельне значення цієї константи, тобто говорять про рівномірний розподіл температури. Якщо розглядають **стаціонарну задачу теплопровідності**, то початковий стан середовища якби “давно забутий” і початкові умови в конкретну задачу не входять;

– про умови теплообміну на межі між тілом і середовищем, тобто про умови на поверхні тіла (**граничні умови**).

Граничні умови можуть бути задані чотирма способами.

1. Граничні умови **першого роду** (умови Діріхле) – задається розподіл температури на поверхні тіла і її зміна в часі

$$t_n = f(x_n, y_n, z_n, \tau), \quad (5.42)$$

де  $t_n$  – температура на поверхні тіла,  $x_n, y_n, z_n$  – координати поверхні тіла.

2. Граничні умови **другого роду** (умови Неймана) – задається питомий тепловий потік в кожній точці поверхні тіла і його зміна в часі:

$$q_n = f(x_n, y_n, z_n, \tau). \quad (5.43)$$

В простішому випадку приймають, що  $q_n = \text{const}$ .

3. Граничні умови **третього роду** (умови Ньютона, хоча фактично вперше їх використав Фур'є) – задається температура середовища, що оточує тіло і закон тепловіддачі між поверхнею тіла та навколишнім середовищем. Умови Ньютона мають форму:

$$\alpha(t_n - t_p) = -\lambda \left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)_{n=0}. \quad (5.44)$$

Відмітимо, що при будь-якій формі поверхні весь тепловий потік, що віддається тепловіддачею, передається теплопровідністю через елементарний тонкий шар на поверхні тіла. Параметр  $\alpha$  – коефіцієнт тепловіддачі, чисельно дорівнює густині теплового потоку на граничній поверхні, віднесений до температурного перепаду між навколишнім середовищем і поверхнею. Його розмірність – Вт/м<sup>2</sup>·К. В задачах теплопровідності коефіцієнт тепловіддачі, як правило, вважають постійним і заданим.

4. Граничні умови **четвертого роду** (умови дотику) – відповідають випадку ідеального теплового контакту двох середовищ з теплопровідністю  $\lambda_1$  та  $\lambda_2$ . Математичний вираз їх наступний:

$$\lambda_1 \left( \frac{\partial t_1}{\partial n} \right) = \lambda_2 \left( \frac{\partial t_2}{\partial n} \right), \quad \text{і } t_1 = t_2. \quad (5.45)$$

Необхідно відмітити, що вирази (5.43)–(5.45) мають складовими добуток коефіцієнта теплопровідності та градієнта температури, а вираз (5.42) перетворюється у граничні умови третього роду при  $\alpha \rightarrow \infty$ . Таким чином, граничні умови другого роду є най-

більш загальними, всі інші форми можна вважати їх частковими випадками. Правильна постановка, розв'язок і аналіз задачі теплопровідності дає змогу відповісти на загальні питання, як при конструюванні, так і при експлуатації різних систем, наприклад:

- як довго буде нагріватися елемент конструкції до заданої температури і за який час зможе потім охолودитися;
- чи забезпечують прийняті конструкційні чи теплоізоляційні матеріали заданий (прийнятний) тепловий режим;
- чи можна зменшити матеріалоемкість і масу конструкції, не порушивши її тепловий режим;
- чи є резерви для збільшення потужності конструкції і як вона поведе себе в нештатному режимі.

Розв'язок диференціального рівняння з заданими крайовими умовами зазвичай доволі складний, набагато зручніше знайти готове рішення в довідниковій літературі. Таких розв'язків досить багато, тому використання літератури в інженерних розрахунках теплопровідності заслуговує на особливу увагу.

### Контрольні питання

1. Назвіть основні випадки теплообміну.
2. Що називається конвективним теплообміном?
3. Яка природа променевої енергії і передачі теплоти випромінюванням?
4. Що називають складним теплообміном?
5. В чому полягає зміст температурного поля? Напишіть рівняння тримірного стаціонарного температурного поля.
6. Який фізичний зміст градієнта температури? Одиниця виміру.
7. Наведіть формулювання закону Фур'є.
8. Що називають коефіцієнтом теплопровідності? Його розмірність.
9. Опишіть особливості теплопровідності різних речовин.
10. На якому законі базується вивід диференціального рівняння теплопровідності?
11. Що таке коефіцієнт температуропровідності? Його розмірність і фізичний зміст.
12. Що таке умови однозначності?
13. Чим відрізняються умови однозначності для стаціонарного та нестаціонарного режимів теплопровідності?

**Тестові завдання**

**1. Вкажіть правильний вираз двомірного нестационарного температурного поля:**

- а)  $t = f(x, y, \tau); \frac{\partial t}{\partial \tau} \neq 0;$       в)  $t = f(x, y, \tau); \frac{\partial t}{\partial \tau} = 0;$   
 б)  $t = f(x, y); \frac{\partial t}{\partial \tau} \neq 0;$       г)  $t = f(x, y); \frac{\partial t}{\partial \tau} = 0.$

**2. Явище теплопровідності представляє собою процес поширення енергії ...**

- а) при безпосередньому контакті окремих мікрочастинок тіла, які мають різну температуру;  
 б) за рахунок контакту мікрочастинок тіла, які мають різну середню швидкість руху;  
 в) при здійсненні дифузії вільних електронів з однаковою температурою в дефекти кристалічної решітки;  
 г) при відсутності контакту окремих мікрочастинок, але при наявності градієнту температури.

**3. Ізотермічні поверхні тіла...**

- а) не пересікаються між собою;  
 б) пересікаються на різних температурних рівнях;  
 в) обриваються всередині тіла;  
 г) не пересікаються між собою, але закінчуються на його поверхні.

**4. Градієнт температури – це теплофізичний параметр, який характеризує...**

- а) зміну температури у будь-якому напрямі;  
 б) максимальну зміну температури між сусідніми ізотермами;  
 в) інтенсивність зміни температури між двома контактуючими тілами;  
 г) її середній приріст в напрямку руху теплового потоку.

**5. Вкажіть правильний вираз для визначення вектора густини теплового потоку:**

- а)  $\vec{q} = -\vec{n}_0 \lambda \frac{\partial t}{\partial n};$       б)  $q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n};$       в)  $q = \frac{dQ}{dF};$       г)  $q = \lambda grad t.$

**6. Похідна  $\partial t / \partial n$  в напрямку зростання температури...**

- а) позитивна;      б) негативна;      в) від'ємна;      г) рівна нулю.

**7. Розмірність коефіцієнта температуропровідності:**

- а)  $m^2 \cdot c;$       б)  $m^2/c;$       в) град./с;      г) град./м.

**8. Вкажіть аналітичний вираз тримірного стаціонарного температурного поля:**

- а)  $t = f(x, y)$ ;  $\partial t / \partial \tau = 0$ ;      в)  $t = f(x, y, z, \tau)$ ;  $\partial t / \partial \tau \neq 0$ ;  
 б)  $t = f(x, y, z)$ ;  $\partial t / \partial \tau = 0$ ;      г)  $t = f(x, y, \tau)$ ;  $\partial t / \partial \tau \neq 0$ .

**9. Тепловий потік – це кількість теплоти, що передається ...**

- а) через одиницю площі поверхні за одиницю часу;  
 б) через площу поверхні за одиницю часу;  
 в) через площу поверхні за певний проміжок часу;  
 г) через одиницю об'єму тіла за одиницю часу.

**10. Вкажіть правильний вираз скалярної форми основного закону теплопровідності:**

- а)  $q = \lambda \partial t / \partial n$ ; б)  $q = -\lambda \partial t / \partial n$ ; в)  $q = -n_0 \lambda \partial t / \partial n$ ; г)  $q = -\lambda \text{grad} t$ .

**11. Фізичний зміст коефіцієнта теплопровідності – полягає в ...**

- а) здатності тіла проводити теплоту;  
 б) швидкості зміни температури в даному тілі;  
 в) здатності тіла акумулювати теплоту;  
 г) здатності тіла віддавати теплоту.

**12. Вкажіть диференціальне рівняння теплопровідності для нестационарного тримірного температурного поля при наявності внутрішніх джерел теплоти:**

- а)  $a_T \nabla^2 t + q_v / c_p = 0$ ;      в)  $\partial t / \partial \tau = a_T \nabla^2 t + q_v / c_p$ ;  
 б)  $\nabla^2 t = 0$ ;      г)  $\partial t / \partial \tau = a_T \nabla^2 t$ .

**13. Вкажіть диференціальне рівняння теплопровідності для стаціонарного двомірного температурного поля при відсутності внутрішніх джерел теплоти:**

- а)  $\partial^2 t / \partial x^2 + \partial^2 t / \partial y^2 = 0$ ;      в)  $\partial t / \partial \tau = a_T (\partial^2 t / \partial x^2 + \partial^2 t / \partial y^2) + q_v / c_p$ .  
 б)  $\partial t / \partial \tau = a_T (\partial^2 t / \partial x^2 + \partial^2 t / \partial y^2)$ ;      г)  $\partial t / \partial \tau = \partial^2 t / \partial x^2 + \partial^2 t / \partial y^2$ .

**14. Вкажіть диференціальне рівняння теплопровідності для стаціонарного одномірного температурного поля при наявності внутрішніх джерел теплоти:**

- а)  $\partial^2 t / \partial x^2 = 0$ ;      в)  $\partial t / \partial \tau = a_T (\partial^2 t / \partial x^2) + q_v / c_p$ ;  
 б)  $a_T \partial^2 t / \partial x^2 + q_v / c_p = 0$ ;      г)  $a_T (\partial^2 t / \partial x^2 + \partial^2 t / \partial y^2) + q_v / c_p$ .

## ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ І ТЕПЛОПЕРЕДАЧА ЧЕРЕЗ РІЗНІ ТІЛА

- Моделі тіл у задачах теплопровідності
- Стационарна теплопровідність при граничних умовах першого роду, часткові випадки
- Стационарна теплопередача при граничних умовах третього роду, часткові випадки

### 6.1. Моделі тіл у задачах теплопровідності

Елементи конструкцій зазвичай мають доволі складну форму, однак якщо прийняти певні допущення і спрощення, їх можна замінити на тіла так званої канонічної форми, для яких існують розв'язки крайової задачі теплопровідності. До таких тіл належать:

– **пластини** (необмежені плоскі стінки), у яких два габаритних розміри значно переважають над третім – товщиною (рис. 6.1, *a*);

– **циліндри** – габаритні розміри у двох напрямках близькі до діаметра, а в третьому – до довжини, при чому довжина значно більша діаметра (рис. 6.1, *б*);

– **сфери** (сферичні оболонки) – у яких у всіх напрямках розміри майже співпадають і близькі до найбільшого діаметра (рис. 6.1, *в*).

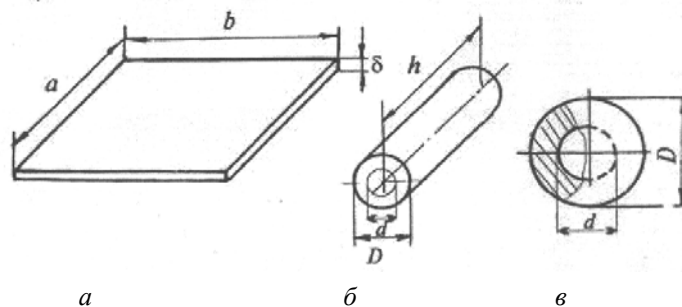


Рис. 6.1 – Тіла канонічної форми: *a* – пластина; *б* – циліндр; *в* – сфера

Якщо об'єм тіла  $V$  віднесений до загальної площі поверхні  $F$ , то величину  $R = V / F$  називають *узагальненим розміром тіла*.

Значення деяких узагальнених розмірів для окремих тіл подані у табличній формі.

Форма тіла	Пластина	Суцільний циліндр	Суцільна сфера
Узагальнений розмір	$\delta/2$	$D/4$	$D/6$

Так само оцінюють величину  $R$  будь-якого реального елемента конструкції або агрегату, після чого приймають рішення, до якої групи тіл його відносити. Нерідко вибір роблять інтуїтивно (і часом достатньо точно). У сумнівних випадках потрібен більш складний аналіз або експеримент.

Частина тіл є досить масивними (в прямому розумінні слова), причому тепловий потік підводиться до їхньої вільної поверхні, наприклад, великий масивний камінь, який нагрівається від сонячної енергії або сидіння автомобіля, що одержує теплоту від тіла водія тощо. Для такого способу нагріву на достатній глибині  $x \rightarrow \infty$  значення градієнта температури  $\left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{x \rightarrow \infty} = 0$ , а сама температура дорівнює початковій:  $t(x, \tau) = t_0$ .

У такому випадку говорять про теплопровідність *півобмеженого тіла*. Якщо вважати, що теплота в півобмеженому тілі передається тільки вздовж осі  $x$ , то отримаємо другу модель: *півобмежений стрижень*  $x > 0$ , у якого густина теплового потоку на бокових стінках  $q = 0$ .

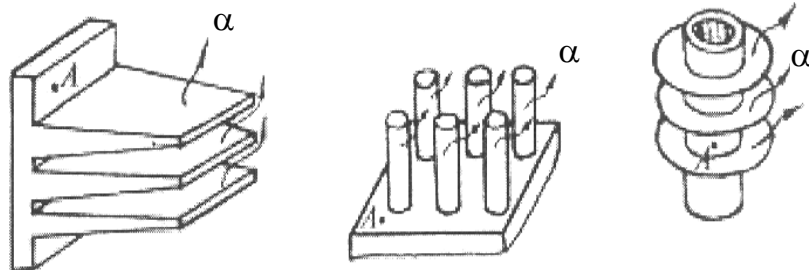


Рис. 6.2 – Варіанти збільшення поверхні теплопередачі

Зазвичай у всіх тілах канонічної форми вектор теплового потоку направлений вздовж одної із осей, що дозволяє використовувати одновимірне рівняння Фур'є. Нерідко поверхні виконують з ребрами (рис. 6.2), які беруть участь в теплообміні із середовищем при граничних умовах третього роду. Поверхня з ребрами дозволяє відвести від тіла значно більшу теплоту, ніж без ребер.

### 6.2. Стаціонарна теплопровідність при граничних умовах першого роду, часткові випадки

Рішення окремих часткових задач теплопровідності логічно починати із стаціонарних процесів і для тіл простої форми, оскільки такі тіла і режими частіше всього зустрічаються на практиці, а самі розв'язки, якщо використовувати незначні спрощуючі допущення, отримуються достатньо простими.

**1. Плоска однорідна стінка.** Розглянемо одношарову плоску стінку товщиною  $\delta$  (рис. 6.3). Температури поверхонь  $t_{c1}$  і  $t_{c2}$  підтримуються постійними, причому  $t_{c1} > t_{c2}$ . Коефіцієнт теплопровідності стінки тіла  $\lambda_c$  – також постійна величина. Температура змінюється тільки в напрямі, перпендикулярному площині стінки, який приймається за вісь  $x$ .

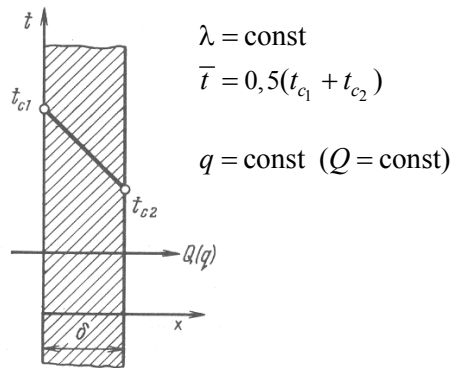


Рис. 6.3 – Одношарова плоска стінка

При стаціонарному режимі  $\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$  і тоді диференціальне

рівняння теплопровідності прийме вигляд:

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0. \quad (6.1)$$

Але для прийнятих умов:

$$\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0; \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0, \quad (6.3)$$

тому диференціальне рівняння теплопровідності можна записати у наступному вигляді:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = 0. \quad (6.4)$$

Граничні умови першого роду записуються таким чином: при  $x = 0$ ,  $t = t_{c_1} = \text{const}$ ; при  $x = \delta$ ,  $t = t_{c_2} = \text{const}$  і тоді ми мо-

жемо перейти до повної похідної  $\frac{d^2 t}{dx^2} = 0$ .

Задача (6.4) допускає пряме інтегрування, тоді  $\frac{dt}{dx} = C_1$ , а після другого інтегрування:

$$t = C_1 x + C_2. \quad (6.5)$$

Постійні  $C_1$  та  $C_2$  визначаємо з граничних умов: при  $x = 0$ ,  $t_{c_1} = C_2$ ; при  $x = \delta$ ,  $t_{c_2} = C_1 \delta + t_{c_1}$ , звідки

$$C_1 = \frac{t_{c_2} - t_{c_1}}{\delta}.$$

Підставляючи значення констант  $C_1$  та  $C_2$  у формулу (6.5), запишемо рівняння розподілу температури вздовж товщини стінки:

$$t = t_{c_1} + \frac{t_{c_2} - t_{c_1}}{\delta} x. \quad (6.6)$$

Раніш були відомі тільки температури  $t_{c_1}$  і  $t_{c_2}$ , а рівняння (6.6) дозволяє визначити температуру в будь-якому місці стінки і показує,

що за координатою  $x$  температура змінюється лінійно.

Для визначення густини теплового потоку, що проходить через стінку в напрямку осі  $x$ , скористаємося законом Фур'є, згідно з яким:

$$q = -\lambda \frac{dt}{dx} = -\lambda \frac{t_{c2} - t_{c1}}{\delta} = \lambda \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\delta}. \quad (6.7)$$

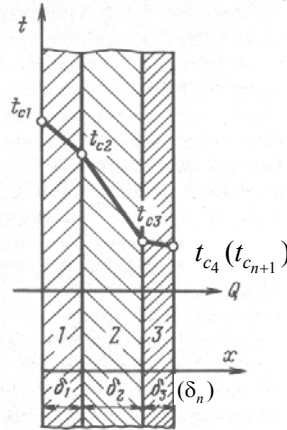
Загальна кількість теплоти, яка передається через поверхню  $F$  за час  $\tau$ :

$$Q = \frac{\lambda}{\delta} (t_{c1} - t_{c2}) \tau F. \quad (6.8)$$

Відношення  $\lambda/\delta$  називається **тепловою провідністю стінки** (розмірність – Вт/м<sup>2</sup>·К), а величина  $R_\lambda = \delta/\lambda$  – внутрішнім **термічним опором теплопровідності** одношарової плоскої стінки (розмірність – м<sup>2</sup>·К/Вт). Різниця температур  $(t_{c1} - t_{c2}) = \Delta t$  називається **температурним напором**.

Враховуючи залежність коефіцієнта теплопровідності від температури, необхідно підставляти в формулу (6.8) його середнє значення  $\lambda_{cp}$ , яке береться при середній температурі.

**2. Багатошарова плоска стінка.** У теплових апаратах досить часто зустрічаються стінки, які складаються із кількох плоских шарів різних матеріалів. Розглянемо процес теплопровідності через таку стінку, що складається з  $n$  однорідних шарів (рис. 6.4).



**Рис. 6.4 – Багатошарова плоска стінка**

Коефіцієнт теплопровідності кожного шару складає  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ , товщина шарів відповідно –  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n$ . На границі розподілу двох шарів виникає контактний термічний опір, який обумовлений нещільним контактом поверхонь. Цей опір в окремих випадках може бути досить значним. Приймаємо у нашому випадку, що він дорівнює нулю і температури на поверхнях дотику двох шарів однакові. При стаціонарному режимі кількість підведеної до стінки і відведеної від неї теплоти повинна бути однаковою.

Звідси впливає рівність теплових потоків, що проходять через кожний шар стінки. Запишемо густину теплового потоку для такого випадку:

$$\begin{aligned} q &= \frac{\lambda_1}{\delta_1}(t_{c_1} - t_{c_2}), \\ q_2 &= \frac{\lambda_2}{\delta_2}(t_{c_2} - t_{c_3}), \\ &\dots, \\ q_n &= \frac{\lambda_n}{\delta_n}(t_{c_n} - t_{c_{n+1}}). \end{aligned} \quad (6.9)$$

З цих рівнянь визначимо температурні напори:

$$\begin{aligned} t_{c_1} - t_{c_2} &= q \frac{\delta_1}{\lambda_1}, \\ t_{c_2} - t_{c_3} &= q \frac{\delta_2}{\lambda_2}, \\ &\dots, \\ t_{c_n} - t_{c_{(n+1)}} &= q \frac{\delta_n}{\lambda_n}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Підсумовуючи праві та ліві частини, знаходимо:

$$t_{c_1} - t_{c_{(n+1)}} = q \left( \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{\delta_n}{\lambda_n} \right). \quad (6.11)$$

Звідси густина теплового потоку:

$$q = \frac{t_{c_1} - t_{c_{(n+1)}}}{\left( \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{\delta_n}{\lambda_n} \right)} = \frac{t_{c_1} - t_{c_{(n+1)}}}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}}, \quad (6.12)$$

де  $i$  – номер шару, а  $\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}$  – термічний опір багатшарової стінки.

Графічно розподіл температур по перерізу багатшарової стінки зображається ламаною лінією, температури на межі контакту шарів можна знайти з допомогою рівняння:

$$t_{c_{(n+1)}} = t_{c_1} - q \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}. \quad (6.13)$$

Розподіл температур в межах кожного шару лінійний, однак у різних шарах крутизна температурної залежності різна, оскільки  $\text{tg } \gamma_i = -q / \lambda_i$ . Густина теплового потоку, який проходить крізь всі шари в стаціонарному режимі однакова, а їх коефіцієнт теплопровідності різний, отже температура більш різко змінюється в шарах з меншою теплопровідністю.

Для порівняння теплопровідності багатшарової стінки і стінки з однорідного матеріалу вводиться поняття **еквівалентного коефіцієнта теплопровідності**  $\lambda_e$  багатшарової стінки. Він дорівнює коефіцієнту теплопровідності однорідної стінки, товщина якої  $\Delta$ , що відповідає товщині багатшарової стінки  $\sum \delta_i$ , з однаковими температурами поверхні і яка пропускає такий самий тепловий потік. Таким чином:

$$\lambda_e = \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}} = \frac{\Delta}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}}. \quad (6.14)$$

З цього рівняння видно, що еквівалентний коефіцієнт теплопровідності залежить не тільки від теплофізичних властивостей шарів, але й від їх товщини.

**3. Однорідна циліндрична стінка.** Розглянемо стаціонарний процес теплопровідності в однорідній циліндричній стінці з внутрішнім діаметром  $d_1 = 2r_1$  і зовнішнім –  $d_2 = 2r_2$  (рис. 6.5).

Довжина циліндра значно більше зовнішнього діаметра  $l > d_2$ . На поверхнях стінки задані постійні температури  $t_{c1}$  та  $t_{c2}$ . Коефіцієнт теплопровідності матеріалу стінки  $\lambda_c$  є постійним. Внутрішні джерела теплоти відсутні. Оскільки режим стаціонарний, то поверхнева густина теплового потоку постійна по всій поверхні циліндра і перпендикулярна його осі. Поверхні циліндра паралельні та ідеально гладкі.

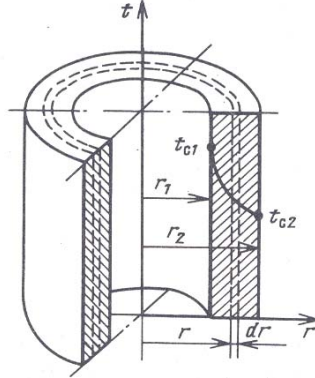


Рис. 6.5 – Теплопровідність циліндричної стінки

Необхідно знайти: розподіл температур в стінці; тепловий потік через стінку.

Для розв'язання поставленої задачі використовуємо диференціальне рівняння теплопровідності у формі рівняння Лапласа.

У циліндричній системі координат це рівняння має вигляд:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{\partial t}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} + \frac{\partial^2 t}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0. \quad (6.15)$$

Вісь ординат  $Oz$  співпадає з віссю труби. При заданих умовах температура змінюється тільки в радіальному напрямку і температурне поле буде одномірним, тому:

$$\frac{\partial t}{\partial z} = 0, \text{ тоді } \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0.$$

Крім того, оскільки температури на зовнішній і внутрішній поверхнях труби незмінні, ізотермічні поверхні є циліндричними і мають з трубою загальну вісь. Тоді температура не повинна

змінюватись також уздовж кута  $\varphi$ , тобто:

$$\frac{\partial t}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{і} \quad \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} = 0.$$

З врахуванням цього диференціальне рівняння набуде вигляду:

$$\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{dt}{dr \cdot r} = 0. \quad (6.16)$$

Граничні умови першого роду: при  $r = r_1$ ,  $t = t_{c1}$ ; при  $r = r_2$ ,  $t = t_{c2}$ . Розв'язавши диференціальне рівняння разом з граничними умовами, одержимо рівняння температурного поля в циліндричній стінці.

Введемо нову змінну:

$$u = \frac{dt}{dr}, \quad (6.17)$$

тоді

$$\frac{d^2 t}{dr^2} = \frac{du}{dr}; \quad \frac{1}{r} \frac{dt}{dr} = \frac{u}{r} \quad (6.18)$$

Підставивши (6.17) і (6.18) в рівняння (6.16), отримаємо:

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = 0. \quad (6.19)$$

Після інтегрування рівняння (6.19) отримаємо:

$$\ln u + \ln r = \ln C_1. \quad (6.20)$$

Після потенціювання виразу (6.20) і переходу до початкових змінних отримаємо:

$$dt = C_1 \frac{dr}{r}. \quad (6.21)$$

Після інтегрування отримаємо:

$$t = C_1 \ln r + C_2. \quad (6.22)$$

Постійні  $C_1$  і  $C_2$  можна визначити, якщо в рівняння (6.22) підставити граничні умови:

$$\text{при } r = r_1 \quad t = t_{c1}, \quad \text{звідси } t_{c1} = C_1 \ln r_1 + C_2 \quad (6.23)$$

$$\text{при } r = r_2 \quad t = t_{c2}, \quad \text{звідси } t_{c2} = C_1 \ln r_2 + C_2 \quad (6.24)$$

Розв'язавши рівняння (6.23) і (6.24) щодо  $C_1$  і  $C_2$  отримаємо:

$$C_1 = \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}}; \quad C_2 = t_{c1} - (t_{c1} - t_{c2}) \frac{\ln r_1}{\ln \frac{r_1}{r_2}}$$

Підставивши значення  $C_1$  і  $C_2$  в рівняння (6.22), отримаємо:

$$t = t_{c1} - \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{r}{r_1} \quad \text{або}$$

$$t = t_{c1} - \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\ln \left( \frac{d_2}{d_1} \right)} \cdot \ln \frac{d}{d_1}. \quad (6.25)$$

Як бачимо, характер розподілу температури по радіусу стінки відповідає спадній логарифмічній залежності. Біля внутрішньої поверхні, де її кривизна більша, температура змінюється стрімкіше, ніж біля зовнішньої. Для знаходження теплового потоку, що проходить через ізотермічну поверхню  $F$ , можна використати закон Фур'є:

$$Q_\tau = -\lambda \frac{dt}{dr} F = -\lambda 2\pi r l \frac{dt}{dr}, \quad (6.26)$$

але оскільки  $\frac{dt}{dr} = \frac{C_1}{r}$ , то постійна першого інтегрування прийме значення:

$$C_1 = (t_{c1} - t_{c2}) / \ln \frac{r_1}{r_2}.$$

Тоді отримаємо

$$Q_\tau = -\lambda 2\pi r l \frac{t_{c1} - t_{c2}}{r \ln \frac{r_1}{r_2}} = \frac{2\pi \lambda l (t_{c1} - t_{c2})}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\frac{1}{2\pi l \lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}}. \quad (6.27)$$

Знаменник виразу (6.27) має назву **термічний опір циліндричної стінки**:

$$R_y = \frac{1}{2\pi l \lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}. \quad (6.28)$$

При виконанні теплових розрахунків циліндричних стінок

часто використовують *лінійну густину теплового потоку*, як потоку віднесеного до одиниці довжини циліндра (Вт/м):

$$q_l = \frac{Q_\tau}{l} = \frac{\pi(t_{c_1} - t_{c_2})}{\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}} = \frac{\pi(t_{c_1} - t_{c_2})}{R_l}, \quad (6.29)$$

$$R_l = \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}, \quad (6.30)$$

де  $R_l$  – лінійний термічний опір теплопровідності циліндричної стінки.

Як видно із рівняння (6.29) при незмінному відношенні  $d_2/d_1$ , лінійна густина теплового потоку не залежить від площі поверхні циліндричної стінки.

Поверхневу густину теплового потоку відносять до зовнішньої або внутрішньої площі поверхні:

$$q_1 = \frac{Q_\tau}{\pi d_1 l} = \frac{2\lambda(t_{c_1} - t_{c_2})}{d_1 \ln \frac{d_2}{d_1}}, \quad (6.31)$$

$$q_2 = \frac{Q_\tau}{\pi d_2 l} = \frac{2\lambda(t_{c_1} - t_{c_2})}{d_2 \ln \frac{d_2}{d_1}}. \quad (6.32)$$

**4. Багат шарова циліндрична стінка.** Для визначання теплового потоку через багат шарову циліндричну стінку необхідно підсумувати температурні напори для окремих шарів.

$$q_l = \frac{\pi(t_{c_1} - t_{c_{(n+1)}})}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}} = \frac{\pi(t_{c_1} - t_{c_{(n+1)}})}{R_l}, \quad (6.33)$$

$$R_l = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}, \quad (6.34)$$

де  $R_l$  – лінійний термічний опір багат шарової циліндричної стінки.

Розрахунок температури на межах шарів у цьому випадку

здійснюється за формулою:

$$t_{c(k+1)} = t_{c_1} - \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot l} \cdot \sum_{i=1}^k \frac{1}{\lambda_i} \cdot \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}. \quad (6.35)$$

**5. Тіло довільної форми.** Із попередніх випадків можна зробити висновок, що для кожної форми тіла існує відповідне рівняння теплопровідності і для тіл неправильної форми їх використовувати не рекомендується.

Кількість теплоти, яка проходить через стінки тіл неправильної форми за одиницю часу, можна визначити з рівняння:

$$Q_{\tau} = \frac{\lambda}{\delta} F_{cp} (t_{c_1} - t_{c_2}), \quad (6.36)$$

де  $F_{cp}$  – поверхня, яку знаходять залежно від форми тіла.

Для плоскої та циліндричної стінок при  $F_2 / F_1 < 2$  (де  $F_2$  та  $F_1$  – відповідно, зовнішня та внутрішня поверхні тіла):

$$F_{cp} = (F_1 + F_2) / 2.$$

Для циліндричної стінки при  $F_2 / F_1 > 2$ :

$$F_{cp} = (F_2 - F_1) / 2,3 \lg \frac{F_2}{F_1}.$$

Для сферичної стінки:

$$F_{cp} = \sqrt{F_1 \cdot F_2}.$$

Всі ці формули використовуються для наближених розрахунків.

### 6.3. Стаціонарна теплопередача при граничних умовах третього роду, часткові випадки

Ускладнимо попередню задачу про проходження теплоти через тіло. Нехай обидві поверхні тіла омиваються рідиною з різними температурами ( $t_{p_1} > t_{p_2}$ ), а коефіцієнти тепловіддачі на цих поверхнях відповідно становлять  $\alpha_1$  та  $\alpha_2$ . Розглянемо таким чином, задачу теплопередачі при граничних умовах третього роду.

Передача теплоти із одного середовища до другого через відокремлюючу їх стінку будь-якої форми називається **теплопередачею**. Теплопередача включає в себе тепловіддачу від більш гарячої рідини до стінки, теплопровідність у стінці і тепловіддачу від неї до більш холодної рідини. Відокремлююча стінка може бути провідником теплоти (великий коефіцієнт теплопровідності  $\lambda$ ) та ізолятором – для зменшення втрат теплоти.

Розглянемо ці процеси на конкретних прикладах.

**1. Плоска однорідна стінка.** Однорідна плоска стінка має товщину  $\delta$  (рис. 6.6).

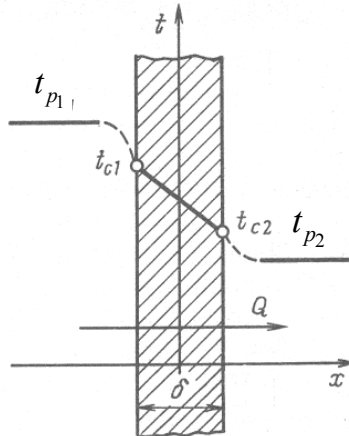


Рис. 6.6 – Теплопередача через одношарову плоску стінку

Задані коефіцієнт теплопровідності стінки  $\lambda$ , температури навколишнього середовища  $t_{p1}$  і  $t_{p2}$ , а також коефіцієнти тепловіддачі  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$ . Величини  $t_{p1}$ ,  $t_{p2}$ ,  $\alpha_1$  та  $\alpha_2$  постійні і не змінюються уздовж поверхні. Це дозволяє розглядати зміни температури рідини і стінки тільки в напрямку, перпендикулярному площині стінки. Густина теплового потоку від гарячої рідини до стінки визначається рівнянням:

$$q = \alpha_1(t_{p1} - t_{c1}). \quad (6.37)$$

При стаціонарному режимі така сама густина теплового потоку обумовлена теплопровідністю через стінку:

$$q = \frac{\lambda}{\delta} \cdot (t_{c_1} - t_{c_2}). \quad (6.38)$$

Той самий тепловий потік передається від другої поверхні стінки до холодної рідини за рахунок тепловіддачі:

$$q = \alpha_2 (t_{c_2} - t_{p_2}). \quad (6.39)$$

Ці рівняння можна переписати у вигляді:

$$q \frac{1}{\alpha_1} = t_{p_1} - t_{c_1}, \quad q \frac{\delta}{\lambda} = t_{c_1} - t_{c_2}, \quad q \frac{1}{\alpha_2} = t_{c_2} - t_{p_2}.$$

Склавши рівняння почленно, одержимо:

$$q \left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right) = t_{p_1} - t_{p_2}. \quad (6.40)$$

Звідси густина теплового потоку:

$$q = \frac{t_{p_1} - t_{p_2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}. \quad (6.41)$$

Позначимо вираз

$$\left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right)^{-1} = K. \quad (6.42)$$

Тоді можна записати **рівняння теплопередачі**:

$$q = K(t_{p_1} - t_{p_2}), \quad (6.43)$$

де  $K$  – коефіцієнт теплопередачі, Вт/м<sup>2</sup>·К.

Звідси можна записати наступну залежність:

$$K = \frac{q}{t_{p_1} - t_{p_2}} = \frac{\delta Q}{dF d\tau (t_{p_1} - t_{p_2})}, \quad (6.44)$$

тобто коефіцієнт теплопередачі чисельно дорівнює кількості теплоти, що передається через одиницю площі поверхні за одиницю часу при різниці температур між гарячою і холодною рідиною в 1 К.

Коефіцієнт теплопередачі характеризує інтенсивність передачі теплоти. Якщо величина  $\alpha$  розкриває тільки конвективний теплообмін на поверхні стінки, то коефіцієнт теплопередачі – є характеристикою всієї теплопередаючої системи, оскільки крім коефіцієнтів тепловіддачі  $\alpha_1$  та  $\alpha_2$  він включає параметри  $\lambda$  та  $\delta$  – див. вираз (6.42).

Величина, обернена до коефіцієнта теплопередачі, називається **повним термічним опором плоскої стінки**:

$$R = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}. \quad (6.45)$$

У цій формулі  $\frac{1}{\alpha_1}$  та  $\frac{1}{\alpha_2}$  – зовнішній термічний опір середовищ;  $\frac{\delta}{\lambda}$  – термічний опір стінки.

**2. Багатошарова плоска стінка.** У випадку передачі теплоти через багатошарову плоску стінку в знаменнику формули (6.41) необхідно поставити суму термічних опорів всіх шарів:

$$q = \frac{Q}{F} = \frac{t_{p_1} - t_{p_2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}. \quad (6.46)$$

Коефіцієнт теплопередачі через багатошарову плоску стінку дорівнює:

$$K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}. \quad (6.47)$$

Загальний термічний опір

$$R = \frac{1}{K} = \frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}. \quad (6.48)$$

Температури на поверхнях плоскої стінки визначають із наступних рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} t'_c &= t_{p1} - \frac{Q}{\alpha_1 \cdot F} \\ t''_c &= t_{p2} + \frac{Q}{\alpha_2 \cdot F} \end{aligned} \right\}$$

При відомих  $\alpha$  та  $K$  температури поверхні плоскої стінки можна знайти із формул:

$$\begin{aligned} \alpha_1(t_{p1} - t'_c) &= K(t_{p1} - t_{p2}); & \alpha_2(t''_c - t_{p2}) &= K(t_{p1} - t_{p2}); \\ t'_c &= t_{p1} - \frac{K}{\alpha_1}(t_{p1} - t_{p2}); & t''_c &= t_{p2} + \frac{K}{\alpha_2}(t_{p1} - t_{p2}). \end{aligned}$$

**3. Однорідна циліндрична стінка.** Розглянемо однорідну циліндричну стінку з постійним коефіцієнтом теплопровідності. Задані постійні температури рухомих середовищ  $t_{p1}$  та  $t_{p2}$  і постійні коефіцієнти тепловіддачі (рис. 6.7).

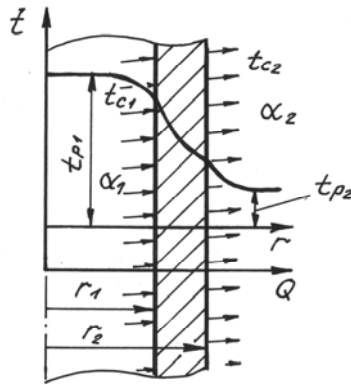


Рис. 6.7 – Теплопередача крізь однорідну циліндричну стінку

Необхідно знайти лінійну густину теплового потоку  $q_l$  і температури зовнішньої та внутрішньої поверхонь циліндра. Якщо довжина циліндра значно більша його зовнішнього діаметра ( $l \gg d_2$ ), тоді втратами теплоти з торців можна знехтувати, і при сталому теплообміні буде проходити крізь стінку і віддаватися від стінки до холодної рідини одна і та сама кількість теплоти. Таким чином,

можна записати:

$$q_l = \alpha_1 \pi d_1 (t_{p_1} - t_{c_1}), \quad (6.49)$$

$$q_l = \frac{\pi(t_{c_1} - t_{c_2})}{\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}}, \quad (6.50)$$

$$q_l = \alpha_2 \pi d_2 (t_{c_2} - t_{p_2}). \quad (6.51)$$

Подамо ці рівняння таким чином:

$$t_{p_1} - t_{c_1} = \frac{q_l}{\pi} \cdot \frac{1}{\alpha_1 d_1}, \quad t_{c_1} - t_{c_2} = \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}, \quad t_{c_2} - t_{p_2} = \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{\alpha_2 d_2}.$$

Складаючи рівняння, одержимо:

$$t_{p_1} - t_{p_2} = \frac{q_l}{\pi} \left( \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2} \right). \quad (6.52)$$

Розв'язавши вираз (6.52) відносно лінійної густини теплового потоку, отримаємо:

$$q_l = \frac{\pi(t_{p_1} - t_{p_2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}}, \quad (6.53)$$

$$K_l = \left( \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2} \right)^{-1}. \quad (6.54)$$

де  $K_l$  – лінійний коефіцієнт теплопередачі.

Після цього спрощення рівняння теплопередачі буде мати вигляд:

$$q_e = K_l \cdot \pi(t_{p_1} - t_{p_2}), \quad (6.55)$$

Лінійний коефіцієнт теплопередачі дорівнює кількості теплоти, що передається від гарячого теплоносія до холодного через відокремлюючу їх циліндричну стінку за одиницю часу, при різниці температур між теплоносіями в 1 К і віднесена до одиниці довжини циліндра. Величина, обернена до лінійного коефіцієнта теплопередачі, називається **лінійним термічним опором** теплопередачі ци-

ліндричної стінки  $R_l$ :

$$R_l = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}. \quad (6.56)$$

$$R_{l1} = \frac{1}{\alpha_1 d_1}, \quad R_{l2} = \frac{1}{\alpha_2 d_2},$$

де  $R_{l1}$  та  $R_{l2}$  – термічний опір тепловіддачі відповідно внутрішньої та зовнішньої поверхонь циліндра.

На практиці часто зустрічаються циліндри, товщина стінок яких мала в порівнянні з діаметром. В цьому випадку при розрахунках можна користуватись спрощеною формулою:

$$Q_\tau = K \pi d x l (t_{p1} - t_{p2}), \quad (6.57)$$

де  $K = \frac{1}{1/\alpha_1 + \delta/\lambda + 1/\alpha_2}$  – коефіцієнт теплопередачі.

При цьому, якщо  $d_2/d_1 < 2$ , то похибка розрахунків не перевищує 4%. Як правило, в інженерних розрахунках при  $d_2/d_1 \leq 1,8$  користуються формулою (6.57), але похибку можна ще зменшити, якщо за розрахункову брати поверхню, зі сторони якої коефіцієнт тепловіддачі менше:

– при  $\alpha_1 \gg \alpha_2$ , то  $d_x = d_2$ ;

– при  $\alpha_2 \gg \alpha_1$ ,  $d_x = d_1$ ;

– при  $\alpha_1 \approx \alpha_2$ , то  $d_x = \frac{d_1 + d_2}{2}$ .

**4. Багатошарова циліндрична стінка.** При теплопередачі через таку стінку система рівнянь, що враховує опір теплопровідності всіх шарів, набуде вигляду:

$$t_{p1} - t_{c1} = \frac{q_l}{\pi} \cdot \frac{1}{\alpha_1 d_1}, \quad (6.58)$$

$$t_{c1} - t_{c2} = \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1}, \quad (6.59)$$

...

$$t_{cn} - t_{c(n+1)} = \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{2\lambda_n} \ln \frac{d_{n+1}}{d_n}, \quad (6.60)$$

$$t_{c(n+1)} - t_{p2} = \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{\alpha_2 d_{n+1}}. \quad (6.61)$$

Після складання цих рівнянь і розв'язування їх відносно теплового потоку  $q_l$ , одержимо:

$$q_l = \frac{\pi(t_{p1} - t_{p2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_{n+1}}}. \quad (6.62)$$

або

$$q_l = K_l \cdot \pi(t_{p1} - t_{p2}). \quad (6.63)$$

Величина

$$\frac{1}{K_l} = R_l = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_{n+1}} \quad (6.64)$$

називається *термічним опором багатощарової циліндричної стінки* (розмірність – м·К/Вт).

Температури циліндричних поверхонь можна знайти, використовуючи рівняння (6.49, 6.50):

$$t_{c1} = t_{p1} - \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{\alpha_1 d_1},$$

$$t_{c2} = t_{p1} - \frac{q_l}{\pi} \left( \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1} \right),$$

$$t_{c(i+1)} = t_{p1} - \frac{q_l}{\pi} \left( \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} \right).$$

#### Контрольні питання

1. Яка сутність коефіцієнтів тепловіддачі і теплопередачі, їх відмінності?
2. Охарактеризуйте основні особливості процесу теплопровідності через плоску та циліндричну стінку.
3. Як визначити загальний термічний опір багатощарової стінки?

4. Охарактеризуйте основні особливості процесу теплопередачі через плоску і циліндричну стінки.
5. Від яких величин залежить тепловий потік, що передається теплопровідністю через одношарову плоску стінку?
6. Що називають еквівалентним коефіцієнтом теплопровідності?
7. Як визначається температура між окремими шарами у багатошаровій плоскій стінці?
8. Який закон зміни температури у циліндричній стінці?
9. Вивід рівняння теплопровідності через багатошарову циліндричну стінку.
10. У якому випадку розрахунок теплопередачі для циліндричної стінки може виконуватись за формулами плоскої стінки?

#### Тестові завдання

1. Узагальненим розміром тіла називають відношення...

- а)  $R = V \cdot F$ ;    б)  $R = V / F$ ;    в)  $R = V - F$ ;    г)  $R = F / V$ .

2. Теплова провідність плоскої стінки – це величина  $\sigma$ , яка визначається за виразом:

- а)  $\sigma = \lambda / \delta$ ;    б)  $\sigma = \lambda \cdot \delta$ ;    в)  $\sigma = \delta / \lambda$ ;    г)  $\sigma = \lambda + \delta$ .

3. Вкажіть правильну розмірність термічного опору теплопровідності:

- а)  $\text{м}^2 \cdot \text{К} / \text{Вт}$ ;    б)  $\text{Вт} / \text{м}^3 \cdot \text{К}$ ;    в)  $\text{м}^3 \cdot \text{К}^{-1} / \text{Вт}$ ;    г)  $\text{м}^3 \cdot \text{К} / \text{Дж}$ .

4. Еквівалентний коефіцієнт теплопровідності визначається формулою:

- а)  $\lambda_e = \frac{\Delta}{\sum R_i}$ ;    б)  $\lambda_e = \frac{\sum R_i}{\Delta}$ ;    в)  $\lambda_e = \Delta \cdot \sum R_i$ ;    г)  $\lambda_e = \sum \delta_i - \sum R_i$ .

5. Величина температурного напору для окремих шарів багатошарової плоскої стінки визначається за формулою:

- а)  $t_{c_1} - t_{c_2} = q \delta_1 / \lambda_1$ ;    в)  $t_{c_1} + t_{c_2} = q \sigma_1$ ;  
 б)  $t_{c_1} - t_{c_2} = q \lambda_1 / \delta_1$ ;    г)  $t_{c_1} + t_{c_2} = q \cdot R_i$ .

6. Коефіцієнт теплопередачі чисельно дорівнює кількості теплоти, що...

- а) передається через одиницю площі поверхні за одиницю часу при різниці температур між теплоносіями в один градус;  
 б) отримується одиницею площі поверхні за одиницю часу при температурному напорі в один градус;

- в) акумулюється одиницею площі поверхні за одиницю часу при зміні температури на один градус;  
г) виділяється через  $1 \text{ м}^2$  площі теплообміну за довільний час при різниці температур в один градус.

**7. Повний термічний опір і коефіцієнт теплопередачі плоскої стінки залежать один від одного...**

- а) прямо пропорційно;      в) лінійно;  
б) обернено пропорційно;      г) ці величини незалежні між собою.

**8. Величина, яка дорівнює кількості теплоти, що проходить через стінку, площею  $1 \text{ м}^2$  за час  $1 \text{ с}$ , називається:**

- а) термічним опором стінки;      в) густиною теплового потоку;  
б) коефіцієнтом теплопередачі;      г) потужністю теплового потоку.

## ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ ПРИ НЕСТАЦІОНАРНОМУ РЕЖИМІ

---

- Основні відомості про нестационарну теплопровідність
- Теплопровідність термічно тонких та напівобмежених тіл
- Нагрів і охолодження пластини та циліндра
- Регулярний режим теплопровідності

### 7.1. Основні відомості про нестационарну теплопровідність

У природі досить часто зустрічаються випадки перенесення теплоти теплопровідністю при відсутності внутрішніх джерел теплоти, коли температура тіла чи системи тіл змінюється не тільки в просторі, але й в часі. Такі процеси теплопровідності при змінному режимі температурного поля називають *нестационарними*. Кількість теплоти при цьому також змінюється і тому нестационарний тепловий процес завжди пов'язаний з явищем нагрівання або охолодження тіла.

Серед основних практичних задач нестационарної теплопровідності найбільш важливе місце займають дві основні групи процесів:

- а) стан тіла прямує до теплової рівноваги;
- б) температура тіла періодично змінюється.

До першої групи відносяться процеси нагрівання (охолодження) тіл, розміщених у середовищі із заданим тепловим станом, наприклад, прогрівання заготовок у термічних печах перед куванням чи прокаткою, випалення цегли, виробництво скла, вулканізація гуми, нагрівання мішків з борошном на складах, прогрівання або охолодження стін приміщення, обумовлених нерівномірністю роботи системи опалення, охолодження деталей при зануренні у масляну ванну тощо.

До другої групи відносяться процеси у періодично діючих теплових пристроях, наприклад, регенераторах, які нагріваються гарячими газами або охолоджуються потоком холодного повітря, зміна температури в тілі при дії струму надвисокої частоти, зміна температури циліндро-поршневої групи двигунів внутрішнього згорання, добові та сезонні коливання температури повітря і земної поверхні тощо.

На рис. 7.1 показаний характер температурних кривих, які отримують при внесенні тіла з температурою поверхневих точок  $t_c$  та температурою у глибині тіла  $t_o$  в середовище з постійною температурою  $t_p$ , яка значно більша температури тіла. На початку температура поверхні і температура внутрішньої частини тіла змінюється зовсім по різному. Після деякого часу нагрівання температури поверхневих точок, а також і всередині тіла починають асимптотично наближатися до температури середовища, причому найбільш швидко змінюється температура точок, які знаходяться біля поверхні тіла. Із збільшенням тривалості нагріву ця різниця буде зменшуватись і теоретично через деякий, досить значний відрізок часу, вона буде дорівнювати нулю.

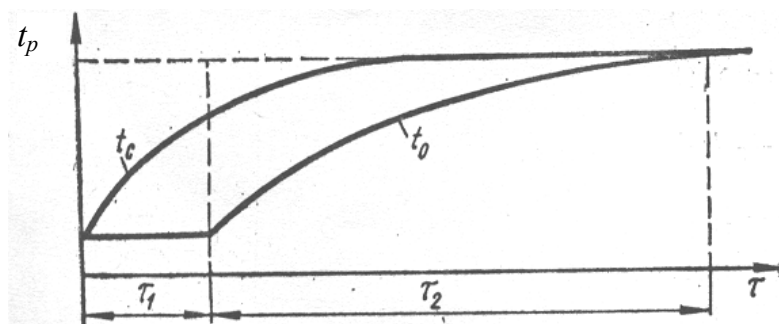


Рис. 7.1 – Характер зміни температури тіла з часом

В умовах перенесення теплоти через стінку при раптовій зміні температури одного із теплоносіїв не вся теплота буде передаватися через неї: частина піде на зміну внутрішньої енергії самої стінки і тільки після цього тепловий потік буде проходити через стінку від однієї рідини до іншої. Це свідчить про те, що нестационарні режими завжди пов'язані зі зміною внутрішньої енергії або ентальпії речовини.

При аналізі процесу зміни температури тіла (див. рис. 7.1) можна умовно виділити три окремі фази: перша – режим неупорядкованого зростання температури ( $\tau_1$ ); друга – регулярний режим зміни температури, при якому швидкість її зміни залежить від форми і розмірів тіла та його теплофізичних властивостей ( $\tau_2$ ). Після проходження певного тривалого періоду часу настає третя фаза – стаціонарний режим. Такі самі основні фази спостерігаються і при охолодженні тіла.

Характер передачі теплоти теплопровідністю при нестационарному режимі можливо визначити, якщо знайти закон зміни температурного поля і теплового потоку в часі та в просторі. Математично така задача зводиться до розгляду диференціального рівняння теплопровідності, разом з умовами однозначності, які відповідають нестационарній природі процесу. Однак розв'язати цю задачу аналітичним шляхом досить складно, як раз в силу її нестационарності.

Дійсно, у загальному випадку рух теплоти в тілі може відбуватися по всім трьом координатним осям і диференціальне рівняння теплопровідності необхідно задати у вигляді:

$$\frac{1}{a_T} \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau} = \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{\lambda} = \nabla^2 t + \frac{q_v}{\lambda}. \quad (7.1)$$

Для розв'язку цього рівняння необхідно знайти постійні інтегрування, а для цього потрібно знати умови однозначності цієї задачі.

Як і для інших задач теплопровідності, умови однозначності передбачають завдання:

- 1) форми і геометричних розмірів об'єкта –  $l_0, l_1, l_2, \dots, l_n$ ;
- 2) фізичних параметрів –  $\alpha, \lambda, c, \rho$  (при розрахунку їх приймають постійними);
- 3) часових умов – як правило, передбачають початковий розподіл температури в тілі і відносять їх до моменту часу  $\tau = 0$ :

$$t = t_0 = f(x, y, z) = \text{const};$$

4) просторових крайових умов – їх відносять до поверхонь, які обмежують навколишнє середовище і підпадають під аналіз та вивчення. Саме тут можливі наступні часткові випадки:

– задано розподіл температури на поверхні тіла та її зміна в часі. На практиці це зустрічається рідко;

– задана величина теплового потоку, що проходить через поверхню і його зміна в часі. Відповідно до закону Фур'є тепловий потік пропорційний градієнту температури, а це означає, що відомо кут нахилу дотичної прямої до температурної кривої в точці її перетину з поверхнею. Однак при цьому сама температура поверхні виявляється невідомою;

– задана температура середовища  $t_p$ , що оточує поверхню тіла та коефіцієнт тепловіддачі  $\alpha$  між середовищем і поверхнею. Цей варіант є найбільш поширеним на практиці. Математично він записується формулою, яку отримують із порівняння закону Фур'є і виразу Ньютона–Ріхмана:

$$-\frac{dt}{dn} = \frac{\alpha}{\lambda_c}(t_c - t_o). \quad (7.2)$$

Якщо рівняння (7.2) записати у формі:

$$-\frac{dt}{dn} = \frac{t_c - t_o}{\frac{\lambda_c}{\alpha}} = \frac{\Delta t}{\frac{\lambda_c}{\alpha}},$$

то можна зробити висновок, що цей варіант подачі граничних умов визначає місце розташування точки, через яку повинні проходити всі дотичні до кривих, що відображають закономірність зміни температури на поверхні тіла в часі. Ця точка розташована на відстані  $\lambda_c / \alpha$  від поверхні тіла і називається *направляючою*.

Диференціальне рівняння теплопровідності разом з умовами однозначності дає закінчене математичне формулювання досліджуваної задачі. Розв'язок її полягає у пошуку функції:

$$t = f(x, y, z, \tau, \alpha, a_T, t_0, t_c, l_0, l_1, \dots, l_n), \quad (7.3)$$

яка задовольняла би рівнянню теплопровідності та умовам однозначності.

Записане диференціальне рівняння подане у частинних похідних і для знаходження його загального розв'язку необхідно використання складних і громіздких математичних методів, зокрема використання рядів Фур'є. У спеціальній літературі розв'язок рівняння (7.1) подають з використанням двох методів: розділення змінних та методу джерел, але детальний виклад їх особливостей

виходить за рамки нашої програми, хоча у подальшому будуть наводитись окремі розв'язки, які отримані з використанням цих методів. Для різних крайових умов результати виходять різними, але методологія розв'язку в основному однакова.

При низці спрощень, для деяких окремих задач, можливі аналітичні розв'язки цього рівняння. Зокрема, із задач, що мають найбільший практичний інтерес, є рішення для необмеженої плоскої стінки, круглого циліндра нескінченної довжини, а також сфери. Для технічних цілей у більшості випадків можна обмежитись розглядом перенесення теплоти лише вздовж однієї осі, наприклад, для цього випадку загальний розв'язок буде мати вигляд:

– плоска стінка:

$$t = bx + c + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (\cos m_n x + p_n \sin m_n x) e^{-a_T m_n^2 \tau}; \quad (7.4)$$

– циліндрична стінка:

$$t = b \ln r + c + \sum_{n=0}^{\infty} A_n [J_0(m_n r + p_n Y_0(m_n r))] e^{-a_T m_n^2 \tau}, \quad (7.5)$$

де  $J_0$  та  $Y_0$  – функції Бесселя першого і другого роду нульового порядку.

Сталі  $b$  та  $c$  визначаються із умов стаціонарності режиму (при  $\tau = \infty$ ),  $p_n$  і  $m_n$  – із граничних, а  $A_n$  – з початкових ( $\tau = 0$ ) умов.

З рівнянь (7.4) та (7.5) випливає, що розподіл температури залежить від значного числа параметрів. Однак, більш глибокий аналіз показує, що всі ці параметри можна згрупувати в три комплекси, які мають безрозмірний характер і найбільш часто використовуються при аналізі нестационарних процесів:

- а)  $\frac{a_T \cdot \tau}{\delta^2} = Fo$  (число Фур'є);
- б)  $\frac{\alpha \cdot \delta}{\lambda_c} = Bi$  (число Біо);
- в)  $\frac{x}{\delta} = X$  (безрозмірна координата).

Число Фур'є називають ще **безрозмірним часом**, воно ха-

характеризує нестационарність режиму або швидкість зміни температури при нестационарному обміні теплотою.

Число Біо характеризує відношення термічного опору теплопровідності  $\delta/\lambda_c$  до термічного опору тепловіддачі  $1/\alpha$  і є кількісною мірою інтенсивності тепловіддачі з поверхні тіла в порівнянні з інтенсивністю переходу теплоти з середини до його поверхні.

Один із способів спрощення підходу до розв'язку нестационарних задач теплопровідності полягає в тому, щоб розглянути клас задач, в яких поле температур в твердому тілі змінюється в часі, але в довільний момент часу не змінюється в просторі. Це означає, що температура в усіх точках тіла рівномірно змінюється в часі.

Якщо припустити, що енергія передається від твердого тіла до рідини шляхом конвективного теплообміну, то умова рівномірної зміни температури в твердому тілі буде задовольнятися в тому випадку, якщо опір теплопровідності буде набагато менше опору конвективного теплообміну на поверхні. Системи, що задовольняють цій умові, називають *системами з дуже малим внутрішнім термічним опором*.

Щоб визначити, чи має тіло, оточене рідиною дуже малий внутрішній термічний опір, потрібно визначити число Біо:

$$Bi = \frac{\alpha l_{ст}}{\lambda_{ст}} = \frac{l_{ст}}{\frac{1}{\alpha} R_{конд}} = \frac{R_{конд}}{R_{конв}}. \quad (7.6)$$

Величина критерію Біо має велике значення при розв'язку будь-якої задачі у теорії теплопровідності. Дійсно, якщо  $Bi \ll 1$ , то або мала тепловіддача з поверхні тіла, або велика теплова провідність стінки. В обох випадках це означає, що температурний перепад всередині стінки малий і по всьому перерізу тіла температура може бути прийнята однаковою. Природно, що таке допущення значно спрощує аналіз задачі нестационарної теплопровідності. При значенні критерію  $Bi \gg 1$  виникає стан, протилежний попередньому, і можна стверджувати, що температура поверхні тіла стає практично рівною температурі навколишнього середовища (різниця  $t - t_p$  є дуже малою), і весь процес буде обумовлений явищем теплопровідності. Проміжний випадок, коли  $Bi \approx 1$ , є найбільш складним, тому спростити розв'язок задачі у цьому випадку не вдається.

Якщо прийняти  $Bi < 0,1$ , то внутрішній термічний опір буде дійсно малий порівняно із зовнішнім або конвективним термічним опором і тоді ми будемо мати задачу нестационарної теплопровідності з аналізом *термічно тонкого тіла*.

У подальшому будуть розглянуті прості, але найбільш загальні випадки, які відносяться до процесів, при яких тіла прямують до теплової рівноваги. Для всіх цих задач прийнято, що внутрішні джерела теплоти відсутні, теплофізичні характеристики  $\lambda$ ,  $c$  та  $\rho$  відомі і не залежать від температури.

### 7.2. Теплопровідність термічно тонких та напівобмежених тіл

До термічно тонких відносять тіла, в яких у будь-який момент нагріву або охолодження температура мало змінюється по координатах. Самий простий приклад – розпечене до червоного лезо для гоління, яке опускають у стакан з водою або охолоджують на повітрі. В його перерізі (0,08–0,1 мм) температури всіх точок майже однакові. Лезо охолоджується буквально на очах. Саме в такій постановці при граничних умовах третього роду і розглядається задача теплопровідності для термічно тонких тіл.

Нехай однорідне тіло, яке задовольняє умові  $Bi < 0,1$  зануримо в рідину з температурою  $t_p$ , причому коефіцієнт тепловіддачі  $\alpha = \text{const}$ . Теплофізичні властивості тіла, його об'єм  $V$  і поверхня  $F$  задані, а температура в силу вихідного допущення змінюється тільки в часі  $t = f(\tau)$ . Відповідно до першого закону термодинаміки відведення теплоти в навколишнє середовище зменшує ентальпію тіла.

Для цього випадку запишемо рівняння теплового балансу для тіла довільної форми:

$$-\rho V \cdot c \frac{dt_{(\tau)}}{d\tau} = \alpha \cdot F [t_{(\tau)} - t_p]. \quad (7.7)$$

Зменшення енергії, акумульованої в твердому тілі, повинно бути рівно тепловому потоку, що відводиться від поверхні конвективним теплообміном.

Оскільки температура  $t_p = \text{const}$ ,  $\partial t(\tau) = \partial |t(\tau) - t_p|$ , то в подальшому аналізі необхідно додатково ввести ще одну змінну, що виникає при розгляді процесів нестационарної теплопровідності – поняття **надлишкової температури**  $\theta$ , яке дорівнює різниці температури тіла і навколишнього середовища:  $\theta = t(\tau) - t_p$ .

Задамо також початкову температуру тіла  $t_0$  та її аналог – **початкову надлишкову температуру**:

$$\theta|_{\tau=0} = \theta_0 = t_0 - t_p.$$

Розв'язок для миттєвої температури  $t_{(\tau)}$  буде визначати температуру в усіх точках тіла, включаючи його поверхню, оскільки ми припустили, що внутрішній термічний опір дуже малий. Нехай:

$$\theta_{(\tau)} = t_{(\tau)} - t_p. \quad (7.8)$$

Якщо припустити, що в початковий момент часу  $\tau = 0$ ,  $t = t_0$ , то початкові умови приймуть вигляд:

$$\theta_0 = t_0 - t_p \text{ при } \tau = 0. \quad (7.9)$$

Розв'язок рівняння (7.7) при початковій умові (7.9) має вигляд:

$$\frac{\theta_{(\tau)}}{\theta_0} = e^{-\left(\frac{\alpha A}{\rho V c}\right)\tau}. \quad (7.10)$$

Відношення  $\theta_{(\tau)}/\theta_0$  носить назву **безрозмірної надлишкової температури**.

Параметр  $\left(\frac{\alpha A}{\rho V c}\right)\tau$  в дійсності є добутком двох критеріїв –

Ві та Fo:

$$\text{Ві} \cdot \text{Fo} = \frac{\alpha l_{\text{ст}}}{\lambda_{\text{ст}}} \frac{a_T \tau}{l_{\text{ст}}^2} = \frac{\alpha l_{\text{ст}} \lambda_{\text{ст}} \tau l_{\text{ст}}}{\lambda_{\text{ст}} c \rho l_{\text{ст}}^2 l_{\text{ст}}} = \frac{\alpha l_{\text{ст}}^2 \tau}{\rho c l_{\text{ст}}^3} = \left(\frac{\alpha A}{\rho c V}\right)\tau. \quad (7.11)$$

Визначальний розмір  $l$  для тіла довільної форми визначається відношенням об'єму твердого тіла до площі його поверхні. Одержимо:

$$\frac{\theta_\tau}{\theta_0} = e^{-Bi \cdot Fo} = e^{-m\tau}, \quad (7.12)$$

де  $m = \frac{\alpha F}{C}$  – темп охолодження (нагріву) тіла;

$C$  – повна теплоємність.

Якщо  $Bi < 0,1$ , то помилка в значеннях температури, розрахованих за формулою (7.12), не перевищує 5%. При  $Bi > 0,1$  необхідно використовувати або більш точні методи, або миритися з досить високою похибкою розрахунку.

Розрахуємо сумарну тепловіддачу і миттєвий тепловий потік від поверхні твердого тіла, визначивши кількість тепла, що відводиться від поверхні.

Величина миттєвого теплового потоку в момент часу  $\tau$  відповідно до закону Ньютона–Ріхмана дорівнює:

$$Q_\tau = \alpha F(t_\tau - t_p).$$

Підставляючи сюди значення миттєвої температури із (7.12), можна виразити в безрозмірній формі величину миттєвого теплового потоку від твердого тіла із зневажливо малим внутрішнім термічним опором.

$$\frac{Q_\tau}{\alpha F(t_0 - t_p)} = e^{-Bi \cdot Fo}. \quad (7.13)$$

Сумарна кількість теплоти, що віддається твердим тілом в період від  $\tau = 0$  до довільного моменту часу, можна знайти, інтегруючи співвідношення (7.13) в цьому інтервалі часу:

$$Q = \int_{\tau=0}^{\tau} Q_\tau d\tau = \alpha F(t_0 - t_p) \int_{\tau=0}^{\tau} e^{-Bi \cdot Fo} d\tau,$$

або в безрозмірній формі:

$$\frac{Q}{\alpha F(t_0 - t_p)} = (1 - e^{-Bi \cdot Fo}) \frac{1}{Bi \cdot Fo}. \quad (7.14)$$

Умову  $Bi \ll 1$  використовують також у випадку, коли замість твердого тіла будуть використовувати об'єм добре перемішуваної рідини, наприклад, мастила у картері двигуна внутрішнього згорання. Якщо при цьому необхідно описати нестационарне відведення теплоти в навколишнє середовище, то залежності (7.12)–(7.14) зберігають свою силу.

### 7.3. Нагрів і охолодження пластини та циліндра

Одним із випадків нестационарних процесів теплопровідності є реальні процеси охолодження (нагріву), що відбуваються при термообробці деталей та заготовок і які розглядають як систему тіл, в якій здійснюється теплообмін між пічним простором і завантаженням печі.

**Завантаження** – сукупність деталей або виробів і пристроїв для їх встановлення та транспортування в піч для термообробки.

Оцінку завантаження (тонке або масивне тіло) здійснюють за допомогою числа  $Bi$ , в якому в якості визначального розміру приймають величину  $l$  – розмір, що характеризує товщину завантаження. При цьому, якщо  $Bi > 0,25$ , то завантаження масивне, а якщо  $Bi \leq 0,25$  – тонке. В масивному завантаженні тепловий опір на шляху теплового потоку від поверхні всередину матеріалу суттєво впливає на процес нагріву та його тривалість. У цьому випадку процес теплообміну визначається не тільки умовами теплопередачі від печі до поверхні, що нагрівається, як при тонкому завантаженні, але й характером розповсюдження теплоти всередині самого завантаження. В інженерних розрахунках реальне масивне завантаження найчастіше показують у вигляді тіла простої форми – паралелепіпеда або циліндра і розглядають як одномірну модель теплообміну. Для ілюстрації цього положення подамо результати розрахунку процесу теплопровідності на прикладі тіл простішої форми – плоскої необмеженої пластини товщиною  $2\delta (l = \delta)$  та циліндра нескінченної довжини.

**1. Плоска необмежена пластина.** Якщо товщина пластини порівняно мала у відношенні до ширини та довжини, то таку пластину вважають необмеженою (рис. 7.2). Пластина оточена з двох сторін рідиною або газом з постійною температурою  $t_p$ , причому  $\alpha$  для обох поверхонь має однакове і постійне значення.

В початковий момент часу пластина має у всіх своїх точках постійну температуру  $t_0$ , тому і надлишкова температура  $\theta_1 = t_0 - t_c$  буде також постійною для всіх точок тіла. Крім того, задані коефіцієнт теплопровідності  $\lambda_{ст}$ , густина  $\rho$  і теплоємність  $c$ , величини яких постійні.

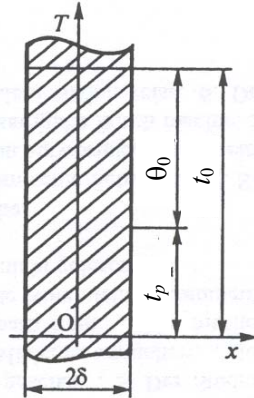


Рис. 7.2 – Охолодження пластини при нестационарному режимі

Оскільки пластина необмежена, як по висоті, так і по ширині, то по осях  $Oy$  та  $Oz$  температура не змінюється і тоді можна використати диференціальне рівняння теплопровідності для одномірного температурного поля:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a_T \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}. \quad (7.15)$$

Граничні умови при  $x = \pm \delta$ :

$$\left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=\pm \delta} = \pm \frac{\alpha \theta_{ст}}{\lambda_{ст}}. \quad (7.16)$$

Вираз (7.16) означає, що пластина охолоджується симетрично і початок координат можна розмістити посередині пластини в точці  $O$ . Початкова умова при  $\tau = 0$ ,  $\theta = \theta_1$ .

Температури поверхні стінки в її середній площині визначаються із співвідношення:

$$\frac{\theta_{\text{ст}}}{\theta_1} = \frac{t_{\text{ст}} - t_c}{t_0 - t_c} = f\left(\frac{\alpha l}{\lambda_{\text{ст}}} \cdot \frac{a_T \tau}{l^2}\right) = f(\text{Bi}, \text{Fo}), \quad (7.17)$$

$$\frac{\theta_{\text{ц}}}{\theta_1} = \frac{t_{\text{ц}} - t_c}{t_0 - t_c} = f_1(\text{Bi}, \text{Fo}). \quad (7.18)$$

Кількість теплоти, яку віддає (або приймає) пластина в навколишнє середовище за час  $\tau$ , повинна дорівнювати зміні її внутрішньої енергії за період повного охолодження (нагріву). Початкова внутрішня енергія при температурі середовища, що оточує стінку, дорівнює:

$$Q_0 = 2\delta \cdot c\rho(t_0 - t_c) \cdot F = 2\delta \cdot c\rho \cdot \theta_1 \cdot F. \quad (7.19)$$

Кількість теплоти, що виділяється при охолодженні пластини, визначається також безрозмірними числами Bi та Fo:

$$Q/Q_0 = f_2(\text{Bi}, \text{Fo}), \quad (7.20)$$

$$Q = 2\delta \cdot c\rho(t_0 - t_{\text{ср.ст}}) \cdot F, \quad (7.21)$$

де  $Q$  – кількість теплоти, що передається в навколишнє середовище за час  $\tau$ , Дж;

$t_{\text{ср.ст}}$  – середня температура стінки через період часу  $\tau$ , °С.

Залежності (7.17), (7.18) та (7.20) подають у вигляді графіків або таблиць. При розрахунках спочатку обчислюють числа Bi та Fo, потім, користуючись даними таблиць (табл. 7.1) визначають величини  $\theta_{\text{ц}}/\theta_1$ ;  $\theta_{\text{ст}}/\theta_1$ ;  $Q/Q_0$ . Оскільки  $\theta_1$  та  $Q_0$  відомі, то можна легко обчислити  $t_c$ ,  $t_{\text{ц}}$ ,  $Q$ .

**Таблиця 7.1 – Параметри процесу нестационарної теплопровідності для необмеженої пластини**

Число Фур'є	Число Біо (Bi)									
	0,0001	0,001	0,01	0,1	0,5	1	4	10	20	50
<i>l</i>	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\theta_{\text{ц}}/\theta_1 = f(\text{Bi}, \text{Fo})$										
<b>0,02</b>	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
<b>0,05</b>	–	–	–	–	–	–	1,0	1,0	1,0	1,0
<b>0,1</b>	–	–	1,0	1,0	1,0	1,0	0,98	0,97	0,96	0,95
<b>0,5</b>	–	1,0	0,99	0,97	0,87	0,78	0,56	0,46	0,41	0,39

Розділ 7. Теплопровідність при нестационарному режимі

1,0	–	1,0	0,99	0,92	0,70	0,54	0,25	0,16	0,13	0,12
2	–	1,0	0,98	0,83	0,46	0,31	0,06	0,02	0,01	0,01
5	–	1,0	0,95	0,62	0,13	0,03	0,0	0,0	0,0	0,0
10	1,0	0,99	0,90	0,37	0,02	0,0	–	–	–	–
20	1,0	0,98	0,82	0,14	0,00	–	–	–	–	–
50	1,0	0,96	0,61	0,01	–	–	–	–	–	–

Продовження таблиці 7.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\theta_{cm} / \theta_1 = f_1(Bi, Fo)$										
	0,0001	0,001	0,01	0,1	0,5	1	4	10	20	50
0,02	–	1,0	0,99	0,98	0,93	0,86	0,59	0,34	0,19	0,08
0,05	–	1,0	0,99	0,98	0,89	0,79	0,46	0,23	0,12	0,05
0,1	–	1,0	0,99	0,97	0,85	0,73	0,37	0,17	0,08	0,04
0,5	–	1,0	0,99	0,92	0,69	0,51	0,17	0,06	0,03	0,01
1,0	–	1,0	0,98	0,88	0,56	0,35	0,08	0,02	0,01	0,0
2	–	1,0	0,97	0,79	0,37	0,17	0,02	0,0	0,0	–
5	–	1,0	0,95	0,59	0,10	0,02	–	–	–	–
10	1,0	0,99	0,9	0,36	0,01	0,0	–	–	–	–
20	1,0	0,98	0,81	0,13	0,0	–	–	–	–	–
50	1,0	0,96	0,6	0,01	–	–	–	–	–	–
$Q / Q_0 = f_2(Bi, Fo)$										
	0,0001	0,001	0,01	0,1	0,2	0,5	1	4	10	50
0,02	–	–	–	–	–	0,01	0,02	0,05	0,09	0,12
0,05	–	–	–	0,01	0,01	0,02	0,04	0,12	0,18	0,23
0,1	–	–	–	0,02	0,03	0,05	0,08	0,2	0,27	0,34
0,5	–	–	–	0,05	0,09	0,2	0,32	0,58	0,69	0,75
1,0	–	–	0,01	0,1	0,17	0,35	0,53	0,81	0,89	0,92
2	–	–	0,02	0,17	0,31	0,59	0,78	0,96	0,98	0,99
5	–	–	0,05	0,39	0,63	0,88	0,98	1,0	1,0	1,0
10	–	0,01	0,10	0,62	0,84	0,99	–	–	–	–
20	–	0,02	0,18	0,81	0,93	1,00	–	–	–	–
50	0,1	0,04	0,39	0,92	0,99	–	–	–	–	–

**2. Циліндр нескінченної довжини.** Розглянемо охолодження рівномірно нагрітого круглого циліндра великої довжини у середовищі, яке має меншу постійну температуру. Величини  $\alpha$ ,  $c$ ,  $\rho$ ,  $\lambda$  – постійні. Необхідно знайти температуру поверхні  $t_{cm}$ , температуру на осі  $t_{ц}$  та кількість теплоти  $Q$ .

Для циліндра нескінченної довжини з радіусом  $r$ , диферен-

ціальне рівняння зручніше подати в циліндричних координатах. Приймаємо, що в початковий момент часу температура по всьому об'єму постійна:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a_T \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{\partial \theta}{\partial r \cdot r} \right). \quad (7.22)$$

Задача про охолодження циліндра аналогічна задачі на охолодження пластини. Вона також розглядається як одномірна (оскільки  $l \gg d$  за умовою) і в цьому випадку величини  $t_{cm}$ ,  $t_y$  є функціями величин  $Bi$  та  $Fo$ , а кількість теплоти – ще додатково і радіуса  $r$ . Тому для них можемо записати наступні співвідношення:

$$\theta_{ct} / \theta_1 = f(Bi, Fo), \quad (7.23)$$

$$\theta_y / \theta_1 = f_1(Bi, Fo), \quad (7.24)$$

$$Q / Q_0 = f_2(Bi, Fo). \quad (7.25)$$

Для циліндричної стінки:

$$Bi = \frac{\alpha r}{\lambda_{ct}}, \quad Fo = \frac{a_T \tau}{r^2},$$

де  $r$  – радіус циліндра.

Величини  $\theta_{ct} / \theta_1$ ,  $\theta_y / \theta_1$ ,  $Q / Q_0$  також можна визначити з таблиць, а потім знайти  $t_{cm}$ ,  $t_y$  та  $Q$  (табл. 7.2).

Внутрішню енергію ділянки циліндра довжиною  $l$ , відраховану від її значення при температурі середовища як від умовного нуля, знаходимо за формулою:

$$Q_0 = \pi r^2 \cdot l \cdot \rho \cdot c \cdot \theta_1. \quad (7.26)$$

**Таблиця 7.2 – Параметри процесу нестационарної теплопровідності для нескінченного циліндра**

Число Фур'є	Число Біо (Bi)									
	0,0001	0,001	0,01	0,1	0,5	1	4	10	20	50
<i>l</i>	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\theta_y / \theta_1 = f(Bi, Fo)$										
<b>0,01</b>	–	–	–	–	–	–	–	1,0	1,0	1,0
<b>0,05</b>	–	–	–	–	1,0	1,0	1,0	0,99	0,99	0,99
<b>0,1</b>	–	–	–	1,0	0,99	0,97	0,94	0,9	0,88	0,87

0,25	–	–	1,0	0,98	0,89	0,81	0,59	0,48	0,43	0,4
0,5	–	–	0,99	0,93	0,72	0,55	0,24	0,15	0,12	0,1
1,0	–	–	0,98	0,84	0,46	0,25	0,04	0,01	0,01	0,01
2,5	–	1,0	0,95	0,63	0,12	0,0	0,0	0,0	0,00	0,00
5	1,0	0,99	0,91	0,38	0,01	0,0	–	–	–	–
10	1,0	0,98	0,82	0,14	0,0	–	–	–	–	–
25	1,0	0,95	0,61	0,01	–	–	–	–	–	–

Продовження таблиці 7.2

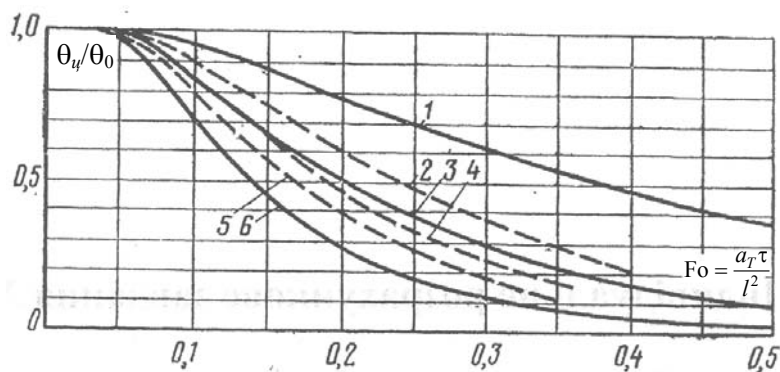
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\theta_{cm} / \theta_1 = f_1(Bi, Fo)$										
0,01	–	–	1,0	0,99	0,95	0,89	0,66	0,42	0,24	0,11
0,05	–	1,0	0,99	0,97	0,87	0,77	0,42	0,21	0,1	0,05
0,1	–	1,0	0,99	0,96	0,82	0,69	0,31	0,14	0,06	0,03
0,25	–	1,0	0,99	0,93	0,71	0,53	0,17	0,06	0,03	0,01
0,5	–	1,0	0,99	0,88	0,67	0,35	0,07	0,02	0,01	0,0
1,0	–	1,0	0,98	0,8	0,36	0,16	0,01	0,0	–	–
2,5	–	1,0	0,95	0,6	0,1	0,02	0,0	–	–	–
5	1,0	0,99	0,90	0,37	0,01	0,0	–	–	–	–
10	1,0	0,98	0,82	0,14	0,0	–	–	–	–	–
25	1,0	0,95	0,61	0,01	–	–	–	–	–	–
$Q / Q_0 = f_2(Bi, Fo)$										
0,01	–	–	–	–	0,01	0,02	0,05	0,11	0,15	0,18
0,05	–	–	–	0,01	0,05	0,08	0,21	0,32	0,38	0,42
0,1	–	–	–	0,02	0,09	0,15	0,37	0,48	0,54	0,58
0,25	–	–	–	0,05	0,2	0,33	0,62	0,75	0,79	0,81
0,5	–	–	0,01	0,09	0,36	0,55	0,85	0,92	0,94	0,95
1,0	–	–	0,02	0,18	0,59	0,79	0,98	0,99	1,0	1,0
2,5	–	–	0,05	0,39	0,89	0,98	1,0	1,0	1,0	1,0
5	–	0,01	0,09	0,62	0,99	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
10	–	0,02	0,18	0,86	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
25	–	0,04	0,39	0,99	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0

**3. Нагрів і охолодження тіл кінцевих розмірів.** Швидкість процесу поширення теплоти для будь-якого тіла тим більша, чим більше відношення площі його поверхні до об'єму. У цьому легко переконатися, якщо для тіл різної форми порівняти значення безрозмірної температури  $\theta_y / \theta_0$  залежно від числа Фур'є, при умові, що  $Bi \rightarrow \infty$  (рис. 7.3).

Аналіз рисунка показує, що для сфери швидкість зміни температури більша, ніж для будь-яких інших тіл. Для циліндрич-

них і призматичних тіл швидкість процесу значною мірою залежить від їх довжини. Чим менша довжина, тим більша швидкість.

Тіла канонічної форми (пластина, циліндр, сфера) далеко не повністю вичерпують всі практично важливі для інженерної практики випадки. Короткі циліндри, прямокутні призми і паралелепіпеди можна розглядати відповідно як тіла, утворені перетином взаємно перпендикулярних циліндра і пластини, двох пластин і трьох пластин необмежених розмірів, але кінцевої товщини. Майже завжди тіло обмежене в двох або трьох напрямках, причому зрозуміло, що поле температури в його об'ємі завідомо нерівномірне ( $Bi \gg 0,1$ ).



- 1 – пластина; 2 – квадратна балка нескінченної довжини;  
3 – нескінченний циліндр; 4 – куб;  
5 – циліндр, довжина якого дорівнює діаметру; 6 – сфера

**Рис. 7.3 – Залежність безрозмірної температури для тіл різної форми при  $Bi \rightarrow \infty$**

Якщо вважати, що основні теплофізичні властивості матеріалу ( $\lambda$ ,  $c$ ,  $\rho$ ) не залежать від температури, то температури в дво- або тримірних областях можна розрахувати, використовуючи результати, одержані для тіл канонічної форми.

#### 7.4. Регулярний режим теплопровідності

Охолодження ізотропного тіла довільної форми в середовищі, яке має постійну температуру  $t_p$  і постійний в часі коефіцієнт тепло-

віддачі  $\alpha$ , визначається рівнянням теплопровідності:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a_T \nabla^2 t; \quad (7.27)$$

з граничними умовами:

$$\left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)_{n=0} = -\frac{\alpha}{\lambda} (t_{\text{ст}} - t_p).$$

Початкова умова  $\tau = 0$  та  $t_0 = f(x, y, z)$ .

Розв'язок рівняння (7.27) при  $t_p = \text{const}$  показує, що температура в довільній точці тіла самої різної форми (у т.ч. “неправильної”, складної) змінюється в часі за експонентним законом:

$$\theta = \sum_{i=1}^{\infty} A_{i \dots n} U_{i \dots n} e^{-m_{i \dots n} \tau}, \quad (7.28)$$

де  $\theta = t_{\text{тіла}} - t_p$  – надлишкова температура тіла;

$A_{i \dots n}$  – постійні, що залежать від форми тіла і початкового розподілу температур;

$U_{i \dots n}$  – функції координат, що характеризують зміну температури в просторі;

$m_{i \dots n}$  – постійні, є рядом позитивних зростаючих чисел ( $m_1 < m_2 < m_3 < \dots < m_i$ ).

Аналіз рівняння (7.28) показує, що протягом часу від нуля до деякого значення  $\tau_1$ , процес охолодження залежить від початкових умов охолодження, і має випадковий характер, що незв'язаний з умовами охолодження. Цей період визначається не тільки першим, але й наступними членами ряду (7.28). Цю стадію охолодження називають **першим періодом** охолодження або **невпорядкованим процесом**.

При часі, що перевищує деяке значення ( $\tau > \tau_1$ ), початкові умови починають відігравати другорядну роль і процес визначається повністю тільки умовами охолодження на поверхні тіла, його фізичними властивостями, геометричною формою та розмірами. Друга стадія охолодження називається **регулярним режимом** і описується першим членом ряду, тому що зі збільшенням часу ряд швидко збігається і всі члени його, за виключенням першого, пря-

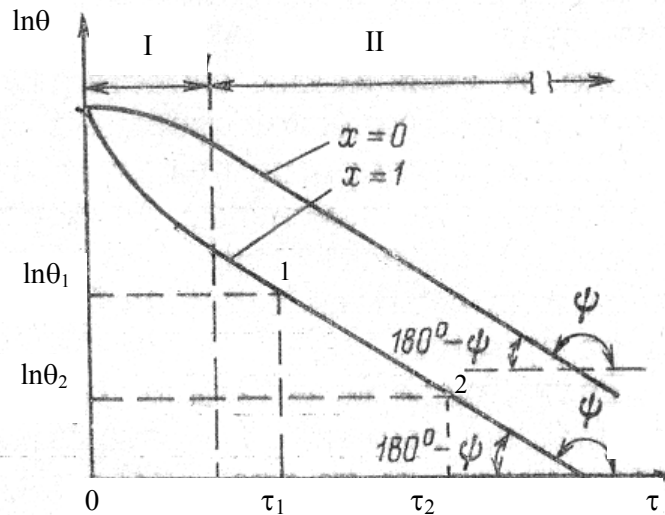
мують до нуля, тобто:

$$\theta = AUe^{-m\tau}. \quad (7.29)$$

Все викладене було добре відомо уже на початку ХХ ст., але тільки в 1954 році Г.М. Кондратьєв запропонував дуже просту і логічну теорію теплового режиму, який називається *регулярним*. У подальшому, дослідженнями А.В. Ликова, Г.Н. Дульнева та інших, теорія регулярного режиму була поширена на системи тіл з внутрішніми джерелами теплоти та інші, важливі для практики, випадки.

Теорія регулярного режиму вимагає, щоб теплообмін із середовищем відбувався при граничних умовах третього роду, а тепловий потік на межі тіла не міняв знака (тобто тіло повинно або нагріватись, або охолоджуватись протягом усього періоду процесу). Інших обмежень немає – форма тіла і початковий розподіл температури можуть бути довільними.

Якщо визначити (розрахунком або експериментально), як змінюється температура тіла в будь-яких точках 1 та 2 (рис. 7.4), а потім побудувати графіки  $\ln \theta = f(\tau)$ , де  $\theta = t - t_p$ , то в початковій стадії криві  $\ln \theta_1 = f(\tau)$  та  $\ln \theta_2 = f(\tau)$  будуть мати різний характер, а починаючи з певного періоду часу стануть паралельними прямими.



**Рис. 7.4 – Зміна температури тіла в часі:  
I – початкова стадія; II – стадія регулярного режиму**

Прологарифмуємо вираз (7.29) і після диференціювання по часу обох частин рівняння, одержимо:

$$\ln \theta = -m\tau + AU, \quad (7.30)$$

де  $m = -\frac{1}{\theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \tau}$  – темп охолодження (або нагріву), визнача-

ється із експерименту і характеризує інтенсивність відведення або підведення теплоти, входить в експоненціальну функцію (7.29) у вигляді множника при часі (розмірність –  $c^{-1}$ ).

Для двох довільних значень часу  $\tau_1$  та  $\tau_2$  за умови, що  $\tau_2 > \tau_1$  за формулою (7.30) можна визначити:

$$m = \operatorname{tg} \psi = \frac{\ln \theta_1 - \ln \theta_2}{\tau_2 - \tau_1}. \quad (7.31)$$

Таким чином, якщо зобразити криву охолодження у напівлогарифмічних координатах, то починаючи з деякого моменту часу, вона перетворюється в похилу криву, а темп охолодження тіла буде кутовим коефіцієнтом цієї кривої.

Використовуючи поняття темпу охолодження, Г.М. Кондратьєв сформулював дві теореми.

**Перша теорема Кондратьєва** – темп охолодження однорідного та ізотропного тіла при визначеному значенні коефіцієнта тепловіддачі прямо пропорційний йому та поверхні  $F$ , і обернено пропорційний його повній теплоємності:

$$m = \psi \frac{\alpha F}{C}, \quad (7.32)$$

де  $\psi$  – безрозмірний коефіцієнт пропорційності, який характеризує ступінь нерівномірності розподілу температури в тілі і має назву **коефіцієнта нерівномірності розподілу температури**;

$C = c\rho V$  – повна теплоємність тіла.

Якщо  $Bi \rightarrow 0$  ( $Bi < 0,1$ ) – розподіл температури в тілі не залежить від його розмірів і фізичних властивостей і, таким чином, середні об'ємні та поверхневі температури будуть однакові:

$$\bar{\theta}_F = \bar{\theta}_v \text{ та } \psi = \frac{\bar{\theta}_F}{\bar{\theta}_v} = 1. \quad (7.33)$$

При  $Bi \rightarrow \infty$  (як правило  $Bi > 100$ ), то процес охолодження визначається тільки розмірами тіла і його фізичними властивостями  $t_{сер} = t_{cm}$  та  $\psi \rightarrow 0$ . Таким чином, для всіх випадків  $0 \leq \psi < 1$ .

**Друга теорема Кондратьєва.** При  $Bi \rightarrow \infty$  або, що те саме  $\alpha \rightarrow \infty$ , темп охолодження  $m_\infty$  прямо пропорційний коефіцієнту температуропровідності, тобто:

$$a_T = km_\infty, \quad (7.34)$$

де  $k$  – коефіцієнт пропорційності, який залежить від геометричної форми і розмірів тіла (розмірність –  $m^2$ ).

Наприклад, для пластини товщиною  $2\delta$  при  $Bi \rightarrow \infty$  для  $Fo \ll 0,3$   $e^{-\mu_1^2 Fo} = e^{-m_\infty \tau}$ , звідки  $\mu_1 \approx \frac{\pi}{2}$ ;  $Fo = \frac{a_T \tau}{\delta^2}$ , отримаємо:

$$m_\infty = \frac{\mu_1^2 \cdot a_T}{\delta^2} = \frac{\pi^2 \cdot a_T}{4\delta^2} = \left(\frac{\pi}{2\delta}\right)^2 \cdot a_T.$$

Таким чином, коефіцієнт пропорційності становить:

– для пластини:

$$k = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2\delta}\right)^2};$$

– для сфери радіусом  $r_0$ :

$$k = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{r_0}\right)^2};$$

– для циліндра радіусом  $r_0$  та довжиною  $l$ :

$$k = \frac{1}{\left(\frac{2,405}{r_0}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2};$$

– для паралелепіпеда з розмірами  $l_1 \times l_2 \times l_3$ :

$$k = \frac{1}{(\pi/l_1)^2 + (\pi/l_2)^2 + (\pi/l_3)^2}.$$

Співвідношення (7.34) та (7.36) можна об'єднати, якщо ввести позначення

$$M = \frac{m}{m_\infty} = \frac{m \cdot k}{a_T} - \text{відносний темп охолодження};$$

$$B = \frac{\alpha}{\lambda} \cdot k \cdot \frac{F}{V} - \text{модифіковане число Біо}.$$

Тоді коефіцієнт

$$\psi = (1 + 1,44B + B^2)^{-\frac{1}{2}}. \quad (7.35)$$

Формула (7.35) показує оцінку нерівномірності регулярного поля температури в будь-якому тілі, якщо для нього відомі величини  $\lambda$ ,  $a_T$ ,  $\alpha$ ,  $k$ ,  $F$  та  $V$ .

Користуючись теорією регулярного теплового режиму можна визначити теплофізичні властивості матеріалу, який утворює однорідне тіло. Якщо рідину інтенсивно перемішувати ( $\alpha \rightarrow \infty$ ), то за формулою (7.34) можна визначити коефіцієнт теплопровідності. Якщо на межі тіла підтримувати постійне значення величин  $a_T$  та  $\alpha$ , то спочатку можна визначити число Біо, а потім і коефіцієнт теплопровідності  $\lambda$ .

Все наведене стосується процесу нагріву або охолодження тіла в середовищі з температурою  $t_p = \text{const}$  при  $\text{Fo} \ll 0,3$ , такий процес називають *регулярним режимом першого роду*. Якщо температура середовища змінюється в часі лінійно ( $t_p = t_{p0} + \omega\tau$ ) або гармонічно ( $t_p = t_{p0} + t_m \cdot \cos \pi\omega\tau$ ), то говорять про регулярний режим відповідно другого чи третього роду.

В 1967 році А.В. Ликов показав, що всі різновиди регуляр-

ного режиму характеризує одна особливість: швидкість нагріву тіла прямо пропорційна різниці температури середовища  $t_p$  і середньомасової температури тіла  $\bar{t}$ :

$$-\frac{\partial \bar{t}}{\partial \tau} = m(t_p - \bar{t}).$$

Важливо пам'ятати, що в цій формулі темп охолодження  $m$  залежить не тільки від розмірів, теплофізичних властивостей і граничних умов, але і від того, як змінюється температура середовища.

Метод регулярного теплового режиму використовує простий математичний апарат і зручний як при експериментальних, так і при аналітичних розрахунках процесів нестационарної теплопровідності.

**Приклад 7.1.** Визначити тривалість часу для двостороннього нагріву поверхні плоскої сталеві плити товщиною  $2\delta = 200$  мм до  $850$  °С, а також знайти перепад температур по товщині плити в момент закінчення нагріву. Густина металу  $\rho = 7850$  кг/м<sup>3</sup>, коефіцієнт теплопровідності  $\lambda = 40,6$  Вт/м·К, масова теплоємність  $c = 709$  Дж/кг·К, початкова температура пластини  $t_0 = 20$  °С, коефіцієнт тепловіддачі від поверхні плити до навколишнього середовища  $\alpha = 180$  Вт/м<sup>2</sup>·К.

#### **Розв'язок**

Як характерний розмір, приймаємо половину товщини пластини  $l = \delta = 100$  мм = 0,1 м, після чого знаходимо число Біо:

$$Bi = \frac{\alpha l}{\lambda} = \frac{180 \cdot 0,1}{40,6} = 0,443.$$

Розрахуємо відносну температуру поверхні плити в момент закінчення нагріву:

$$\theta_{\text{пов}} = \frac{t_{\text{печи}} - t_{\text{пластини}}}{t_{\text{печи}} - t_0} = \frac{900 - 850}{900 - 20} = 0,0568.$$

Використовуючи залежність температури поверхні необмеженої пластини від критерію Біо (див. табл. 7.1) за знайденою ординатою  $\theta_{\text{пов}}$  і числом  $Bi = 0,443$ , знаходимо абсцису – число Фур'є ( $Fo = 7,0$ ).

Визначаємо коефіцієнт температуропровідності пластини:

$$a_T = \frac{\lambda}{c\rho} = \frac{40,6}{709 \cdot 7850} = 0,0728 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}.$$

Після цього знайдемо час нагріву плити з виразу для числа Фур'є:

$$\tau = Fo \frac{l^2}{a_T} = 7,0 \frac{0,1^2}{0,0728 \cdot 10^{-4}} = 9612 \text{ с}.$$

Для визначення температури середньої площини пластини використаємо таблицю 7.1, із якої за числами  $Fo = 7,0$  та  $Bi = 0,443$  знайдемо ординату  $\theta_y = 0,07$ , яка являє собою відносну температуру середньої площини плити.

Дійсна температура цієї площини буде дорівнювати:

$$t_y = t_{\text{печі}} - \theta_y (t_{\text{печі}} - t_0) = 900 - 0,07(900 - 20) = 838,5 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Таким чином, перепад температур по товщині плити в кінці нагріву складає:

$$\Delta t_k = t_{\text{пов}} - t_{\text{ц}} = 850 - 838,5 = 11,5 \text{ }^\circ\text{C}.$$

### Контрольні питання

1. Наведіть приклади періодичних нестационарних процесів теплопровідності.
2. Наведіть приклади і охарактеризуйте особливості процесу нестационарної теплопровідності при прямуванні тіла до теплової рівноваги.
3. Поясніть метод розв'язку нестационарного рівняння теплопровідності для пластини.
4. Дайте визначення критеріїв Біо та Фур'є, поясніть їх фізичний зміст.
5. Що таке безрозмірна надлишкова температура?
6. Охарактеризуйте особливості розв'язку диференціального рівняння нестационарної теплопровідності залежно від числа Фур'є.
7. Як визначити час, необхідний для прогрівання середини пластини до заданої температури у випадку, коли  $Fo > 0,3$ ?
8. Запишіть формули для визначення чисел Біо та Фур'є для циліндра.

9. На основі якої теореми визначаються температури тіл заданих розмірів. Наведіть її формулювання.
10. Перерахуйте стадії охолодження тіла і охарактеризуйте їх.
11. Поясніть методику експериментального визначення стадії регулярного режиму охолодження тіла.
12. Сформулюйте дві теореми Г.М. Кондратьєва.
13. Чим відрізняються один від одного регулярні режими першого, другого і третього родів?

### Тестові завдання

#### 1. Нестационарний процес теплопровідності – це процес...

- а) який відбувається при зміні температури тіла всередині його об'єму протягом певного часу;
- б) перенесення постійного теплового потоку всередині об'єму тіла за певний заданий змінний проміжок часу;
- в) який характеризується зміною температури тіла при раптовій зміні температури зовнішніх та внутрішніх джерел теплоти;
- г) який характеризується постійними похідними температури по координатних осях протягом певного змінного періоду часу.

#### 2. Для визначення постійних інтегрування при розв'язку диференціального рівняння нестационарної теплопровідності найчастіше використовують:

- а) розподіл температури на поверхні тіла та її зміну в часі;
- б) значення величини теплового потоку, що проходить через поверхню тіла і його зміну в часі;
- в) значення температури середовища, що оточує поверхню тіла та коефіцієнт тепловіддачі між середовищем і поверхнею;
- г) значення теплофізичних параметрів поверхні тіла і їх зміну в часі.

#### 3. Де розміщена точка, через яку проходять дотичні до кривих, що відображають закономірність зміни температури на поверхні тіла в часі?

- а)  $\lambda_c/\alpha$ ;      б)  $\lambda_c/\delta$ ;      в)  $\lambda_c \cdot \delta$ ;      г)  $\alpha/\lambda_c$ .

#### 4. Найбільш часто для аналізу нестационарних процесів теплопровідності використовують групу критеріїв:

- а) Fo, Bi, X;      б) Eu, Bi, Gr;      в) Bi, X, Nu;      г) Fo, Fr, Pr.

#### 5. Системи з дуже малим внутрішнім термічним опором – це системи, у яких термічний опір теплопровідності...

- а) набагато менший опору конвективного теплообміну на поверхні;  
 б) значно більший опору конвективного теплообміну на поверхні;  
 в) співпадає з опором конвективного теплообміну на поверхні;  
 г) у співвідношенні до термічного опору конвективного теплообміну забезпечує значення числа Біо більше одиниці.

**6. Вкажіть правильний аналітичний вираз для числа Біо:**

- а)  $Bi = \lambda_{cm} / \alpha l_{cm}$ ;                      в)  $Bi = \alpha / \lambda_{cm}$ ;  
 б)  $Bi = \alpha l_{cm} / \lambda_{cm}$ ;                      г)  $Bi = \lambda_{cm} / \alpha$ .

**7. При якому значенні числа Біо вважають, що тіло має рівномірний розподіл температур?**

- а)  $Bi > 0,1$ ;              б)  $Bi = 0,1$ ;              в)  $Bi < 0,1$ ;              г)  $Bi < 0,2$ .

**8. При яких значеннях числа Біо тіло вважається масивним?**

- а)  $Bi < 0,1$ ;              б)  $Bi > 0,25$ ;              в)  $Bi = 0,25$ ;              г)  $Bi < 0,25$ .

**9. Вкажіть правильну формулу зміни температури з часом для тіла з рівномірним полем температури:**

- а)  $\frac{\theta(\tau)}{\theta_0} = e^{-\left(\frac{\alpha F}{\rho V c}\right)\tau}$ ;                      в)  $\frac{\theta(\tau)}{\theta_0} = e^{-BiFo\tau}$ ;  
 б)  $\theta(\tau) = e^{-BiFo}$ ;                      г)  $\theta(\tau) = e^{-\left(\frac{\alpha F}{\rho V c}\right)\tau}$ .

**10. Вкажіть правильний вираз для температури поверхні при нагріві плоскої необмеженої пластини:**

- а)  $\theta_{cm} = f(Bi; Fo)$ ;                      в)  $\theta_{cm} / \theta_1 = f(Bi; Fo)$ ;  
 б)  $\theta_y / \theta_1 = f_1(Bi; Fo)$ ;                      г)  $\theta_y = f(Bi, Fo)$ .

**11. Виберіть правильний вираз для визначення кількості теплоти, що виділяється при охолодженні пластин:**

- а)  $Q_o = 2F c \rho \delta \theta_1$ ;                      в)  $Q_o = \pi r^2 l \rho c \theta_1$ ;  
 б)  $Q / Q_o = f(Bi; Fo)$ ;                      г)  $Q_o = 2\delta \cdot c \rho (t_0 + t_{cep.cm})$ .

**12. Вкажіть аналітичний розв'язок для неупорядкованого процесу охолодження ізотропного тіла довільної форми:**

- а)  $\theta = A i_1^{-m\tau}$ ;                      в)  $\theta = \sum_{i=1}^{\infty} A_i U_i e^{-m_i\tau}$ ;

$$\text{б) } m = -\frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} c^{-1} i; \quad \text{г) } \theta = \text{tg} \varphi \cdot \frac{\ln \theta_1 - \ln \theta_2}{\tau_2 - \tau_1}.$$

**13. Вкажіть аналітичний вираз для регулярного режиму охолодження ізотропного тіла довільної форми:**

$$\text{а) } \theta = A i_1^{-m \tau}; \quad \text{в) } \theta = \sum_{i=1}^{\infty} A_i U_i e^{-m_i \tau};$$

$$\text{б) } m = -\frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} c^{-1}; \quad \text{г) } m = -\frac{1}{\theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \tau}.$$

**14. Виберіть правильне формулювання другої теореми Кондратьєва:**

а) темп охолодження однорідного та ізотропного тіла при кінцевому значенні коефіцієнта тепловіддачі  $\alpha$  пропорційний поверхні тіла  $F$  і обернено пропорційний його повній теплоємності;

б) коли критерій  $Bi \rightarrow \infty$  або, що те саме  $\alpha \rightarrow \infty$ , темп охолодження прямо пропорційний коефіцієнту теплопровідності, тобто  $a_T = K_{\phi} m_{\infty}$ ;

в) якщо критерій  $Bi \rightarrow 0$  ( $Bi < 0,1$ ), розподіл температур в тілі не залежить від його розмірів і фізичних властивостей і, таким чином, середні за об'ємом та поверхнею температури будуть однакові;

г) для дуже великих значень числа Біо ( $Bi \rightarrow \infty$ ) темп охолодження (нагріву) обернено пропорційний коефіцієнту теплопровідності  $\lambda$  і прямо пропорційний повній теплоємності.

**15. Вкажіть правильний вираз для темпу охолодження при регулярному режимі:**

$$\text{а) } m = \frac{\ln \theta_1 - \ln \theta_2}{\tau_2 - \tau_1}; \quad \text{в) } m = \frac{\alpha F}{c \rho v \cdot \Psi};$$

$$\text{б) } m = \frac{\tau_2 + \tau_1}{\ln \theta_1 + \ln \theta_2}; \quad \text{г) } m = \Psi \frac{\alpha C}{F}.$$

**16. Якщо температурне поле в твердій стінці змінюється в часі, то процес теплопровідності буде:**

а) нерівномірним;

в) непостійним;

б) нестабільним;

г) нестационарним.

**17. Для математичного опису нестационарного процесу теплопровідності диференціальне рівняння необхідно доповнити граничними умовами:**

- а) першого роду;
- б) другого роду;
- в) третього роду;
- г) четвертого роду.

**18. При нестационарних процесах теплопровідності найбільш швидко температура змінюється:**

- а) на поверхні тіла;
- б) у центральній площині тіла;
- в) у довільних точках тіла;
- г) однаково на поверхні і в центральній площині тіла.

**19. Одиниця вимірювання темпу охолодження:**

- а) град.<sup>-1</sup>;
- б) с<sup>-1</sup>;
- в) град./с;
- г) град.·с.

## ФІЗИЧНІ ОСНОВИ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМІНУ

---

- Основні поняття та визначення. Фізичні властивості рідини. Основний закон конвективного теплообміну
- Теорія граничного шару Прандтля. Режими течії рідини
- Диференціальні рівняння конвективного теплообміну

### 8.1. Основні поняття та визначення. Фізичні властивості рідини.

#### Основний закон конвективного теплообміну

Другий вид теплообміну – *конвекція* – відбувається тільки в газах і рідинах і полягає в тому, що перенесення теплоти здійснюється сумісною дією рухомих в просторі об'ємів або часток середовища. Сумісна дія конвективного і молекулярного переносу теплоти мікрочастинками тіла носить назву *конвективний теплообмін*.

Розглянемо основні поняття та терміни, які характеризують цей процес.

Відповідно до другого закону термодинаміки такий процес можливий лише тоді, коли температура поверхні відрізняється від температури теплоносія. Теплоносієм може бути будь-яке середовище: *стискуване* (газ, пара) або практично *нестискуване* (краплинна рідина). Якщо швидкість руху газу або пари суттєво менша швидкості звуку, то стискуванню можна знехтувати і в такому випадку використовують тільки один термін – *рідина*, відносячи його до рухомого середовища будь-якої фізичної природи та агрегатного стану. При цьому, конвективний теплообмін можна умовно розділити на два види (рис. 8.1).

*Тепловідача* – перенесення теплоти між поверхнею тіла і рідиною.

*Теплопередача* – перенесення теплоти від однієї рідини до другої через розділяюче їх тверде тіло, яке носить умовну назву – стінка.

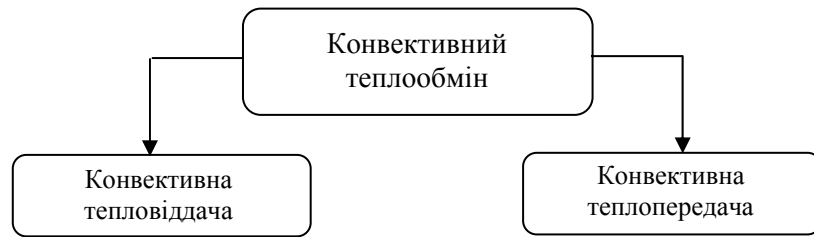


Рис. 8.1 – Види перенесення теплоти при конвекції

З іншого боку, якщо рух рідини викликаний дією неоднорідного поля масових сил (гравітаційних, магнітних, електричних), то говорять про *вільну конвекцію*. Якщо ж на рідину діють зовнішні сили, прикладені на її межі, внутрішні однорідні масові сили або ж кінетична енергія, надана потоку рідини зовні, то розглядають *вимушену конвекцію* (рис. 8.2). Зазвичай, вимушену конвекцію викликає примусове переміщення рідини будь-яким нагнітачем – вентилятором, компресором чи насосом.

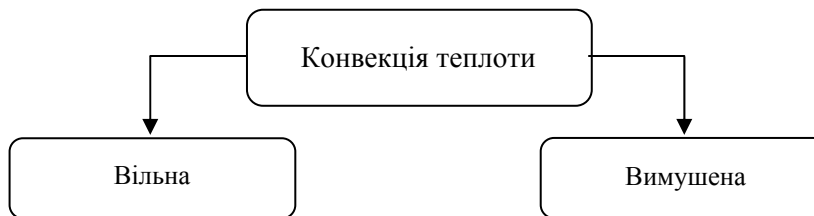


Рис. 8.2 – Види конвекції теплоти

*Вільна конвекція* виникає під дією масових сил і наявності різниці температур в різних точках рідини. *Вимушена конвекція* виникає під дією поверхневих сил.

Характерні розміри області, де відбувається течія рідини майже завжди значно більша, порівняно з довжиною вільного пробігу молекул рідини і тому рідке середовище вважають *неперервним*. Це означає, що і температура в рідині розподілена неперервно, тому градієнт температури і вектор густини теплового потоку зберігають такий самий зміст, як і в теорії теплопровідності.

Поверхня тіла, через яку переноситься теплота, називається *поверхнею теплообміну* або *поверхнею тепловіддачі*.

Інтенсивність конвективного теплообміну у першу чергу залежить від **режиму руху** рідини або газу та їх фізичних властивостей. Вперше режими течії рідини дослідив Осборн Рейнольдс у 1883 році. Він встановив, що при переміщенні рідини зустрічаються три види руху: **ламінарний**, **перехідний** і **турбулентний потоки**.

У **ламінарному потоці** частинки рухаються тільки по паралельних між собою траєкторіях і рух їх довгочасно збігається з напрямом потоку, тобто шаровим рухом. Як приклад, можна розглянути течію спокійної рівнинної ріки. У **турбулентному потоці** безперервно відбувається перемішування всіх шарів рідини. Потік являє собою безладну масу частинок, що хаотично рухаються. Чим більше пульсацій і завихрень, тим більше турбулентність потоку, тим більша інтенсивність перемішування. Потік, що знаходиться в проміжному стані між ламінарним і турбулентним називається **перехідним** (рис. 8.3).

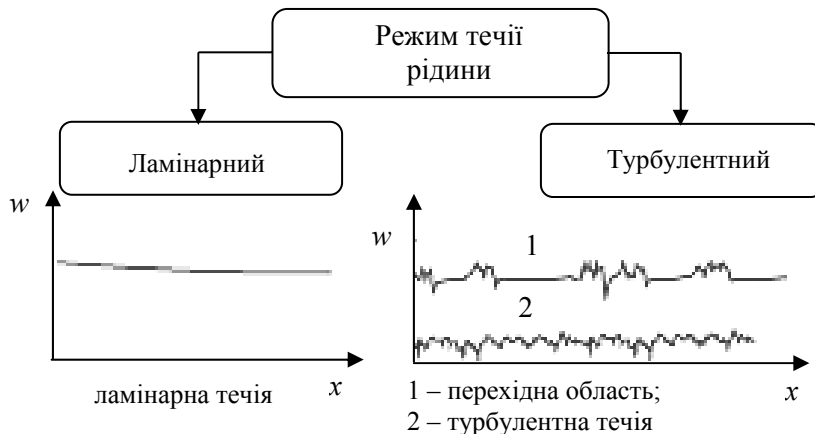


Рис. 8.3 – Характер руху рідини в каналах

Характер руху рідини в круглій трубці визначається величиною безрозмірного співвідношення  $\bar{w}d/\nu$ , що називається **числом Рейнольдса**, де  $\bar{w}$  – середня швидкість руху рідини, м/с;  $d$  – характерний розмір, для круглій труби – це діаметр, для каналу неправильної геометричної форми – еквівалентний діаметр, м;  $\nu$  – кінематичний коефіцієнт в'язкості, м<sup>2</sup>/с.

Встановлено, що для значень  $Re < 2300$  режим руху ламінарний, для  $Re = 2300$  – перехідний і для  $Re > 2300$  – турбулентний.

Однак, у діапазоні  $Re = 2300 \dots 10000$  будемо мати режим нестійкої турбулентності (змішаний), і тільки для  $Re > 10000$  – турбулентність стає стійкою, розвинутою.

Для каналу довільного перерізу вводиться поняття **еквівалентного діаметра**:

$$d_{екв} = \frac{4F}{\Pi}, \quad (8.1)$$

де  $F$  – площа поперечного перерізу каналу,  $m^2$ ;  $\Pi$  – повний (змочений) периметр перерізу незалежно від того, яка частина цього периметра приймає участь в теплообміні.

Значний вплив на теплообмін здійснюють наступні фізичні параметри теплоносія: коефіцієнт теплопровідності, теплоємність, густина, температуропровідність, в'язкість. У конвективному теплообміні велике значення має в'язкість. Усі реальні рідини мають таку властивість: між частинками або шарами, які рухаються з різними швидкостями завжди виникають сили внутрішнього тертя, які або прискорюють рух більш повільного шару, або гальмують рух більш швидкого. **В'язкість** – це властивість рідини або газу здійснювати опір руху (переміщенню одного шару рідини відносно іншого). Вона характеризується динамічним і кінематичним коефіцієнтами в'язкості.

Величина сили тертя  $s_{тер}$  між шарами віднесена до одиниці поверхні, відповідно закону Ньютона пропорційна градієнту швидкості  $dw/dn$  по нормалі до напрямку руху потоку:

$$s_{тер} = \mu \left( \frac{dw}{dn} \right), \quad (8.2)$$

де  $\mu$  – коефіцієнт пропорційності, що залежить від природи рідини та її температури і називається **динамічним коефіцієнтом в'язкості**, його розмірність –  $H \cdot c/m^2$  або  $Pa \cdot c$ .

Якщо прийняти відношення  $dw/dn = 1$ , тоді  $s_{тер} = \mu$ , тобто динамічна в'язкість характеризує силу тертя, яка приходиться на одиницю поверхні контакту “сусідніх” шарів рідини при одиничному градієнті швидкості.

Закон в'язкого тертя Ньютона (8.2) швидше феноменологічна гіпотеза, оскільки коефіцієнт  $\mu$  залежить від температури та деяких інших факторів. Для краплинних рідин величина  $\mu$  майже не пов'я-

зана з тиском і зменшується при зростанні температури. Для газів значення  $\mu$  із збільшенням температури також зростає, але мало змінюється при зростанні тиску.

У рівняннях тепловіддачі частіше використовується кінематичний коефіцієнт в'язкості ( $\text{m}^2/\text{s}$ ):

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (8.3)$$

Для краплинних рідин значення  $\nu$  змінюється залежно від зміни температури майже так само, як і для динамічної в'язкості, але для газів величина  $\nu$  значно залежить від тиску.

На тепловіддачу впливає величина стиснення рідини. *Ізотермічним стисненням* або *коефіцієнтом стиснення тіла* при  $t = \text{const}$  називають параметр:

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T, \quad (8.4)$$

що являє собою відносну зміну густини речовини при зміні тиску. Для краплинних рідин ізотермічне стиснення досить мале. В реальних умовах у процесах конвективного теплообміну можна прийняти, що використовуються практично нестискувані середовища. Для газів, при швидкостях руху, більших 25 % місцевої швидкості звуку, вводять особливі, викликані стисненням корективи у процеси тепловіддачі та враховують тепловий ефект тертя.

Окрім ізотермічного стиснення для конвективного теплообміну велике значення має теплове розширення рідини. Останнє характеризується *температурним коефіцієнтом об'ємного розширення*:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{p=\text{const}}. \quad (8.5)$$

Відповідно до визначення, температурний коефіцієнт об'ємного розширення  $\beta$ , являє собою відносну зміну об'єму при зміні температури в один градус (розмірність –  $\text{K}^{-1}$ ).

Температурний коефіцієнт об'ємного розширення рідин значно менший, ніж газів. У невеликому діапазоні зміни температури, а, відповідно, і питомих об'ємів, у рівнянні (8.5) похідну можна замінити відношенням кінцевих різниць параметрів холодної і нагрітої рідини, тобто:

$$\beta = \frac{1}{v_z} \left( \frac{v_z - v_x}{t_z - t_x} \right) = \frac{\rho_x - \rho_z}{\rho_x (t_z - t_x)}. \quad (8.6)$$

Різниця густини рідини приводить до того, що на будь-який одиничний об'єм прогрітої рідини буде діяти підйомна сила, яка дорівнює алгебраїчній сумі виштовхувальної архімедової сили і сили тяжіння. За рахунок цієї підйомної сили і виникає вільна конвекція.

Для ідеального газу температурний коефіцієнт об'ємного розширення є величина обернена абсолютній температурі газу:

$$\beta = \frac{1}{T}. \quad (8.7)$$

Основна задача теорії конвективного теплообміну – встановити зв'язок між густиною теплового потоку на межі “поверхня–рідина” і температурою поверхні та температурою рідини. Експериментально встановлено, що в тонкому шарі біля поверхні рідина практично нерухома і теплота передається тільки молекулярним шляхом. З іншої сторони, експерименти показали, що тепловий потік у процесі тепловіддачі пропорційний площі поверхні теплообміну  $F$  і різниці температур поверхні  $t_{cm}$  та рідини  $t_p$ :

$$Q_{\tau} = \alpha F (t_p - t_{ct}), \quad (8.8)$$

де  $\alpha$  – коефіцієнт пропорційності, який називають **коефіцієнтом тепловіддачі**.

Коефіцієнт тепловіддачі характеризує інтенсивність конвективного теплообміну і чисельно дорівнює густині теплового потоку на поверхні розділу між рідиною та стінкою і віднесений до температурного напору (різниці температур), який має назву **рушійна сила процесу тепловіддачі**.

Залежність (8.8) називають законом тепловіддачі Ньютона–Ріхмана. Назва стала загальноприйнятою, хоча вперше лінійний зв'язок теплового потоку з різницею температур рідини і стінки експериментально встановив Ж.-Б. Фур'є. Розмірність параметра  $\alpha$  – Вт/м<sup>2</sup>К, його значення змінюється в широкому діапазоні – від 5...30 Вт/м<sup>2</sup>К – при вільній конвекції в газах до  $4 \cdot 10^4 \dots 1,2 \cdot 10^5$  Вт/м<sup>2</sup>К – при крапельній конденсації пари.

Початково вважали, що цей коефіцієнт характеризує властивість рідини “відбирати теплоту”, однак пізніше встановили, що

він майже лінійно збільшується із зростанням швидкості потоку і залежить від фізичних властивостей рідини, форми поверхні теплообміну, геометричних параметрів та багатьох інших факторів. Тому закон Ньютона–Ріхмана прийнято вважати лише гіпотезою, яка підтверджується більш-менш надійно лише при правильному визначенні коефіцієнта тепловіддачі.

Розрізняють також *середній коефіцієнт тепловіддачі* – при умові, що на всіх ділянках поверхні приймають середні температурні параметри, а також *місцевий коефіцієнт тепловіддачі*, який дорівнює місцевій густині теплового потоку, віднесений до місцевого значення температурного напору, або в диференціальній формі:

$$dQ_{\tau} = \alpha dF (t_{\text{ст}} - t_p). \quad (8.9)$$

Як відомо, тепловий потік пропорційний різниці температур:

$$t_{\text{ст}} - t_p = F_T Q_{\tau}$$

або

$$Q_{\tau} = \frac{t_{\text{ст}} - t_p}{F_T}, \quad (8.10)$$

де  $A_T$  – термічний коефіцієнт.

Якщо між поверхнею тіла і навколишнім середовищем відсутні джерела і стоки теплоти (наприклад, в граничному шарі не відбуваються екзо- і ендотермічні реакції), то величина теплового потоку при переміщенні від ізотермічної поверхні з температурою  $t_{cm}$  до середовища з  $t_p$  не змінюється, то термічний коефіцієнт можна рахувати термічним опором, тобто:

$$F_T = R_k = \frac{1}{\alpha F}, \quad (8.11)$$

або

$$\sigma = \alpha F, \quad (8.12)$$

де  $\sigma$  – термічна провідність.

Розглянемо ще раз рівняння (8.8) і запишемо вираз для теплового потоку приповерхневої області, взявши за основу гіпотезу Біо–Фур’є для процесу теплопровідності:

$$-\lambda_p \frac{\partial t}{\partial n} \Big|_{n=0} \cdot F = \alpha(t_p - t_{cm}) \cdot F.$$

Розв'язавши цю залежність, отримаємо:

$$\alpha = \frac{-\lambda_p \frac{\partial t}{\partial n} \Big|_{n=0}}{t_p - t_{cm}}. \quad (8.13)$$

Це рівняння носить назву **рівняння тепловіддачі**. Температура рідини  $t_p$  приймає своє постійне значення на деякій відстані від стінки  $\delta$ , яку називають **товщиною теплового приграничного шару**.

У першому наближенні градієнт температури можна записати через наступний вираз:

$$\frac{\partial t}{\partial n} \Big|_{n=0} = \frac{t_p - t_{cm}}{\delta}, \quad (8.14)$$

і тоді

$$\alpha = \frac{-\lambda_p \left( -\frac{t_p - t_{cm}}{\delta} \right)}{t_p - t_{cm}} = \frac{\lambda_p}{\delta}. \quad (8.15)$$

Це рівняння можна використати для якісної оцінки процесу теплопередачі, якщо відомо хоча би порядок величини  $\delta$ , яку можна визначити на основі досліджень Л. Прандтля.

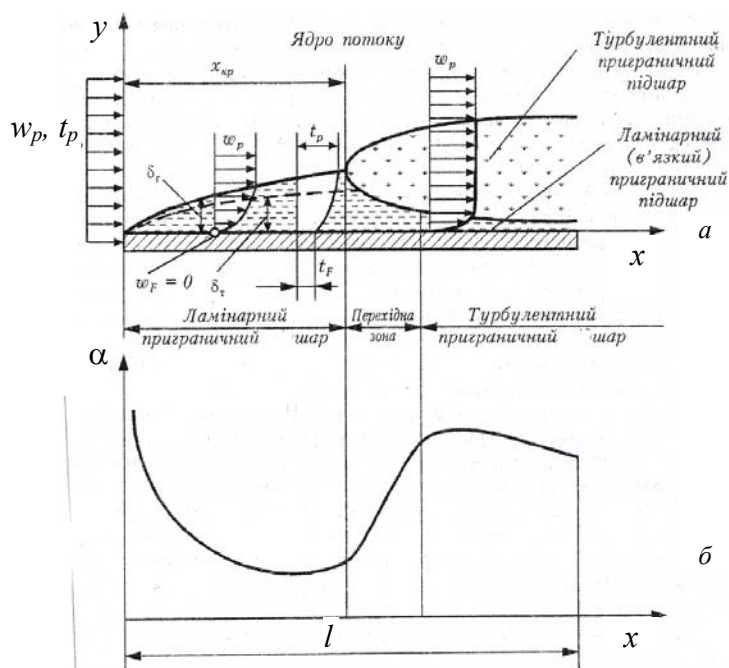
## 8.2. Теорія граничного шару Прандтля. Режими течії рідини

Теоретичний розгляд задач конвективного теплообміну базується на використанні теорії приграничного шару, яка дозволяє описати особливості поведінки теплоносія у безпосередньому контакті біля стінки.

За сучасними поглядами рідина складається не із окремих незалежних молекул, а з так званих рідких згустків – об'єднань великого числа молекул (біля  $10^5$ – $10^7$ ), які ведуть себе як тверде тіло. Межі рідкого згустку нестабільні і деякі молекули можуть відриватись від одного згустку, прилипаючи до сусіднього та навпаки.

Ковзання по поверхнях рідких згустків забезпечує текучість рідини. Дотикаючись до стінки, згустки прилипають до неї і практично миттєво прогриваються до її температури. Ця гіпотеза, яка була висловлена німецьким фізиком Людвігом Прандтлем у 1904 році підтверджується на практиці для абсолютної більшості краплинних рідин та газів.

Проковзування згустків спостерігається тільки при дуже великих швидкостях або значному розрідженні. Ця властивість згустків в основному визначає картину руху біля стінки і характер теплообміну в цій зоні. Для прикладу розглянемо ізотермічне натікання потоку рідини на плоску поверхню (рис. 8.4).



**Рис. 8.4 – Утворення приграничного шару (а) і розподіл місцевого коефіцієнта тепловіддачі (б) під час поздовжнього обтікання тонкої пластини**

На вході рідина має рівномірний розподіл швидкості. Згустки, які дотикаються до стінки, прилипливши до неї, утворюють тонкий нерухомий шар. Шар, що слідує над цим нерухомим

шаром, буде значно гальмуватись силами внутрішнього тертя, причому тим сильніше, чим довше продовжується рух. При цьому, чим більша відстань, тим значніша швидкість цього шару. Таким чином, при омиванні поверхні, потік рідини якби розділяється на дві частини: приграничний шар і зовнішній потік. У зовнішньому потоці переважають сили інерції, в'язкісні сили майже не впливають на течію, а в приграничному шарі сили в'язкості та інерційні сили – співмірні.

Шар, всередині якого швидкість рідин змінюється від 0 до  $0,99 w_p$  називається *гідродинамічним приграничним шаром*. Саме тут у повній мірі проявляється вплив внутрішнього тертя та формується гідравлічний опір каналу.

Аналогічно гідродинамічному шару, при наявності теплообміну, біля стінки виникає тепловий приграничний шар, всередині якого температура рідини змінюється від температури стінки до  $0,99 t_p$  (*тепловий приграничний шар*). За тепловим приграничним шаром температура рідини практично однакова і можна вважати, що там поперечного теплообміну немає.

Співставлення цих шарів приводить до висновку, що між ними існує однозначна відповідність – вони геометрично подібні. Фізичні особливості розглянутих процесів переконливо підтверджують, що для аналітичного розв'язання задачі поперечного теплообміну при русі теплоносія біля стінки необхідно мати математичний опис зв'язку між параметрами в межах приграничного шару.

Розглянемо процес повздовжнього омивання будь-якого тіла безграничним потоком рідини зі швидкістю руху  $w = \text{const}$ . В результаті впливу сил тертя безпосередньо біля поверхні тіла, швидкість падає до нуля (рис. 8.5).

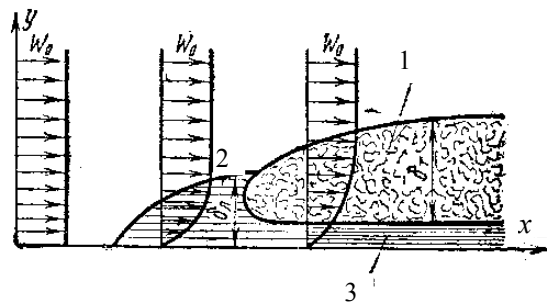


Рис. 8.5 – Зображення граничних гідродинамічних шарів при різних характерах руху рідини:  
1 – турбулентний, 2 – ламінарний, 3 – в'язкий або ламінарний підшар

Товщина цього шару  $\delta$  зростає вздовж потоку. Зі збільшенням швидкості вона зменшується в результаті здування його потоком. Зі збільшенням в'язкості, товщина шару зростає. Течія в граничному шарі може бути ламінарною, перехідною і турбулентною. Крім цього, лише біля самої поверхні в турбулентному приграничному шарі завжди зберігається тонкий ламінарний або в'язкий підшар, де швидкість невелика і сили в'язкості гасять турбулентні вихори.

Про режим руху рідини роблять висновок на основі критичних значень числа Рейнольдса:

$$\text{Re}_{кр1} = \frac{w_0 x_{кр1}}{\nu}, \quad (8.16)$$

$$\text{Re}_{кр2} = \frac{w_0 x_{кр2}}{\nu}, \quad (8.17)$$

де  $x$  – поздовжня координата, що підраховується від переднього краю поверхні.

Знаючи  $\text{Re}_{кр1}$  та  $\text{Re}_{кр2}$ , можна розрахувати значення  $x_{кр1}$  та  $x_{кр2}$ . Досліди показують, що перехід до турбулентної течії може відбуватися при значеннях  $\text{Re}_{кр}$  від  $10^4$  до  $4 \cdot 10^6$ . На перехід впливають наступні характеристики потоку:

1) ступінь турбулентності

$$T_u = \sqrt{\frac{2E}{3w_0^2}}, \quad (8.18)$$

де  $E$  – кінетична енергія турбулентної течії;

$w_0$  – характерна швидкість процесу, для граничного шару вибирають швидкість набігаючого потоку;

2) частота пульсації;

3) інтенсивність теплообміну;

4) шорсткість і хвилястість поверхні, що омивається;

5) зручна обтічність переднього краю пластини;

6) вібрація тіла.

У промислових теплових установках приймають:

$$\Delta x = x_{кр2} - x_{кр1} = 0, \quad \text{Re}_{кр1} = \text{Re}_{кр2} = 10^5.$$

Аналогічно здійснюється і теплова взаємодія потоку з поверхнею стінки. Якщо температури рідини  $t_0$  і стінки  $t_{cm}$  неоднакові, то поблизу стінки утворюється тепловий приграничний шар, в якому відбуваються всі зміни температури рідини (рис. 8.6). Поняття теплового приграничного шару ввів російський дослідник Г.Н. Кружлілін. Приграничний шар зменшує інтенсивність теплообміну, оскільки теплота поширюється в ньому переважно за рахунок теплопровідності, яка у рідинах і газах незначна. Для інтенсифікації теплообміну необхідно, в першу чергу, збільшити швидкість руху рідини або газу, при цьому буде здійснюватись перехід від теплопровідності до конвекції.

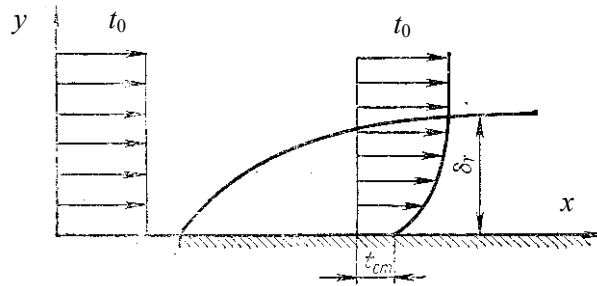


Рис. 8.6 – Зображення граничного теплового шару

Товщина гідродинамічного і теплового приграничного шарів у загальному випадку не співпадає – це залежить від роду рідини та деяких інших параметрів процесу течії і теплообміну. Співвідношення товщини гідродинамічного і теплового граничних шарів визначається числом Прандтля ( $Pr$ ), яке характеризує фізичні властивості середовища і має вигляд:

$$Pr = \frac{\nu}{a_T},$$

де  $\nu$  – кінематичний коефіцієнт в'язкості;  $a_T$  – коефіцієнт температуропровідності.

Для в'язких рідин (мастил) з низькою теплопровідністю  $Pr > 1$  (тобто товщина динамічного шару більша товщини теплового), для газів  $Pr \approx 1$  (товщини шарів співпадають), для рідких металів  $Pr < 1$  (тепловий шар проникає в область динамічного шару).

Якщо рух рідини всередині теплового приграничного шару ламінарний, то тепловий потік в напрямку, перпендикулярному до поверхні стінки, переноситься теплопровідністю, однак біля зовнішньої межі шару, де температура по нормалі змінюється в незначній мірі, переважає перенесення тепла конвекцією вздовж стінки.

При турбулентній течії в тепловому приграничному шарі перенесення теплоти обумовлене, в основному, конвекцією. Однак безпосередньо біля стінки в ламінарному підшарі перенесення теплоти до стінки здійснюється теплопровідністю, де до речі, і відбувається основна зміна температури, причому і температура, і швидкість змінюються лінійно. Теорія приграничного шару дозволила розділити потік рідини на дві зони: біля стінки діють сили в'язкості і теплота передається теплопровідністю, а в ядрі потоку – в'язкістю можна знехтувати, тут відсутній градієнт температури і теплота передається тільки конвективним шляхом.

### 8.3. Диференціальні рівняння конвективного теплообміну

Для кількісного опису процесу конвективного теплообміну необхідно мати замкнену систему диференціальних рівнянь. При цьому, так само, як і в теорії теплопровідності приймають деякі попередні припущення:

1. Рідина, яка бере участь в конвективному теплообміні, є суцільним середовищем;

2. У потоці рідини виконуються закони збереження енергії, маси та кількості руху;

3. Як додаткові гіпотези, використовують зв'язок між тепловим потоком і різницею температур  $q = \alpha(t_{cm} - t_p)$  та залежність

сили тертя і градієнта швидкості  $s_{тер} = \mu \frac{\partial w}{\partial n}$ ;

4. Фізичні властивості (в'язкість  $\mu$ , густина  $\rho$ , ізобарна теплоємність  $c_p$ , коефіцієнт розширення  $\beta$ , теплопровідність  $\lambda$ ) приймають як задані функції стану рідини.

Використовуючи загальні закони фізики, можна скласти диференціальні рівняння для конвективного теплообміну, що враховують як теплові, так і динамічні явища в будь-якому процесі. До системи цих рівнянь відносять рівняння тепловіддачі, енергії, руху

і суцільності.

**1. Диференціальне рівняння тепловіддачі.** Оскільки на поверхні стінки є шар нерухокої рідини, в якому теплота передається шляхом теплопровідності, то можливе використання закону Фур'є. Запишемо

$$q = -\lambda_p \left( \frac{\partial t}{\partial n} \right) = -\lambda_p \left( \frac{\partial t}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (8.19)$$

Але за законом Ньютона–Ріхмана

$$q = \alpha(t_{cm} - t_p).$$

Прирівнявши значення теплового потоку отримаємо:

$$\alpha = -\frac{\lambda_p}{t_{cm} - t_p} \left( \frac{\partial t_p}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (8.20)$$

Отриманий вираз показує: щоб знайти величину коефіцієнта тепловіддачі, крім властивостей рідини необхідно знати і температурне поле всередині приграничного шару. Якщо в першому припущенні прийняти, що всередині приграничного шару температура змінюється за лінійним законом, то в будь-якому місці шару, в тому числі і при  $y = 0$ , величина похідної буде одна і та сама:

$$\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\delta t}{\delta} = \frac{t_{cm} - t_p}{\delta},$$

де  $\delta$  – товщина теплового приграничного шару.

Звідси випливає важливий висновок: коефіцієнт тепловіддачі прямо пропорційний теплопровідності рідини і обернено пропорційний товщині приграничного шару. Тепер стає зрозумілим, чому на ділянці становлення теплової стабілізації, інтенсивність тепловіддачі більша, ніж на стабілізованій ділянці (тому, що там приграничний шар тонший).

**2. Диференціальне рівняння енергії.** Рівняння, аналогічне рівнянню теплопровідності для нерухомого середовища, виражає закон збереження енергії при конвективному теплообміні і встановлює зв'язок між просторовою і часовою змінами температури в

довільній точці рухомої рідини:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z} = \frac{\lambda}{c\rho} \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right). \quad (8.21)$$

Це рівняння враховує як перенесення теплоти теплопровідністю, так і її накопичення в елементарно малому об'ємі в результаті зміни тепловмісту при проходженні через нього потоку теплоносія.

Багаточлен, розташований в лівій частині рівняння (8.21), являє собою повну похідну від температури за часом. Дійсно, якщо  $t = f(x, y, z)$ , то на основі поняття про повну похідну маємо:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{\partial t}{\partial x} \cdot \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial t}{\partial y} \cdot \frac{dy}{d\tau} + \frac{\partial t}{\partial z} \cdot \frac{dz}{d\tau},$$

де

$$\frac{dx}{d\tau} = w_x, \quad \frac{dy}{d\tau} = w_y, \quad \frac{dz}{d\tau} = w_z$$

і мають зміст складових швидкості  $w_x$ ,  $w_y$ ,  $w_z$ .

Тут  $\partial t / \partial \tau$  характеризує зміну температури в часі в якій-небудь точці рідини, тобто є локальною зміною температури.

Багаточлен

$$w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z}$$

характеризує зміну температури при переході від однієї точки потоку до іншої, тобто є конвективною зміною температури.

Тоді рівняння енергії можна записати таким чином:

$$\frac{dt}{d\tau} = a_t \nabla^2 t. \quad (8.22)$$

Якщо  $w_x = w_y = w_z = 0$ , то рівняння енергії переходить в диференціальне рівняння теплопровідності. Як видно з виразу (8.21), температурне поле в рухомій рідині залежить від складових швидкості  $w_x$ ,  $w_y$ ,  $w_z$ , а швидкість взагалі невідома, тому сукупність цих виразів залишається незамкненою. Щоб зробити систему рівнянь замкненою, необхідно додати рівняння, які би описували зміну швидкості рідини в просторі і часі в будь-якій точці потоку.

Такими рівняннями є диференціальні рівняння руху.

**3. Диференціальне рівняння руху.** У нашому випадку диференціальне рівняння руху в'язкої нестискуваної рідини представлено **рівнянням Нав'є–Стокса**, в основі доведення якого лежить умова рівноваги рухомого об'єму рідини.

Виділимо в потоці в'язкої рідини елементарний об'єм з розмірами ребер  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ . На елемент рідини, що розглядається, діють три сили: сила тяжіння, рівнодіюча сил тиску і рівнодіюча сил тертя (рис. 8.7).

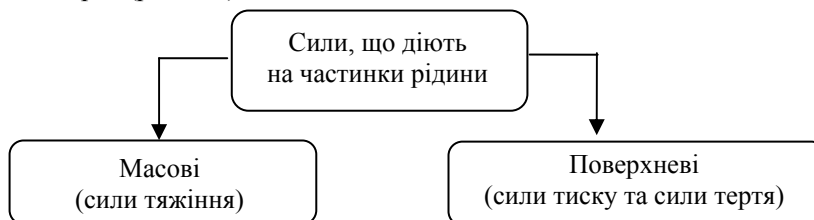
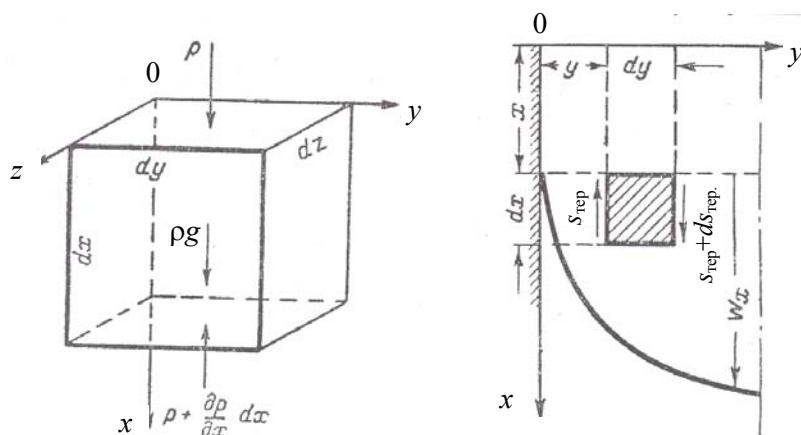


Рис. 8.7 – Рівняння кількості руху

Швидкість в потоці змінюється тільки в напрямку осі  $y$ , закон зміни швидкості довільний (рис. 8.8). Виведення рівняння руху основане на другому законі Ньютона: сила дорівнює масі, помноженій на прискорення. Знайдемо проекції цих сил на вісь  $Ox$ .



**Рис. 8.8 – До виведення диференціального рівняння руху рідини**

Сила тяжіння  $df_1$  прикладена в центрі тяжіння елемента. Її проекція на вісь  $Ox$  дорівнює добутку проекції прискорення вільного падіння  $g_x$  на масу елемента:

$$df_1 = \rho g_x dv. \quad (8.23)$$

Рівнодіюча сил тиску  $df_2$  визначається таким чином. Якщо на верхню грань тиск рідини дорівнює  $p$ , то на площину  $dydz$  діє сила  $pdydz$ .

На нижній грані тиск з точністю до другого члена розкладення в ряд Тейлора дорівнює  $p + \frac{dp}{dx} dx$ , і на цю грань діє сила  $-\left(p + \frac{dp}{dx} dx\right) dydz$ . Знак “мінус” вказує на те, що сила діє проти напрямку руху рідини. Рівнодіюча сил тиску дорівнює їх алгебраїчній сумі:

$$df_2 = -\frac{dp}{dx} dv. \quad (8.24)$$

Рівнодіюча сил тертя  $df_3$  визначається із таких міркувань. Оскільки швидкість змінюється тільки в напрямку осі  $Oy$ , то сила тертя виникає на бокових гранях елемента рідини. Біля лівої грані швидкість руху часток рідини менша, ніж в самому елементі, тому тут в перерізі  $y$  сила тертя направлена проти руху і дорівнює  $s dx dz$ . Біля правої грані навпаки – швидкість руху часток рідини більша, ніж в самому елементі, тому тут в перерізі  $y + dy$  сила тертя направлена в бік руху. Рівнодіюча цих сил дорівнює алгебраїчній сумі:

$$df_3 = \left( s_{мер} + \frac{ds}{dy} dy \right) dx dz - s_{мер} dx dz = \frac{ds_{мер}}{dy} dv.$$

Підставляючи  $s_{мер} = \mu \left( \frac{dw_x}{dy} \right)$ , одержимо:

$$df_3 = \mu \frac{d^2 w_x}{dy^2}. \quad (8.25)$$

Складаючи  $df_1$ ,  $df_2$  та  $df_3$  одержимо проекцію на ось  $Ox$  рівнодіючу всіх сил, прикладених до об'єкта:

$$df = \left( \rho g_x - \frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 w_x}{dy^2} \right) dv. \quad (8.26)$$

Відповідно до другого закону механіки ця рівнодіюча дорівнює добутку маси елемента на його прискорення  $\frac{dw_x}{d\tau}$  і враховує сили інерції:

$$df = \rho \frac{dw_x}{d\tau} dv. \quad (8.27)$$

Прирівнюючи праві частини рівнянь (8.26) і (8.27) і виконавши скорочення, одержимо рівняння руху уздовж осі  $Ox$ :

$$\rho \frac{dw_x}{d\tau} = \rho g_x - \frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 w_x}{dy^2}. \quad (8.28)$$

Рух рідини ускладнюється, якщо швидкість змінюється в трьох напрямках.

У загальному випадку тримірного руху нестискуваної рідини з постійними фізичними параметрами швидкісне поле описується трьома рівняннями руху, кожне відповідно в проекціях сил на осі  $Ox$ ,  $Oy$  та  $Oz$ :

– вісь  $Ox$ :

$$\rho \frac{dw_x}{d\tau} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} \right), \quad (8.29)$$

– вісь  $Oy$ :

$$\rho \frac{dw_y}{d\tau} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial z^2} \right), \quad (8.30)$$

– вісь  $Oz$ :

$$\rho \frac{dw_z}{d\tau} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} \right). \quad (8.31)$$

Члени, що містяться в лівій частині рівнянь (15.29)–(15.31), являють собою повні похідні від швидкості за часом. На основі поняття про повну похідну маємо:

$$\frac{dw_x}{d\tau} = \frac{\partial w_x}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z}. \quad (8.32)$$

Аналогічно для інших осей:

$$\frac{dw_y}{d\tau} = \frac{\partial w_y}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_y}{\partial z}, \quad (8.33)$$

$$\frac{dw_z}{d\tau} = \frac{\partial w_z}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial w_z}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_z}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z}. \quad (8.34)$$

Таким чином, отримано три рівняння у проекціях на осі  $x$ ,  $y$  та  $z$  і у векторній формі вони зводяться в одне рівняння руху:

$$\rho \cdot \frac{d\vec{w}}{d\tau} = \rho \cdot \vec{g} dV - \text{grad } p + \mu \text{grad}^2 \vec{w}, \quad (8.35)$$

де  $\frac{d\vec{w}}{d\tau}$  – повна похідна швидкості по часу.

Похідні  $\frac{\partial w_x}{\partial \tau}$ ,  $\frac{\partial w_y}{\partial \tau}$ ,  $\frac{\partial w_z}{\partial \tau}$  характеризують зміну швидкості в часі в будь-якій точці рідини, тобто характеризують локальну зміну швидкості при переході від точки до точки.

Оскільки в рівняннях крім  $w_x$ ,  $w_y$ ,  $w_z$  з'явилася ще одна невідома величина  $p$  (тиск), то система рівнянь все ще залишається незамкненою. Необхідно додати ще одне рівняння, яким є диференціальне рівняння суцільності (частковий випадок закон збереження маси).

**4. Диференціальне рівняння суцільності.** Відповідно до цього закону кількість нестискуваної рідини, яка впливається в об'єм  $V$ , дорівнює кількості рідини, яка витікає з нього і, від-

повідно, зміна масової витрати дорівнює нулю.

Розглянемо в усталеному потоці рідини елементарний паралелепіпед з ребрами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  і який має об'єм  $dV$  (див. рис. 8.9). Проекції вектора швидкості руху  $w$  рідини на осі координат  $x$ ,  $y$  та  $z$  становлять  $w_x$ ,  $w_y$  та  $w_z$ , відповідно.

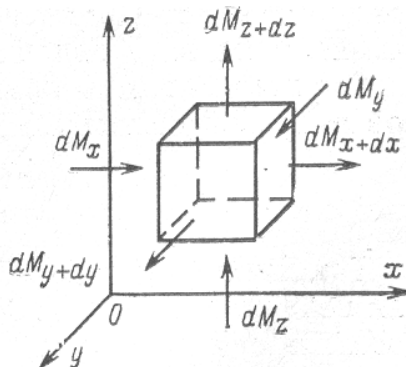


Рис. 8.9 – До виведення диференціального рівняння суцільності

Через грань  $dy \cdot dz$  за час  $d\tau$  втікає маса рідини:

$$M_x = \rho \cdot w_x \cdot dx dy \cdot d\tau. \quad (8.36)$$

Тоді через протилежну грань паралелепіпеда з координатою  $x + dx$  за той самий час  $d\tau$  витікає маса рідини (якщо рідина нестискувана,  $\rho = \text{const}$ ):

$$M_{x+dx} = \rho \left( w_x + \frac{\partial w_x}{\partial x} \cdot dx \right) dy dz \cdot d\tau. \quad (8.37)$$

Різниця маси рідини, яка втікає  $M_x$  і яка витікає  $M_{x+dx}$  буде дорівнювати

$$dM_x = M_x - M_{x+dx} = -\rho \frac{\partial w_x}{\partial x} \cdot dx dy dz \cdot d\tau = -\rho \frac{\partial w_x}{\partial x} \cdot dV d\tau. \quad (8.38)$$

Аналогічні вирази можна отримати для інших граней паралелепіпеда

$$dM_y = -\rho \frac{dw_y}{dy} \cdot dv \cdot d\tau;$$

$$dM_z = -\rho \frac{dw_z}{dz} \cdot dv \cdot d\tau.$$

При незмінній кількості рідини, яка утримується в виділеному об'ємі, сумарна різниця маси повинна дорівнювати нулю. Якщо додати ці вирази, то отримаємо наступні рівняння.

Для нестискуваних рідин, вважаючи, що густина  $\rho = \text{const}$ , одержимо:

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0. \quad (8.39)$$

Диференціальне рівняння суцільності для стискуваних рідин має наступний вигляд:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z} = 0. \quad (8.40)$$

Сума зміни швидкості вздовж осей координат в лівій частині рівняння (8.39) називається **дивергенцією вектора швидкості** і позначається  $\text{div } \vec{w}$ . Тоді рівняння можна подати у векторному вигляді:

$$\text{div } \vec{w} = 0. \quad (8.41)$$

У підсумку отримані рівняння (8.20), (8.22), (8.35) та (8.39) утворюють замкнену систему з чотирма невідомими:  $\alpha$ ,  $t$ ,  $w$  і  $p$ , із якої можна отримати поля тиску, швидкості та температури, після чого розрахувати густину теплового потоку. Для газів та рідин, що стискаються, величина  $\rho$  також увійде в список невідомих параметрів і система рівнянь повинна бути доповнена ще рівнянням стану  $p/\rho = zRT$  (де  $z$  – загальний коефіцієнт стискуваності). Однак, для кожного часткового випадку, до кожного перерахованого рівняння необхідно мати ще додатково **умови однозначності**:

- 1) задати форму і розміри поверхні, яка омивається рідиною, або форму каналу, яким тече рідина (геометричні умови);
- 2) задати величин теплопровідності, теплоємності, густини,

динамічної та термічної в'язкості рідини як функції її стану (фізичні умови);

3) якщо теплообмін нестационарний, необхідно задати значення температури, швидкості і тиску по всьому об'єму рідини, а також поле температури на поверхні в початковий момент часу (часові або початкові умови);

4) задати значення температури, швидкості і тиску на поверхні, яка омивається рідиною (граничні умови, які характеризують особливості протікання процесу на межі рідкого середовища).

Система диференціальних рівнянь сукупно з умовами однозначності представляє собою математичне формулювання крайової задачі. Але при цьому ми бачимо, що навіть постановка задачі конвективного теплообміну є досить складною. Її вирішення (у принципі досить точно) в цілому знецінюється громіздкістю математичного опису; похибками при заданні параметрів; багаточисельними і не завжди коректними вихідними припущеннями. Особливо значні труднощі при розв'язку задач конвективного теплообміну виникають при турбулентній течії рідини.

Якщо взяти до прикладу визначення коефіцієнта тепловіддачі для повздовжньої пластини, що омивається потоком рідини, то в загальному випадку необхідно врахувати, як мінімум, вплив наступних величин: довжини пластини  $l$ , швидкості потоку  $w$  і теплофізичних параметрів рідини:

$$\alpha = f(l, w, \lambda, c, \rho, \mu). \quad (8.42)$$

При цьому необхідно виконати серію розрахунків, змінюючи  $m$  разів кожний із цих семи параметрів, в результаті чого ми отримаємо сумарне число розрахунків, яке буде становити  $N = m^6$ , тобто в межах  $10^6$ ! На сьогодні такі задачі розв'язують чисельними методами за допомогою ЕОМ, але комп'ютерні розв'язки, як правило, мають частковий характер і крім того для них у повній мірі діють перераховані раніш недоліки. Як бачимо, при дослідженні конвективного теплообміну можливостей *аналітичного методу* ще менше, ніж при описі процесів теплопровідності. Разом з тим, не завжди існує можливість дослідити процес *експериментально* (це дорого, складно, довго і т.п.). Проміжний підхід, який на практиці виявився дуже плідним, пов'язаний з використанням *теорії подібності*.

#### Контрольні питання

1. Що називається конвективним теплообміном?
2. Види конвекції, їх особливості. Чим відрізняється тепловіддача від теплопередачі?
3. Які є види руху рідини біля поверхні і чим вони вирізняються?
4. Число Рейнольда, його позначення і розмірність.
5. Критичні значення числа Рейнольда.
6. Механізм передачі теплоти при ламінарному і турбулентному режимі руху рідини.
7. Визначення і фізичний зміст динамічного та кінематичного коефіцієнтів в'язкості. Запишіть їх розмірності.
8. Які фактори впливають на конвективний теплообмін?
9. Функцією яких величин є коефіцієнт тепловіддачі?
10. Із яких залежностей складається система диференціальних рівнянь конвективного теплообміну?
11. Що входить в умови однозначності для конвективного теплообміну?
12. Чим відрізняється рівняння суцільності для стискуваних і нестискуваних рідин?
13. Припущення, покладені в основу рівняння Нав'є–Стокса.
14. При яких умовах диференціальне рівняння руху перейде в диференціальне рівняння теплопровідності?
15. Перерахуйте теплофізичні властивості рідин. Вкажіть порядок величини коефіцієнтів в'язкості для води та повітря при кімнатній температурі.
16. У чому полягає різниця між процесами конвекції і тепловіддачі?

#### Тестові завдання

**1. Вкажіть основну умову, необхідну для здійснення конвективного перенесення тепла.**

- а) наявність різниці температури між рідиною і стінкою;
- б) температура рідини має бути вище  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ ;
- в) обов'язкове переміщення тіла та рідини;
- г) переміщення мікрочастинок тіла та рідини в напрямку теплопереносу.

**2. При нагріванні рідини спостерігається наступне співвідношення критеріїв:**

- а)  $Pr/Pr_{cm} > 1$ ; б)  $Pr/Pr_{cm} < 1$ ; в)  $Pr/Pr_{cm} = 0$ ; г)  $Pr/Pr_{cm} = 1$ .

**3. При однакових початкових і кінцевих температурах теплоносія коефіцієнт тепловіддачі  $\alpha$  при нагріванні – ...**

- а) більший; в) такий, як при охолодженні;  
б) менший; г) незмінний.

**4. При відсутності конвективної зміни температури диференціальне рівняння енергії прийме вигляд:**

- а)  $\frac{\partial t}{\partial \tau} = a_T \nabla^2 t$ ; в)  $\nabla^2 t = 0$ ;  
б)  $w \text{grad } t = a_T \nabla^2 t$ ; г)  $\frac{\partial t}{\partial \tau} = w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z}$ .

**5. Виберіть правильний вираз для теплового потоку  $Q_\tau$  при теплопередачі.**

- а)  $\lambda \cdot \Delta t / l$ ; б)  $k \cdot F \cdot \Delta t$ ; в)  $a_T \cdot F \cdot \Delta t$ ; г)  $\varepsilon \cdot C_0 \cdot F \cdot T^4$ .

**6. Для якого виду теплоносіїв коефіцієнт об'ємного розширення розраховується за формулою  $\beta = 1/T$ ?**

- а) газів; б) рідин; в) водяної пари; г) рідких металів.

**7. Фізичний зміст коефіцієнта тепловіддачі – полягає у ... .**

- а) здатності тіла проводити теплоту при відсутності температурного напору;  
б) інтенсивності процесу конвективного теплообміну;  
в) швидкості зміни температури в заданому тілі;  
г) швидкості зміни теплопередачі на поверхні розділу між рідиною і стінкою.

**8. Вкажіть правильний аналітичний вираз для числа Рейнольдса:**

- а)  $Re = \frac{\bar{w}l}{\nu}$ ; б)  $Re = \frac{\nu}{a_T}$ ; в)  $Re = \frac{a_T}{\nu}$ ; г)  $Re = \frac{\alpha l}{\lambda}$ .

**9. Гідродинамічний граничний шар – це шар рідини ... .**

- а) швидкість в якому змінюється від нуля безпосередньо біля поверхні тіла до швидкості незбуреного потоку;  
б) температура в якому змінюється від температури поверхні тіла до температури рідини;  
в) в'язкість в якому не змінюється;  
г) температура в якому залишається постійною.

**10. Диференціальне рівняння суцільності для конвективного теплообміну матиме вигляд:**

$$\text{а) } \frac{\partial(\rho w)}{\partial n} = 0; \quad \text{б) } \frac{\partial(c_p w)}{\partial \tau} = 0; \quad \text{в) } \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} = 0; \quad \text{г) } \frac{\partial(\rho w)}{\partial p} = 0.$$

## ТЕПЛООБМІН ВИПРОМІНЮВАННЯМ

---

- Основні поняття теплообміну випромінюванням
- Закони теплового випромінювання

Процеси променевого теплообміну отримали широке використання в різних областях техніки, зокрема в теплотехніці, зварювальному виробництві, ядерній енергетиці, ракетній техніці, металургії, в техніці для сушильних процесів, хімічній технології, світлотехніці тощо.

### 9.1. Основні поняття теплообміну випромінюванням

**1. Фізичні основи випромінювання.** Теплообмін випромінюванням принципово відрізняється від конвективного теплообміну і теплопровідності: теплове випромінювання являє собою процес поширення внутрішньої енергії тіла шляхом електромагнітних хвиль. **Електромагнітними хвилями** називають електромагнітні збурення, які виходять із випромінюючого тіла і поширюються у вакуумі зі швидкістю світла, яка дорівнює  $3 \cdot 10^8$  м/с. При поглинанні електромагнітних хвиль будь-яким іншим тілом вони знову перетворюються у теплову енергію. Збуджувачами електромагнітних хвиль є заряджені матеріальні частинки, тобто електрони і іони, які входять в склад речовини. При цьому коливання іонів відповідають випромінюванню низької частоти; випромінювання, що викликається рухом електронів може мати високу частоту, якщо вони входять в склад атомів і молекул і утримуються біля центру своєї рівноваги знач-

ними силами.

У металах багато електронів є вільними, тому для цього випадку не можна говорити про їх коливання біля центрів рівноваги. Електрони рухаються і при цьому можуть підпадати під нерегулярне гальмування, в силу чого випромінювання металів набуває імпульсного характеру і може мати хвилі різної частоти, у тому числі і низькочастотні.

Крім хвильових властивостей, випромінювання має також і корпускулярні властивості, які полягають у тому, що променева енергія випускається і поглинається матеріальними тілами не неперервно, а окремими дискретними порціями – квантами світла або фотонами. Випущений фотон – це частинка матерії, яка має певну енергію, кількість руху і електромагнітну масу. Тому теплове випромінювання ще можна розглядати як рух фотонного газу. Проходження фотонів через речовину є процесом поглинання і наступного випромінювання енергії фотонів атомами і молекулами цієї речовини.

Таким чином, випромінювання носить двоякий характер, оскільки воно має властивості неперервного поля електромагнітних хвиль і властивості дискретності, які типові для фотонів. Синтезом цих властивостей є положення, згідно з яким енергія і імпульс зосереджуються в фотонах, а вірогідність знаходження їх в тому або іншому місці простору – у хвилях.

Усі види електромагнітного випромінювання мають однакову природу і розрізняються лише довжиною хвилі (табл. 9.1).

**Таблиця 9.1 – Класифікація електромагнітного випромінювання залежно від довжини хвилі**

Вид випромінювання	Космічне	Гама-промені	Рентгєнівське	Ультрафіолетове	Видиме	Теплове	Радіохвилі
Довжина хвилі, м	$5 \cdot 10^{-14}$	$3 \cdot 10^{-13} \dots 1 \cdot 10^{-10}$	$1 \cdot 10^{-12} \dots 2 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-8} \dots 4 \cdot 10^{-7}$	$4 \cdot 10^{-7} \dots 8 \cdot 10^{-7}$	$8 \cdot 10^{-7} \dots 8 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4} \dots 1 \cdot 10^4$

Тепловому випромінюванню (інфрачервоному) відповідають частоти від  $3 \cdot 10^3$  до  $3 \cdot 10^5$  ГГц або довжини хвиль від 0,8 мкм до 0,8 мм. Для цього діапазону характерний прояв як квантових, так і хвильових властивостей, які проявляються по-різному залежно від довжини хвилі. Квантові властивості проявляються найбільш суттєво в короткохвильовому випромінюванні. Навпаки, характерні хвильові властивості найбільш чітко спостерігаються для радіохвиль.

Більшість рідких і твердих тіл мають *суцільний спектр* ви-

випромінювання, тобто вони випромінюють енергію всіх довжин хвиль від нуля до безмежності. До числа таких тіл відносяться діелектрики, напівпровідники і окиси металів. Деякі тіла випромінюють енергію тільки у визначеному інтервалі довжин хвиль, тобто вони випромінюють енергію перервним спектром. До них відносять чисті метали і гази, які характеризуються *селективним* або *вибірковим* випромінюванням.

Випромінювання різних тіл різне. Воно залежить від природи тіла, його температури, стану поверхні, а для газів – ще від товщини шару і тиску. Більшість природних тіл мають значну поглинальну і випромінюючу здатність, тому в процесах променевого теплообміну приймають участь лише тонкі поверхневі шари. Для провідників тепла товщина цих шарів має порядок 1 мкм, а для непровідників – 1 мм. Тому для твердих тіл, а також і рідин, теплове випромінювання у деяких випадках наближено можна розглядати як поверхневе явище. Газоподібні тіла мають значно менше випромінювання, ніж рідкі і тверді. Тому у випромінюванні газів приймають участь всі його частинки, а процес теплового випромінювання має об'ємний характер.

Випромінювання всіх тіл залежить від температури. Із збільшенням температури випромінювання збільшується, оскільки збільшується внутрішня енергія тіла. Зміна температури тіла викликає не тільки зміну величини інтенсивності випромінювання, але супроводжується ще зміною спектрального складу або “кольору” випромінювання. Зі збільшенням температури збільшується інтенсивність короткохвильового випромінювання і зменшується інтенсивність довгохвильової частини спектра. Залежність випромінювання від температури значно більша, ніж процесів теплопровідності і конвекції. Тому при низьких температурах переважну роль може мати теплообмін за рахунок конвекції і теплопровідності, а при високих – основним видом перенесення теплоти може бути теплове випромінювання.

*Рівноважне* випромінювання створюється джерелом при його постійній температурі, наприклад, коли тіло знаходиться всередині оболонки з непрозорими стінками. *Нерівноважне* випромінювання відбувається, коли джерело випромінювання нагрівають, наприклад, у лампах розжарювання в енергію електромагнітних хвиль перетворюється частина теплоти, яка виділяється при проходженні електричного струму.

**2. Види променивих потоків.** Розрізняють наступні харак-

теристики променевих потоків:

1. **Інтегральний** або **повний променевий потік**  $Q$  – сумарне випромінювання з поверхні твердого тіла в одиницю часу за всіма напрямками напівсферичного простору і за всіма довжинами хвиль:  $Q = dQ_\tau/d\tau$ .

2. **Потік монохроматичного, спектрального** або **однорідного випромінювання**  $Q_\lambda$  – випромінювання з поверхні твердого тіла в одиницю часу, яке відноситься до вузького інтервалу зміни довжини хвилі від  $\lambda$  до  $(\lambda + d\lambda)$ .

3. **Інтегральна густина напівсферичного випромінювання** або **випромінювальна здатність тіла**  $E = dQ/dF$  – інтегральний променевий потік, який випромінюється з одиниці поверхні тіла за всіма напрямками напівсферичного простору. Променевий потік по всій поверхні визначається за виразом:  $Q = \int_F E dF$ . Якщо  $E = \text{const}$ ,

то  $Q = E \cdot F$ , де  $F$  – загальна поверхня тіла.

4. **Спектральна інтенсивність випромінювання**  $J_\lambda = dE/d\lambda$  – відношення густини променевого потоку, який випромінюється в нескінченно малому інтервалі довжини хвиль до величини цього інтервалу довжини хвиль. У цьому випадку має місце випромінювання енергії одного кольору з одиниці поверхні за всіма напрямками напівсферичного простору.

5. **Кутова інтенсивність** або **яскравість випромінювання** – кількість енергії, що випромінюється в певному напрямку одиничної площадки, яка розташована перпендикулярно до випромінювання і відноситься до одиниці елементарного тілесного кута. Інтенсивність може бути спектральною –  $B_\lambda = dJ_\lambda/d\omega$  або інтегральною –  $B = dE/d\omega$ .

Величина яскравості, як і інтенсивності випромінювання в загальному випадку може змінюватися залежно від місця розташування елементарної випромінюючої площадки, а також за різними напрямками випромінювання.

Для направлено випромінювання густина променевих потоків повинна бути віднесена до проекції елементарної площадки на площину, яка ортогональна до напрямку випромінювання (рис. 9.1) і тоді для направлено випромінювання ці залежності будуть мати наступний вигляд:

$$- \text{спектральне} - B_{\lambda, \Psi} = dJ_{\lambda, \Psi}/d\omega = dJ_\lambda/d\omega \cdot \cos\Psi;$$

– інтегральне –  $B_{\Psi} = dE_{\Psi}/d\omega = dE/d\omega \cdot \cos\Psi$ .

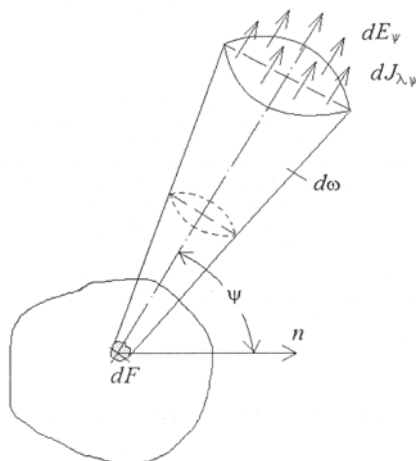


Рис. 9.1 – До визначення яскравості випромінювання

На відміну від інших видів теплопередачі випромінювання не потребує проміжного матеріального середовища: воно передається і у вакуумі, причому практично на будь-яку відстань, при цьому, само собою зрозуміло, має місце збереження дії першого та другого законів термодинаміки.

**3. Різновиди випромінювання.** Розглянемо різновиди напівсферичного випромінювання.

**Власне випромінювання** ( $Q$ ,  $E$ ) визначається природою цього тіла і його температурою. Зазвичай тіло приймає участь в теплообміні з іншими тілами, енергія випромінювання яких падаючи на це тіло частково ним поглинається, частково відбивається, а частина проходить через нього.

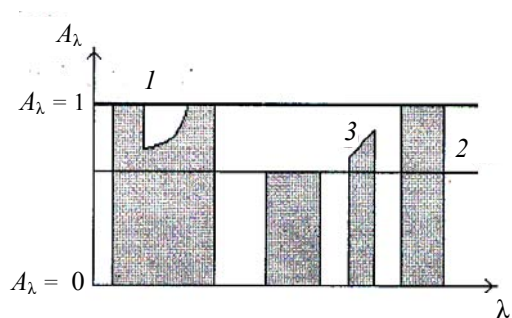
**Падаюче випромінювання** ( $Q_{пад}$  або  $E_{пад}$ ) – кількість променевої енергії, яка падає на задане тіло.

**Поглинута енергія** – частина падаючої енергії випромінювання, яка поглинута цим тілом, і перетворена ним у внутрішню енергію

$$Q_{погл.} = A \cdot Q_{пад.} \text{ або } E_{погл.} = A \cdot E_{пад.}, \quad (9.1)$$

де  $A$  – коефіцієнт поглинання або поглинальна здатність тіла. Тіла, які поглинають всю падаючу на них енергію теплового

випромінювання (у т.ч. і видиме світло), називаються абсолютно чорними ( $A = 1$ ). У той же час, якщо поверхня поглинає всі промені, крім світлових, вона не здається чорною, хоча за променевими властивостями близька до абсолютно чорного тіла через високу поглинальну здатність, наприклад, лід та сніг, для яких  $A = 0,95 \dots 0,98$ . Аналогічно, визначається коефіцієнт поглинання для монохроматичного випромінювання  $A_\lambda$ , який у загальному випадку може залежати від довжини хвилі. Тіла, для яких коефіцієнт монохроматичного поглинання не залежить від довжини хвилі, називаються **сірими тілами**. Вони поглинають не всю падаючу на них променеву енергію (рис. 9.2).



1 – абсолютно чорні тіла; 2 – сірі тіла;  
3 – тіло з селективним випромінюванням

Рис. 9.2 – Залежність коефіцієнта поглинання від довжини хвилі

Частина падаючої енергії, яку тіло відбиває назад на оточуючі тіла, носить назву відбитого випромінювання:

$$Q_{\text{відб.}} = R \cdot Q_{\text{пад.}} \text{ або } E_{\text{відб.}} = R \cdot E_{\text{пад.}}, \quad (9.2)$$

де  $R$  – коефіцієнт відбиття або відбивна здатність тіла.

Якщо  $R = 1$  і процеси відбиття підпадають під закони геометричної оптики, то така поверхня називається **дзеркальною**, при дифузійному відбиванні (тобто енергія випромінюється тілом рівномірно за всіма напрямками) – поверхню називають **абсолютно білою**.

Частина падаючої енергії, яка проходить через тіло, називається проникаючим випромінюванням:

$$Q_{\text{проп.}} = D \cdot Q_{\text{пад.}} \text{ або } E_{\text{проп.}} = D \cdot E_{\text{пад.}}, \quad (9.3)$$

де  $D$  – коефіцієнт проникнення або проникна здатність тіла.

Тіла, у яких  $D = 1$  називаються проникними, прозорими або діатермічними (тонкі шари сухого повітря, одноатомні гази). Для твердих і рідких тіл приймається  $D = 0$ , оскільки вони поглинають променеву енергію в тонкому поверхневому шарі.

Променевий теплообмін – це сукупні процеси взаємного випромінювання, поглинання, відбиття і пропускання енергії випромінювання у системах різних тіл, причому ці тіла можуть мати однакову температуру. Для тіла, яке приймає участь у променевому теплообміні з іншими тілами, відповідно до закону збереження енергії можна скласти наступне рівняння теплового балансу:

$$\begin{aligned} Q_{\text{над.}} &= Q_{\text{погл.}} + Q_{\text{відб.}} + Q_{\text{проп.}}; \\ E_{\text{над.}} &= E_{\text{погл.}} + E_{\text{відб.}} + E_{\text{проп.}} \text{ або } A + R + D = 1. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Наведені коефіцієнти  $R$ ,  $D$  та  $A$  є безрозмірними величинами і вони характеризують здатність тіла поглинати, відбивати або пропускати теплове випромінювання. Величини  $R$ ,  $D$  та  $A$  залежать як від фізичних властивостей тіла, так і стану його поверхні. Крім цього, їх визначає і спектральний склад випромінювання: так, віконне скло пропускає теплове випромінювання і затримує ультрафіолетове. У граничних випадках можна записати:

- 1)  $A = 0$ ;  $R = 0$ ;  $D = 1$  – абсолютно прозоре тіло;
- 2)  $A = 0$ ;  $R = 1$ ;  $D = 0$  – абсолютно біле тіло;
- 3)  $A = 1$ ;  $R = 0$ ;  $D = 0$  – абсолютно чорне тіло.

Усі ці три випадки характеризують **фізичні моделі**, реальні тіла можуть їм відповідати лише приблизно. Так поверхня покрита шаром лампової сажі близька до абсолютно чорної, поліровані метали ( $R = 0,97$ ) – абсолютно біле тіло, сіре тіло також модель, у дійсності величина  $A$  завжди залежить від спектрального складу випромінювання.

Більшість матеріалів поглинає енергію випромінювання тільки тонким поверхневим шаром, для металів він становить біля 1 мкм, для неметалів – 1–3 мм. Тому в першому наближенні поверхні твердих тіл і рідин вважають поглинаючими, а рівняння збереження енергії приймає вигляд:  $A + R = 1$ . Тіла, які задовольняють це рівняння, називають **непрозорими**.

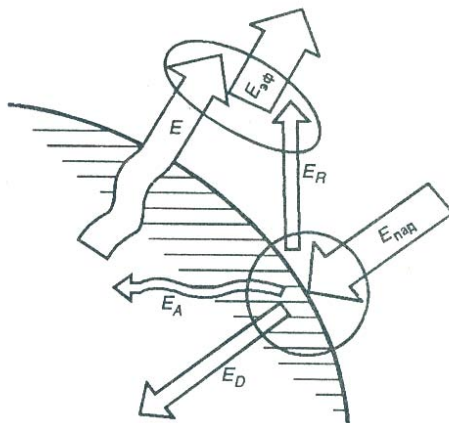
Тіла, у яких  $0 \leq D \leq 1$  називають **напівпрозорими** (скло, кварц, сапфір).

**Ефективне випромінювання** – сума власного випромінювання і відбитого випромінювання, яке випускається поверхнею

цього тіла, променевий потік якого записується виразом:

$$Q_{ef.} = Q + R \cdot Q_{над.}, \quad E_{ef.} = E + R \cdot E_{над.} \quad (9.5)$$

Ефективне випромінювання залежить не тільки від фізичних властивостей і температури тіла, але і від фізичних властивостей і температури навколишніх тіл, від форми, розмірів і відносного розташування тіл і просторі, тому фізичні властивості ефективного і власного випромінювань різні. Також різними виявляються і спектри їх випромінювання. Поняття ефективного випромінювання вперше було введено О.Є. Власовим у 1929 році (рис. 9.3).



$E_{над.}$  – випромінювання, яке падає на поверхню тіла;  $E_A$  – поглинутий потік;  
 $E_R$  – відбитий потік;  $E_D$  – потік, що проходить через тіло;  
 $E$  – власне випромінювання;  $E_{ef.} = E + E_R$  – ефективне випромінювання тіла

**Рис. 9.3 – Класифікація густини потоків випромінювання на поверхні тіла**

Променевий теплообмін між тілами визначається потоком результуючого випромінювання. **Результуюче випромінювання** є різницею між променевим потоком, який отримує тіло і променевим потоком, що випромінюється в навколишній простір. Воно може бути визначено двома способами:

- спосіб Нуссельта –  $q_{рез} = E - E_{погл.} = E - A \cdot E_{над.}$ ;
- спосіб О.Є. Власова –  $q_{рез} = E_{ef.} - E_{над.}$ .

Результуючий потік випромінювання може бути величиною позитивною, від'ємною і рівною нулю (при рівноважному випромі-

нюванні). Між густиною потоків результуючого і ефективного випромінювання може бути встановлений зв'язок, який має наступний вигляд:

$$E_{ef} = \frac{1}{A} [E - (1 - A)q_{рез.}]. \quad (9.6)$$

Із цього випливає, що всі види напівсферичного випромінювання, крім власного є лінійними функціями падаючого випромінювання. Власне випромінювання поєднується з іншими видами через ефективне випромінювання.

## 9.2. Закони теплового випромінювання

У силу загальної природи електромагнітних хвиль основні закони, яким підпорядковується теплове випромінювання є для них загальними. Ці закони отримані при виконанні двох вихідних умов: вони виведені стосовно до ідеального тіла, яким є абсолютно чорне тіло і за рівноважного випромінювання, при якому всі тіла, що входять в задану випромінюючу систему, мають однакову температуру і знаходяться в термодинамічній рівновазі.

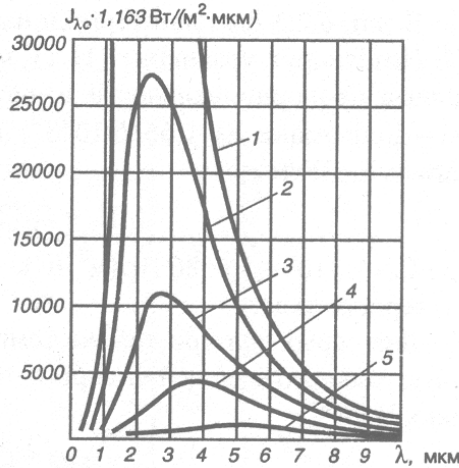
**1. Закон Планка.** Використовуючи статистичні методи і гіпотезу про квантовий характер теплового випромінювання, Планк у 1900 році встановив залежність для спектральної густини потоку випромінювання абсолютно чорного тіла:

$$J_{\lambda} = \frac{C_1}{\lambda^5} \left[ \exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1 \right]^{-1} = \frac{C_1 \cdot \lambda^{-5}}{e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1}. \quad (9.7)$$

де  $C_1 = 2\pi h c^2 = 0,374 \cdot 10^{-15}$  Вт · м<sup>2</sup> – перша постійна Планка;  $C_2 = hc/k = 1,4388 \cdot 10^{-2}$  м · К – друга постійна Планка;  $h = 6,625 \cdot 10^{-34}$  Дж · с – константа Планка;  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К – постійна Больцмана;  $c$  – швидкість світла у вакуумі;  $\lambda$  – довжина хвилі, м;  $T$  – абсолютна температура, К.

Закон Планка отриманий теоретичним шляхом. Відповідно до нього кожній довжині хвилі відповідає своє значення густини потоку випромінювання. Характер зміни  $J_{\lambda}$  від довжини хвилі для різних значень температури наведено на рис. 9.4. Із збільшенням температури енергія випромінювання для кожної довжини хвилі

суттєво зростає.



1 –  $T = 1400$  К; 2 –  $T = 1200$  К; 3 –  $T = 1000$  К; 4 –  $T = 800$  К; 5 –  $T = 600$  К

**Рис. 9.4** – Розподіл інтенсивності випромінювання абсолютно чорного тіла за законом Планка

Оскільки закон Планка сформульований для абсолютно чорного тіла, то по відношенню до сірих тіл він виражає максимально можливу густину потоку випромінювання.

Розглянемо деякі граничні випадки закону Планка.

**Перший випадок.** Якщо енергія кванта дуже мала порівняно з енергією теплового руху, то  $h\nu \ll kT$  або  $\lambda T \gg C_2$  ( $\lambda T > 100 C_2$ ), тоді при цьому отримаємо:

$$\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) \approx 1 + \frac{C_2}{\lambda T}, \quad (9.8)$$

і тоді закон Планка переходить в **закон Релея–Джінса**:

$$J_\lambda = \frac{C_1 T}{C_2 \lambda^4} = \frac{C_1}{C_2} \cdot \lambda^{-4} T, \quad (9.9)$$

який був отриманий з використанням методів класичної фізики.

**Другий випадок.** Якщо  $h\nu \gg kT$  або  $\lambda T \ll C_2$  ( $\lambda T < 0,2 C_2$ ), то в знаменнику формули (9.7) можна знехтувати одиницею, і отримаємо другий граничний випадок, який має назву **закон Віна**

(сформульований у 1893 р.):

$$J_{\lambda} = \frac{C_1}{\lambda^5} \exp\left(-\frac{C_2}{\lambda T}\right). \quad (9.10)$$

Для того, щоб встановити залежність від температури довжини хвилі  $\lambda_{\max}$ , при якій функція  $J_{\lambda}$  досягає максимального значення, дослідимо на максимум вираз (9.7). Отримаємо:

$$\frac{dJ_{\lambda}}{d\lambda} = \frac{-5 \left[ \exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1 \right] + \frac{C_2}{\lambda T} \exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)}{\lambda^6 \left[ \exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1 \right]} = 0. \quad (9.11)$$

Введемо позначення  $x = \frac{C_2}{\lambda T}$  і при цьому отримаємо наступне рівняння:

$$-5(e^x - 1) + xe^x = 0. \quad (9.12)$$

Розв'язуючи це трансцендентне рівняння, отримаємо  $x = 4,965$  і тоді **закон зміщення Віна** буде мати вигляд:

$$\lambda_{\max} T = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}. \quad (9.13)$$

Таким чином, із зростанням температури значення величини  $\lambda_{\max}$  зміщується в бік більш коротких хвиль і це є суттю формулювання цього закону. Так під час випромінювання з поверхні Сонця ( $T \approx 5500 \text{ К}$ ) максимум припадає на видиму частину спектра ( $\lambda \approx 0,5 \text{ мкм}$ ), а під час випромінювання електронагрівача ( $T \approx 1100 \text{ К}$ ) –  $\lambda \approx 2,6 \text{ мкм}$ , причому енергія видимого, світлового випромінювання незначна порівнюючи з енергією теплового (інфрачервоного) випромінювання.

**2. Закон Стефана–Больцмана.** Чеський фізик Й. Стефан у 1879 р. експериментально і австрійський фізик Л. Больцман у 1884 р. теоретично, відкрили закон, який встановлює зв'язок густини інтегрального напівсферичного випромінювання абсолютно чорного тіла з його абсолютною температурою:

$$E_0 = \sigma \cdot T^4, \text{ Вт/м}^2, \quad (9.14)$$

де  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}^4$  – константа випромінювання

абсолютно чорного тіла (постійна Стефана–Больцмана).

Для зручності практичних розрахунків ця залежність, як правило, подається у вигляді:

$$E_0 = 5,67 \left( \frac{T}{100} \right)^4. \quad (9.15)$$

Для сірих тіл, випромінювальна здатність яких менша, ніж для чорних, а власне випромінювання також пропорційне четвертому степеню температури, закон приймає вигляд:

$$E = \varepsilon \cdot E_0, \quad (9.16)$$

де  $\varepsilon = E/E_0$  – відносний коефіцієнт теплового випромінювання, який ще називають інтегральним або середнім ступенем чорноти сірого тіла.

Ступінь чорноти вказує, наскільки тіло наближається до абсолютно чорного тіла за своєю здатністю випромінювати; він залежить від природи тіла, стану його поверхні (насамперед, шорсткості) і температури. Коефіцієнт змінюється для різних тіл від нуля до одиниці, наприклад, для полірованих металів він дорівнює 0,01–0,02, а для поверхонь, покритих сажею – 0,98–0,99. “Чорнота” – поняття умовне, оскільки нас цікавить не видима, а інфрачервона область спектру. У цій області сніг ( $\varepsilon = 0,95$ ) “більш чорний”, ніж графіт ( $\varepsilon = 0,5$ –0,7), ступінь чорноти більшості фарб, до речі, не пов’язана з їх кольором.

Таким чином, закон Стефана–Больцмана є теоретичною основою для обчислення потоку енергії, який випромінюється будь-яким нагрітим тілом, якщо відома його температура і радіаційні характеристики.

Закон Стефана–Больцмана може бути отриманий із закону Планка з урахуванням того, що для поверхневої густини потоку інтегрального випромінювання можна записати наступний вираз:

$$E_0 = \int_0^{\infty} J_{\lambda} d\lambda = \sigma \cdot T^4. \quad (9.17)$$

**3. Закон Кірхгофа.** Цей закон описує одну із найбільш загальних властивостей рівноважного теплового випромінювання. Він встановлює зв’язок між можливістю тіла випускати і поглинати енергію випромінювання. Відповідно до умов термодинамічної рівно-

ваги, виконується вимога рівності випромінюваного і поглинутого потоків випромінювання. Ця умова поширюється на випромінювання у будь-якому елементарному спектральному діапазоні, тобто на значення спектральних інтенсивностей випромінювання. Звідси випливає, *що в умовах термодинамічної рівноваги, відношення спектральної інтенсивності потоку випромінювання до спектральної поглинальної здатності тіла є однаковим для всіх тіл і дорівнює спектральній інтенсивності потоку випромінювання абсолютно чорного тіла при тій же температурі.*

$$\frac{J_{\lambda}}{A_{\lambda}} = J_{0\lambda}(\lambda, T). \quad (9.18)$$

Сформульований у 1859 році закон відомий як закон Кірхгофа, відноситься до випромінювання у вузькому спектральному інтервалі.

Для випромінювання в повному спектрі при термодинамічній рівновазі також справедливо наступне:

$$\frac{E}{A} = E_0(T). \quad (9.19)$$

Із закону Кірхгофа випливає низка наслідків, які мають важливе практичне значення.

*1. Із всіх тіл у природі найбільшу випромінювальну здатність має абсолютно чорне тіло, відповідно тіла з малою поглинальною здатністю мають малі густини потоку випромінювання.*

*2. При рівноважному випромінюванні коефіцієнт поглинання чисельно дорівнює ступеню чорноти:  $A = \epsilon$ .*

*3. Якщо тіло в деякому інтервалі довжини хвиль не поглинає енергію випромінювання, то воно у цьому ж інтервалі і не випромінює її.*

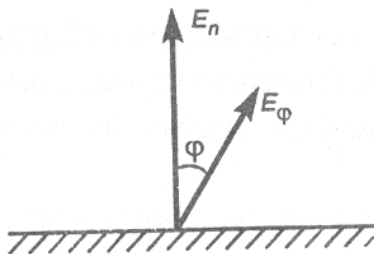
Для тіл, які не однаково поглинають промені різноманітних довжин хвиль, коефіцієнт поглинання залежить від довжини хвилі падаючого випромінювання і такі тіла носять назву *кольорових*.

**4. Закон Ламберта.** Його іноді називають законом косинусів Ламберта і він визначає кутовий розподіл рівноважного випромінювання. Найбільшу інтенсивність має потік випромінювання по нормалі до випромінюючої поверхні (його називають яскравістю випромінювання):

$$B = \frac{E}{\pi}. \quad (9.20)$$

Інтенсивність випромінювання у загальному випадку залежить від напрямку і є величиною, пропорційною косинусу кута між напрямком випромінювання і нормаллю до поверхні тіла:

$$E_{\varphi} = E_n \cos \varphi. \quad (9.21)$$



**Рис. 9.5 – До виведення закону Ламберта:**

$E_n$  – густина потоку випромінювання  
в нормальному напрямку до поверхні;

$E_{\varphi}$  – густина потоку випромінювання під кутом  $\varphi$  до нормалі

Закон Ламберта найбільш повно справедливий тільки для поверхні абсолютно чорного тіла у стані рівноваги, а для тіл, які мають властивість дифузійного випромінювання – тільки у межах  $\varphi = 0-60^\circ$ .

Для полірованих поверхонь цей закон неприйнятний. Так, наприклад, поліровані метали мають яскравість випромінювання при  $\varphi = 60-80^\circ$ , яка більша за яскравість у випадку оцінки її у нормалі до поверхні, а зі збільшенням кута, яскравість може впасти до нуля.

**5. Кутові коефіцієнти випромінювання.** У випадку, якщо випромінювальна система складається із декількох тіл, довільно розміщених у просторі, то тільки частина потоку випромінювання від одного тіла попадає на інше. Частина потоку випромінювання одного тіла, яка попадає на інше, залежить від форми, розмірів тіл, їх взаємного розташування, відстані між ними тощо. Для обліку тої частини потоку випромінювання від поверхні одного тіла, яка попадає на поверхню другого тіла, використовують поняття **кутового**

**коефіцієнта випромінювання.** Коли розглядається потік випромінювання від елементарної площадки, яка знаходиться на поверхні одного тіла, на всю поверхню іншого тіла, то такий кутовий коефіцієнт випромінювання називається *локальним*, а коли – від всієї поверхні одного тіла на всю поверхню іншого, то такий коефіцієнт випромінювання називається *середнім*.

Кутові коефіцієнти випромінювання характеризують тільки геометричні особливості випромінювальної системи, тобто ними враховується тільки “пряме” попадання енергії випромінювання від одного тіла на друге, а попадання шляхом відбиття від інших тіл не враховується. Тому в подальшому, при запису виразів для кутових коефіцієнтів випромінювання для простоти приймають, що тіла, які беруть участь в теплообміні випромінюванням, є абсолютно чорними.

**6. Визначення температури випромінюючих тіл.** При експериментальному оптичному визначенні температури випромінюючих тіл, дослідні значення відрізняються від фактичної температури поверхні. Тому розрізняють декілька різних величин температури.

**Радіаційна інтегральна температура**  $T_p$  є умовна температура тіла, при якій густина потоку його випромінювання  $E$  дорівнює густині потоку випромінювання абсолютно чорного тіла. Якщо позначити істинну температуру через  $T$ , то отримаємо:

$$\varepsilon\sigma_0 T^4 = \sigma_0 T_p^4,$$

звідки отримаємо

$$T_p = \varepsilon^{0,25} T \quad \text{або} \quad T = T_p \varepsilon^{-0,25}, \quad (9.22)$$

тобто, істинна температура більша радіаційної.

**Кольорова температура**  $T_k$  визначається як температура абсолютно чорного тіла, при якій відношення його спектральних густин потоку випромінювання для двох довжин хвилі  $J_{\lambda_1}$  та  $J_{\lambda_2}$  у видимому діапазоні таке саме, як випромінюючого тіла з температурою  $T$ . Абсолютно чорне тіло при кольоровій температурі має такий самий колір поверхні, що і випромінююче тіло:

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{T_k} = \frac{\ln \frac{\varepsilon_{\lambda_1}}{\varepsilon_{\lambda_2}}}{C_2 \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right)}. \quad (9.23)$$

Як правило, використовуються хвилі зеленого ( $\lambda_1 = 0,544$  мкм) і червоного ( $\lambda_2 = 0,655$  мкм) кольорів.

Кольорова температура більша істинної  $T_k > T$ .

Наведені співвідношення, які пов'язують між собою істинну, радіаційну та кольорову температури лежать в основі оптичних методів вимірювання високих температур.

### Контрольні питання

1. Дайте визначення теплового випромінювання, поясніть його механізм.
2. Які види випромінювання вам відомі? Які довжини хвиль їм відповідають?
3. Яке випромінювання називається селективним або вибірко-вим? У якому випадку випромінювання має суцільний спектр?
4. Що називають об'ємним та поверхневим випромінюванням? Випромінювання яких груп речовин має об'ємний характер?
5. Яке випромінювання називають рівноважним або нерівноважним?
6. Перерахуйте різновиди напівсферичного випромінювання, дайте їх визначення і запишіть вирази для їх підрахунку.
7. Дайте визначення коефіцієнтів поглинання, відбивання і проникнення. Запишіть співвідношення між ними.
8. Від яких параметрів залежить коефіцієнт випромінювання твердих тіл?
9. Дайте визначення кутового коефіцієнта випромінювання, перерахуйте його види.
10. Що таке променевий теплообмін?
11. Сформулюйте закон Планка, Релея–Джинса та Віна для рівноважного випромінювання абсолютно чорного тіла.
12. Сформулюйте закон Кірхгофа та практичні наслідки з нього.
13. Сформулюйте закон Стефана–Больцмана.
14. Перерахуйте і охарактеризуйте геометричні властивості



$$\text{б) } I_{\lambda} = \frac{C_2 \cdot \lambda^5}{\frac{C_1}{e^{\lambda T}} - 1}; \quad \text{г) } I_{\lambda} = \frac{C_2 \cdot \lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) + 1}.$$

7. *Із закону Планка випливають декілька граничних випадків, які мають назву законів:*

- а) Релея–Джинса і Віна;
- б) Ламберта і Бугера;
- в) Стефана–Больцмана і Кірхгофа;
- г) зміщення Віна і Бугера.

8. *Виберіть правильний математичний вираз для закону зміщення Віна:*

$$\text{а) } \lambda_{\max} = \frac{2,898 \cdot 10^{-3}}{T}; \quad \text{в) } \frac{\lambda_{\max}}{T} = 2,898 \cdot 10^{-3};$$

$$\text{б) } \lambda_{\max} \cdot T = 2,898; \quad \text{г) } \lambda_{\max} \cdot T = 2,898 \cdot 10^3.$$

9. *Вираз “при рівноважному випроміненні, коефіцієнт поглинання чисельно дорівнює ступеню чорноти” випливає із закону ...*

- а) Стефана–Больцмана; б) Планка; в) Ламберта; г) Кірхгофа.

10. *Вкажіть правильний варіант запису закону Стефана–Больцмана:*

$$\text{а) } E_0 = \sigma T^4; \quad \text{в) } E_0 = \lambda_{\max} T;$$

$$\text{б) } E_0 = 5,67(T/100)^3; \quad \text{г) } E_0 = \int I_{\lambda} d\lambda.$$

11. *Визначає кутовий розподіл рівноважного випромінювання закон...*

- а) Ламберта; в) Кірхгофа;
- б) Стефана–Больцмана; г) Планка.

12. *Спектр випромінювання газів має характер...*

- а) поверхневий і суцільний; в) об’ємний і суцільний;
- б) поверхневий і вибірковий; г) об’ємний і селективний.

13. *Вкажіть правильну одиницю виміру випромінювальної здатності тіла:*

$$\text{а) } \text{Вт/м}^2 \cdot \text{К}^4; \quad \text{б) } \text{Вт} \cdot \text{м/К}^4; \quad \text{в) } \text{Вт/м}^2 \cdot \text{К}; \quad \text{г) } \text{Вт/м} \cdot \text{К}^4.$$

14. *Виберіть правильний вираз для співвідношення коефіцієн-*

*тів поглинання, відбивання та проникності:*

а)  $A + R + D = 1$ ;

в)  $A - R - D = 0$ ;

б)  $A + R + D = 0$ ;

г)  $A + R - D = 1$ .

## Частина 3

Розділ 10

### ТЕОРІЯ ТЕПЛООБМІНУ В АНАЛІЗІ ТЕПЛОВИХ ПРОЦЕСІВ ТЕХНОЛОГІЧНИХ СИСТЕМ

---

- Класифікація джерел і стоків теплоти
- Класифікаційний код та шифрування джерел
- Схематизація тіл і джерел, що приймають участь у теплообміні при механічній обробці та зварюванні
- Схематизація геометричної форми тіл
- Граничні та початкові умови
- Аналітичні методи розв'язання теплофізичних задач, при описі теплових явищ у процесах механічної обробки і зварювання
- Метод джерел теплоти
- Алгоритм і методика теплофізичного аналізу технологічних систем при обробці поверхонь
- Чисельні методи розрахунку теплових процесів при зварюванні

Удосконалення технологічних процесів машинобудування викликає необхідність вивчення теплових явищ, що існують при механічній обробці і зварюванні деталей. Підвищення міцності, в'язкості і деяких інших властивостей конструкційних матеріалів, характерне для елементів сучасних машин, інтенсифікація режимів обробки приводять до того, що температура процесів є одним з факторів, що обмежують продуктивність і виявляють суттєвий вплив на якість і точність виробів. У зв'язку з цим виникає необхідність управління тепловими явищами при механічній обробці матеріалів і їх зварюванні.

#### 10.1. Класифікація джерел і стоків теплоти

У процесі механічної обробки виникають теплові джерела як результат переходу в теплоту енергії деформації матеріалу, що обробляється і роботи тертя на контактних поверхнях інструмента. Джерела теплоти можуть утворюватись також в результаті додаткового підігріву деталей струменем плазми, подачею в зону обробки

електричного струму або іншим способом. Стоками звичайно називають джерела від'ємної інтенсивності, при дії яких теплота відводиться від твердого тіла. Стоки теплоти можуть утворюватись, наприклад, на ділянках контакту деталі чи інструмента з охолоджуючою рідиною або газом.

Усі джерела і стоки можуть бути класифіковані за деякими основними ознаками, що дозволяє їх систематизувати і в деякій мірі уніфікувати розв'язання задач технологічної теплофізики.

До основних ознак, за якими можна класифікувати джерела (стоки) теплоти, відносять:

- 1) їх розташування відносно тіл, що приймають участь в процесі обробки і форма джерел;
- 2) закон розподілу інтенсивності;
- 3) швидкість переміщення;
- 4) час функціонування.

**За розташуванням** джерела теплоти розділяють на зовнішні, що діють на поверхні тіл і внутрішні – функціонуючі в їх масі. Джерела, що виникають в зоні обробки, в принципі є внутрішніми, оскільки і енергія деформації, і енергія тертя виділяються в деяких об'ємах. Однак у більшості товщина шарів, в яких виділяється теплота, настільки мала, що такі джерела можна вважати зовнішніми, діючими на поверхні тіл, що приймають участь в обробці. При теплофізичному аналізі реальні джерела, форму і розміри яких не завжди можна точно описати, замінюють ідеалізованими, з формою наближеною до фактичної. Такі ідеалізовані джерела можуть бути три-, дво-, одномірними та точковими. У тримірних (об'ємних) джерелах теплота розподілена по деякому об'єму (циліндр, сфера, паралелепіпед). Якщо розмір об'ємного джерела в напрямі однієї з осей координат настільки незначний розмірів інших напрямів, що ним можна знехтувати, то джерело вважають двомірним. Залежно від виду поверхні, на якій розташоване таке джерело, воно може бути плоским, циліндричним тощо.

Одномірними (лінійними) називають джерела, один з розмірів яких настільки перевищує інші, що величиною останніх можна знехтувати, вважаючи їх рівними нулю. Так утворюються джерела в вигляді ділянки прямої лінії, дуги кола тощо.

Нарешті, якщо всі розміри джерела відносно розмірів твердого тіла, що нас цікавить, досить малі, джерело можна вважати точковим. Таке джерело використовується як математична абстракція,

з допомогою якої часто конструюють методику описання процесу поширення теплоти джерел складних форм.

Будь-яке з цих джерел, за виключенням точкового, може бути необмеженим або обмеженим. Обмеження залежно від виду і особливостей може бути по одній, двох або трьох координатних осях, причому, природно, обмежень не може бути більше одного для одномірного, двох для двомірного і трьох для тримірного джерела. Закон розподілу інтенсивності є однією з найважливіших характеристик джерела. Інтенсивністю називається теплова потужність (кількість теплоти, що утворюється за одиницю часу), віднесена до одиниці об'єму  $V$ , площі  $F$  або довжини  $L$  відповідно для три-, дво- та одномірних джерел. У процесах механічної обробки виникає декілька джерел теплоти. Щоб записати для кожного з них теплову потужність  $Q$ , необхідно:

- визначити загальну теплову потужність процесу;
- розподілити її між конкретними джерелами, що виникають у заданій технологічній операції, тобто скласти прибуткову частину теплового балансу.

Загальна теплова потужність процесу  $Q_{заг} = Q + Q_{доод}$ , де  $Q$  виникає як результат перетворення в теплоту механічної роботи, а потужність  $Q_{доод}$  (додаткова) – як результат нагріву зони обробки (електричним струмом, плазмою або іншим способом). Якщо додатковий обігрів не використовується, то  $Q_{доод} = Q$ . Між механічною потужністю процесу і її тепловим еквівалентом теоретично немає повної кількісної ідентичності, оскільки частина механічної енергії переходить в поглинальну енергію деформації кристалічної ґратки, матеріалу, що обробляється.

Однак дослідження показали, що при значних ступенях деформації, характерних для процесів механічної обробки, енергія, що поглинається незначна і з достатньою для практики точністю можна вважати, що вся робота переходить у теплоту.

Прибуткова частина теплового балансу при механічній обробці може бути представлена, як:

$$Q_{заг} = Q + Q_{доод} = Q_d + \sum_{i=1}^n Q_{тер} + Q_{доод}, \quad (10.1)$$

де  $Q_d$  – теплота еквівалентна роботі деформації;  $Q_{тер}$  – теплота еквівалентна роботі тертя на кожній з  $n$  ділянок, де вона виникає.

Якщо теплова потужність цього джерела  $Q$  розподілена за деяким об'ємом, розташованим у системі координат  $X, Y, Z$ , то між елементом теплової потужності і інтенсивністю джерела  $q(x, y, z)$  існує очевидне співвідношення:

$$dQ(x, y, z) = q(x, y, z) \cdot dx \cdot dy \cdot dz. \quad (10.2)$$

У реальних технологічних процесах розподіл інтенсивності джерел описується складними закономірностями. При застосуванні теплофізичного аналізу використовують ідеалізовані закони розподілу інтенсивності джерел і стоків у просторі та часі.

Найбільш простим є рівномірний розподіл, коли інтенсивність  $q_o$  не залежить від координат та часу. За допомогою формули (10.2) одержимо:

$$q_{o3} = \frac{Q}{\iiint_W dx dy dz} = \frac{Q}{V}; \quad (10.3)$$

$$q_{o2} = \frac{Q}{\iint_F dx dy} = \frac{Q}{F}; \quad (10.4)$$

$$q_{o1} = \frac{Q}{\int_L dx} = \frac{Q}{L}, \quad (10.5)$$

відповідно для три-, дво- та одномірного джерел.

Наступну групу представляють джерела з лінійною розподіленою інтенсивністю. Як приклад розглянемо двомірне джерело з розподілом інтенсивності за експоненціальним законом  $q_{(x)} = q_o \exp(-kx)$  по осі  $Ox$  і рівномірно – по осі  $Oy$ . Використовуючи формулу (10.2), одержимо:

$$q_x = \frac{Q \cdot \exp[-kx]}{b \cdot \int_o^l \exp[-kx] dx} = \frac{Q \cdot k \cdot \exp[-kx]}{b \cdot (1 - \exp[-kl])}. \quad (10.6)$$

Експоненціальна функція  $\exp[-kx]$  досить швидко зменшується зі збільшенням  $kx$ , так що при  $kx = 3$  її значення знаходиться у межах 5 % від  $\exp(0) = 1$ . Тому в випадку, коли джерело в точці  $x = l$  має інтенсивність близьку до нуля, можна покласти  $kl = 3$  і отримати:

$$q_{(x)} = \frac{Q \cdot 3}{l \cdot b} \exp\left[-3 \frac{x}{l}\right] = \frac{3 \cdot Q}{b \cdot l} \exp[-3f], \quad (10.7)$$

де  $f = x/l$  – безрозмірна абсциса довільної точки всередині джерела.

Значну групу ідеалізованих джерел, що використовуються у теплофізиці, складають джерела з розподілом інтенсивності за нормальним законом. До цієї групи відносять нормально-лінійні, нормально-плоскі (смугові), нормально-кругові і нормально-об'ємні джерела теплоти. Загальним для всіх них є те, що розподіл інтенсивності вздовж однієї, двох або трьох осей координат відповідає закону нормального розподілу. Розглянемо, наприклад, двомірне обмежене джерело довжиною  $2l$ . Вздовж осі  $Ox$  воно має закон розподілу  $q_{(x)} = q_0 \exp(-kx^2)$ , а вздовж осі  $Oz$  – розподілено рівномірно. Параметр  $k$ , що характеризує гостроту кривої нормального розподілу, називають **коефіцієнтом сконцентрованості теплового потоку**.

Нарешті зупинимось на комбінованому законі розподілу, що описується на різних ділянках різними закономірностями. Прикладом тут може бути джерело, що являє собою теплоту тертя на площадці контакту між стружкою і різцем. Можна вважати, що на першій частині контактної площадки теплота розподілена рівномірно, а на другій – по деякій падаючій кривій, яка добре апроксимується експонентою.

Швидкість переміщення джерел у теплофізичних розрахунках характеризують звичайно безрозмірним критерієм Пекле ( $Pe$ ):

$$Pe = \frac{\omega_D \cdot l}{a_T}, \quad (10.8)$$

де  $\omega_D$  – швидкість руху джерела, м/с;  $l$  – його характерний розмір, м;  $a_T$  – коефіцієнт температуропровідності тіла, в якому рухається джерело, м<sup>2</sup>/с.

За швидкістю руху джерела поділяють на нерухомі ( $Pe = 0$ ), що рухається з довільною швидкістю ( $10 > Pe > 0$ ), і швидкорухомі ( $Pe \geq 10$ ).

Швидкість руху швидкорухомого джерела перевищує швидкість поширення теплоти в цьому тілі; таким чином, теплота не поширюється перед джерелом (у напрямі руху); а тільки під ним і

позаду його. Розрахунки показують, що в переважній більшості випадків при механічній обробці матеріалів і зварюванні, джерела можна вважати швидкорухомими.

У теплофізичних розрахунках тривалість процесів описують звичайно безрозмірним критерієм Фур'є:

$$Fo = \frac{a_T \cdot \tau}{l^2}, \quad (10.9)$$

де  $\tau$  – час.

За тривалістю функціонування джерела класифікують як:

- миттєві ( $Fo \rightarrow 0$ );
- діючі протягом певного проміжку часу;
- періодично діючі;
- діючі настільки довго, що процес теплообміну під впливом цього джерела можна вважати усталеним.

Граничні значення  $Fo$ , які відповідають переходу від неусталеного до усталеного теплообміну, залежать від конкретної теплофізичної ситуації в зоні обробки. Миттєвих джерел на практиці не існує. Миттєве джерело в теплофізиці – це деяка абстракція, що дозволяє конструювати математичні вирази для описання процесу поширення теплоти в складних випадках.

### 10.2. Класифікаційний код та шифрування джерел

Для короткого запису особливостей того або іншого джерела або стоку існує шифрування його ознак (табл. 10.1). Це необхідно як для зручності оперування термінами, так і для підготовки алгоритмів та програм машинного розрахунку. Кодований запис теплової задачі для кожного з джерел або стоків теплоти складається з трьох груп символів і має наступний вигляд:

$$\frac{MKO}{P.CD} TУ. \quad (10.10)$$

Перша група містить інформацію про мірність  $M$  і конфігурацію зони тепловиділення  $K$  та обмеженості  $O$  джерела. Друга група інформує про закони розподілу густини тепловиділення за осями координат  $P$ , швидкості руху джерела  $C$  і тривалості його функціонування  $D$ . Третя група, що складається з двох символів, фіксує форму тіла, на якому діє джерело  $T$  і граничні умови  $У$ .

**Таблиця 10.1 – Шифрування ознак джерел теплоти і тіл, де вони діють**

Символ	Ознака джерела та тіла	Код
М	Точкове	0
	Одно-, дво- і тримірне	1, 2, 3
К	Пряме, плоске	1
	Кільцеве, колове, циліндричне	2
	Кульове	3
О	Необмежене	0
	Обмежене в напрямі однієї, двох і трьох координат	1, 2, 3
Р	Розподілене рівномірно	1
	Розподілене лінійно	2, 3
	Розподілене за експонентою	4
	Нормально розподілене несиметрично	5, 6
	Нормально розподілене симетрично	7
	Комбіноване	8
С	Нерухоме	0
	Рухоме	1
	Швидкорухоме	2
Д	Миттєве	0
	Діюче деякий час	1
	Діюче досить довго (усталений процес)	2
Т	Необмежене тіло	0
	Півпростір	1
	Пластина	2
	Паралелепіпед	3
	Стрижень необмежений	4
	Стрижень обмежений з однієї сторони	5
	Стрижень кінцевої довжини	6
	Циліндр	7
	Куб	8
	Куля	9
У	Граничні умови першого–четвертого роду	1–4

Кожному символу в конкретних умовах відповідає одна цифра. Виключення складає символ *P*, який при підставленні в код задачі повинен містити три цифри, оскільки повинно бути вказано розподілення густини теплових потоків для всіх трьох осей координат. Якщо мірність джерел така, що густина потоків розподіляється по двох або тільки по одному напрямку, то на відповідних місцях в позначенні *P* повинні бути проставлені нулі. Знак “+” відповідає джерелу теплоти, а знак “-” стоку.

### 10.3. Схематизація тіл і джерел, що приймають участь у теплообміні при механічній обробці та зварюванні

Наведемо загальні принципи схематизації компонентів процесу теплообміну стосовно задач, що нас цікавлять.

Перш за все умовимось не враховувати неоднорідність оброблюваних і інструментальних матеріалів, оскільки області, в яких вивчають температурні поля, зазвичай у багато разів перевищують об'єми, де відсутня різниця компонентів структури матеріалу.

Наступним важливим питанням, що відноситься до схематизації властивостей матеріалів, є необхідність враховувати залежність теплофізичних характеристик – коефіцієнта теплопровідності  $\lambda$  і об'ємної теплоємності  $c_p$  від температури. У достатньо широкому діапазоні температур, залежності  $\lambda(t)$  та  $c_p(t)$  описуються рівняннями:

$$\lambda(t) = a_1 + a_2 t + a_3 t^2; \quad (10.11)$$

$$c_p(t) = b_1 + b_2 t + b_3 t^2, \quad (10.12)$$

причому значення коефіцієнтів  $a$  та  $b$  залежать від хімічного складу і термообробки матеріалів. У більш вузьких діапазонах температур залежності  $\lambda(t)$  та  $c_p(t)$  можна в першому наближенні вважати лінійними відносно температури. В роботах Х. Китагави, Г. Малкіна встановлено, що для значної кількості вуглецевих, низько- і середньолегованих сталей в області режимів, характерних для механічної обробки і зварювання, можна вважати, що теплофізичні характеристики є незалежними від температури.

Похибка від прийняття  $\lambda$  та  $c_p$  незалежними від температури може бути знижена, якщо в основу розрахунку покласти значення цих величин рівних середнім величинам температур в очікуваному діапазоні їх зміни.

### 10.4. Схематизація геометричної форми тіл

При математичному опису теплових явищ реальну форму твердих тіл, що приймають участь в процесі механічної обробки, ідеалізують і відносять до однієї з таких різновидностей:

– необмежений простір;

- простір, обмежений однією площиною або поверхнею (півпростір);
- необмежена пластина;
- необмежений клин в двох напрямках;
- необмежений вздовж осі стрижень;
- стрижень необмежений в одному напрямі;
- тіло, обмежене поверхнями або площинами, що утворюють замкнутий об'єм (просторовий клин, паралелепіпед, еліпсоїд, куля, циліндр кінцевих розмірів).

Чим більше обмежено тіло і складніша його конфігурація, тим при інших рівних умовах складніший математичний опис процесу поширення теплоти в ньому. При використанні аналітичних методів розрахунку ускладнення форми тіл веде до ускладнення математичних виразів. Тому схематизуючи форму матеріалу, що оброблюється та інструмента немає необхідності замінювати їх значно обмеженими тілами.

Допустимість тої або іншої ідеалізації форми реальних тіл визначається в основному наступним:

- співвідношенням між розмірами джерела або стоку теплоти і розмірами тіла, на поверхні або в об'ємі якого вони діють;
- ступенем впливу умов теплообміну на граничних поверхнях на температуру області, що нас цікавить.

Чим менші розміри джерела відносно розмірів тіла, що нагрівається, тим менший вплив його конкретної форми на температурне поле в області, що прилягає до джерела. При цьому вплив форми тіла на температуру близьких до джерела об'ємів тим менше, чим коротший період виділення теплоти.

Досвід показує, що при практично використовуваних розмірах деталей, режимах процесу механічної обробки і зварювання реальну форму оброблюваного предмета можна, як правило, замінити півпростором, рідше необмеженою пластиною і зовсім рідко – тілами зі значним ступенем обмеження.

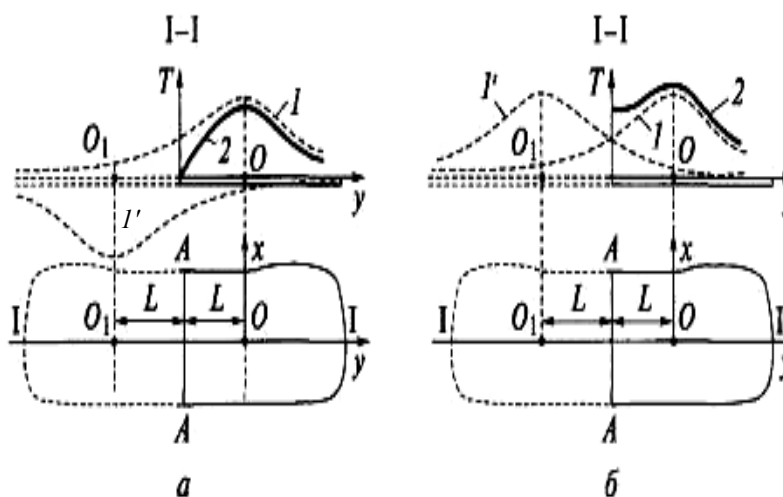
### **10.5. Граничні та початкові умови**

При математичному формулюванні теплофізичних задач і відповідній схематизації процесу умови теплообміну на поверхні прийнято задавати у вигляді так званих граничних умов.

Граничні умови першого роду передбачають, що на поверхні заданий закон розподілу температур  $t_{нов}(x, y, z, \tau)$  залежно від координат і часу. В теплофізиці ці граничні умови використовують тоді коли за відомою (наприклад, знайденою експериментально) температурою поверхні деталі або інструмента вимагається визначити температуру будь-якої області всередині цих тіл.

Окремим випадком умови першого роду є ізотермічна умова, коли поверхня тіла має постійну температуру протягом всього процесу поширення теплоти. Наприклад, при інтенсивному омиванні поверхні тіла рідиною, температура може залишатись постійною. В розрахунках теплових процесів при зварюванні умова першого роду зустрічається відносно рідко.

Наведемо приклад того, як можна за допомогою деяких формальних заходів забезпечити ізотермічну умову  $t=0$ . Нехай півнескінченна пластина нагрівається в точці  $O$  зварювальною дугою (рис. 10.1, *a*), а границя  $A-A$  постійно підтримується при температурі  $t=0$ .



**Рис. 10.1 – Виконання граничних умов:**  
*a* – ізотермічних, при використанні стоку теплоти;  
*б* – адіабатних, при використанні додаткового джерела теплоти

Очевидно, що якщо би пластина була нескінченною, то розподіл температур у перерізі  $I-I$  в деякий момент часу виражався би кривою  $I$  і температура по лінії  $A-A$  не дорівнювала би нулю. Однак можна уявити, що в тій же нескінченній пластині в точці  $O_1$ , що знаходиться на відстані  $L$  від лінії  $A-A$ , діє джерело теплоти з від'ємним знаком, тобто, так званий, "тепловий стік". Причому властивості цього стоку теплоти точно співпадають з властивостями джерела теплоти від зварювальної дуги, а розподіл температур описується однаковою математичним виразом.

Тоді від'ємна температура виражається кривою  $I'$ , що аналогічна кривій  $I$ , але з від'ємним знаком. Додаючи ординати кривої  $I'$  з ординатами кривої  $I$ , отримаємо криву 2 розподілу температури. На границі  $A-A$  температура завжди буде рівною нулю, в той час як в самій пластині температура точок буде безперервно змінюватись.

При граничних умовах другого роду заданий закон розподілу інтенсивності теплових потоків  $q(x, y, z, \tau)$ , що проходять через цю поверхню. Як правило, тут необхідно знайти температуру довільної точки тіла  $t(x, y, z, \tau)$ , в тому числі і точок, розташованих на поверхні.

Оскільки закон Фур'є виражає зв'язок між тепловим потоком і градієнтом температур то можна стверджувати, що умова другого роду задає градієнт температури на границі тіла.

Адіабатична границя є окремим випадком умови другого роду, коли тепловий потік з поверхні тіла дорівнює нулю, тобто:

$$q_F = 0; \quad \frac{\partial t}{\partial n} = 0. \quad (10.13)$$

У технічних розрахунках, а саме стосовно зварювання, мають місце випадки, коли тепловий потік з поверхні тіла дуже малий порівняно з потоком всередині тіла. Тоді можна прийняти цю границю як адіабатичну.

Наприклад, при нагріві зварювальною дугою півнескінченної пластини в точці  $O$  (рис. 10.1, б) границя  $A-A$  дотикається з повітрям і випромінює деяку кількість теплоти. Для простоти розрахунків можна прийняти, що границя  $A-A$  є адіабатичною. Виконати цю умову можна таким чином. Допустимо, що пластина є нескінченною і в ній на відстані  $L$  з іншої сторони від лінії  $A-A$  в точці  $O_1$  діє точно таке ж джерело теплоти, як і в точці  $O$ . Очевидно, що тепловий потік через границю  $A-A$  від джерела  $O$  дорівнює в кожній точці лінії  $A-A$  тепловому потоку від джерела  $O_1$ . Сумарний тепловий

потік через границю  $A-A$ , таким чином, дорівнює нулю. Температура точок півнескінченної пластини знаходиться шляхом складання ординат кривої  $I$  з ординатами кривої  $I'$  (рис. 10.1, б)

Температура межі півнескінченної пластини виявляється вдвічі більшою ніж температура відповідних точок нескінченної пластини. Описаний метод компенсації теплового потоку має назву методу **відбиття**, оскільки в цьому випадку теплонепроникна границя може розглядатись як границя, що відбиває тепловий потік, направлений з боку метала.

Для перевірки гіпотези про адіабатичність тих чи інших ділянок деталі або інструмента доцільно оцінювати похибкою, що виникає за цим допущенням:

$$\varepsilon = 100 \frac{\alpha F}{c\rho V} \tau, \% \quad (10.14)$$

де  $\varepsilon$  – відносне зниження температури, викликане тепловіддачею в навколишнє повітря;  $\alpha$  – коефіцієнт тепловіддачі,  $\text{Вт}/\text{м}^2\cdot\text{К}$ ;  $F$  – площа поверхні, що охолоджується,  $\text{м}^2$ ;  $c$  – масова теплоємність тіла,  $\text{Дж}/\text{кг}\cdot\text{К}$ ;  $\rho$  – густина тіла,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  $V$  – об'єм тіла,  $\text{м}^3$ ;  $\tau$  – тривалість процесу, с.

Якщо теплообміном граничної поверхні з навколишнім середовищем нехтувати не можна, використовують граничні умови третього роду: задають температуру середовища  $t_c$ , в якій знаходиться розглядуване тіло, і коефіцієнт тепловіддачі  $\alpha(x, y, z, \tau)$ . Математично граничні умови третього роду записуються виразом:

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial n} + \alpha(t_{нов} - t_c) = 0, \quad (10.15),$$

де  $t_{нов}$  – температура поверхні тіла.

Щоб не ускладнювати розрахунки приймають деяке середнє значення  $\alpha$  в діапазоні температур.

З умови третього роду, як граничні випадки можуть бути отримані ізотермічні та адіабатичні умови. Якщо  $\lambda$  – деяка кінцева величина, що не рівна нулю, то при  $\alpha \rightarrow \infty$  отримаємо ізотермічну умову, а при  $\alpha \rightarrow 0$  – адіабатну.

Застосування граничних умов третього роду ілюструємо прикладом вільного охолодження тонкої пластини. Задамо наступні параметри:

1. Початковий розподіл температури в пластині рівномірний, тобто при  $\tau = 0$ ,  $t = t_0$ .

2. Крайова умова згідно з законом Ньютона–Ріхмана:

$$q_F = \alpha(t_{nos} - t_c). \quad (10.16)$$

Приймемо для спрощення температуру середовища  $t_c$  рівною нулю.

За час  $d\tau$  з двох поверхонь пластини  $2F$  буде віддано в навколишнє середовище теплота:

$$dQ = q_F \cdot 2F \cdot d\tau = \alpha \cdot t_{nos} \cdot 2F \cdot d\tau. \quad (10.17)$$

Температура пластин з об'ємом  $\delta \cdot F$  і теплоємністю матеріалу  $c \cdot \rho$  за час  $dt$  знизиться на величину  $dt$ :

$$-dt = \frac{dQ}{c\rho\delta F}. \quad (10.18)$$

Підставивши вираз (10.17) в (10.18) і виконавши необхідні перетворення, знаходимо:

$$\frac{dt}{t} = -\frac{2\alpha}{c\rho\delta F} d\tau = -bd\tau. \quad (10.19)$$

Величина  $b = \frac{2\alpha}{c\rho\delta}$  називається коефіцієнтом температуровіддачі для пластини і має розмірність  $c^{-1}$ .

Інтегруючи вираз (10.19), знаходимо:

$$\ln t = -b\tau + C. \quad (10.20)$$

Постійну  $C$  визначимо з початкової умови  $t = t_0$  при  $\tau = 0$ :

$$C = \ln t_0. \quad (10.21)$$

Підставивши  $C$  в рівняння (10.20) і виконавши потенціювання, знаходимо:

$$t = t_0 e^{-b\tau}. \quad (10.22)$$

Отже, зміна температури в часі рівномірно нагрітої пластини в процесі вільного охолодження відбувається за експоненціальним законом.

**Приклад 10.1.** Перед зварюванням стальна пластина товщиною  $\delta = 30$  мм була нагріта до  $t_0 = 250$  °С. Визначити протягом якого відрізка часу пластина охолоне до температури 200 °С; Тепловиділенням при зварюванні знехтувати. Для сталеної пластини:  $c \cdot \rho = 4,29 \cdot 10^6$  Дж/м<sup>3</sup>·К,  $\alpha = 25$  Вт/м<sup>2</sup>·К.

**Розв'язок**

Визначаємо коефіцієнт температуровіддачі. З виразу (10.22) знаходимо:

$$e^{-b\tau} = \frac{t}{t_0}; \quad -b\tau = \ln \frac{t}{t_0} = \ln \frac{200}{250} = -0,223.$$

Визначаємо тривалість охолодження:

$$\tau = \frac{0,223}{3,89 \cdot 10^{-4}} = 573 \text{ с.}$$

Граничні умови четвертого роду виникають, якщо це тіло дотикається з іншим тілом. За ідеального контакту на поверхні дотику температура  $t_{нов1}$  точки одного тіла повинна бути рівна температурі  $t_{нов2}$  спряженої точки іншого тіла, тобто:

$$t_{нов1} = t_{нов2}. \quad (10.23).$$

Незважаючи на простоту останнього виразу, розв'язання теплофізичних задач за умови рівності температур в усіх точках контакту тіл, що дотикаються, утруднені, особливо в випадку, коли одне з тіл переміщується відносно іншого. Тому на практиці замість рівності температур у довільній точці контакту записують умову четвертого роду для однієї якої-небудь характерної точки (наприклад, точки де має місце найбільша температура) або для середніх на поверхні дотику температур. В останньому випадку  $t_{нов1} = t_{нов2}$ . Крім цього, має місце рівність теплових потоків, що проходять через граничну поверхню:

$$\lambda_1 \left( \frac{\partial t_1}{\partial n} \right)_{нов} = \lambda_2 \left( \frac{\partial t_2}{\partial n} \right)_{нов}. \quad (10.24)$$

Початкові умови показують яке було температурне поле в цьому тілі в момент часу  $\tau = 0$ , прийнятий за початок відліку. Найчастіше вважають, що температура тіл, що приймають участь в процесі, до початку останнього була рівна температурі навколишнього середовища, яку умовно вважають рівною нулю. Далі дійсну температуру навколишнього середовища добавляють до температури, отриманої розрахунком.

#### **10.6. Аналітичні методи розв'язання теплофізичних задач, при описі теплових явищ у процесах механічної обробки і зварювання**

Після проведення схематизації джерел і тіл, що приймають участь в теплообміні для кожного з тіл повинно бути написано, а для конкретних обставин – інтегровано диференціальне рівняння теплопровідності. Для того щоб конкретизувати задачу і вибрати розв'язок, який відповідає процесу поширення теплоти в випадку, що нас цікавить, до диференціального рівняння необхідно приєднати умови однозначності.

До числа аналітичних методів розв'язання диференціального рівняння із заданими крайовими умовами відносять класичний метод, операційні методи і метод джерел теплоти.

**Класичний метод** полягає в знаходженні сукупності частинних розв'язків, що задовольняють диференціальному рівнянню і крайовим умовам, а потім в їх накладені (суперпозиції) для знаходження функції, що нас цікавить. При цьому кожний з частинних розв'язків шукається, як правило, в вигляді добутку двох функцій, одна з яких залежить від часу, а друга – від координат.

У теплофізиці класичний метод має досить обмежене застосування через математичні труднощі, що виникають при його використанні.

**Операційні методи**, зокрема інтегрального перетворення Лапласа, використовують для розв'язання задач теплофізики процесів механічної обробки і зварювання. При цьому вивчається не сама функція (оригінал), а її видозміна, отримана шляхом перемноження оригінала на експоненціальну функцію, і яка інтегрується в певних межах.

Після розв'язання задачі в образах знаходження оригінала, тобто функції, що описує температурне поле, виконується шляхом зворотного перетворення.

Найбільш поширений у теплофізиці *метод джерел теплоти*. За допомогою цього методу порівняно просто можна написати інтеграл, що задовольняє диференціальному рівнянню теплопровідності і умовам однозначності, подальшим завданням є обчислення його значення.

У класичному, так як і в операційних методах, центр тяжіння полягає у визначенні самого інтеграла, що є досить складним.

### 10.7. Метод джерел теплоти

В основі методу джерел теплоти закладені такі головні положення. Температурне поле, що виникає в теплопровідному тілі під дією джерела теплоти довільної форми, рухомого або стаціонарного, діючого тимчасово або безперервно, можна отримати як результат тієї або іншої комбінації температурних полів, виникаючих під дією системи точкових миттєвих джерел.

Головним розв'язком методу джерел є результат, одержаний В.В. Томсоном. Останній розв'язав диференціальне рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a_T \nabla^2 t \quad (10.25)$$

для таких умов:

– тіло, в якому відбувається процес поширення теплоти, має необмежено великі розміри, і впливом теплообміну зовнішніх поверхонь його з навколишнім середовищем можна знехтувати;

– до початку процесу всі точки тіла мали однакову температуру, яка умовно прийнята рівною нулю.

У момент часу  $\tau = 0$  у точці тіла з координатами  $X_D, Y_D, Z_D$  спалахнуло і миттєво потухло джерело, що виділило  $Q$ , теплоти. Після цього імпульсу точкового джерела теплота поширювалось завдяки теплопровідності тіла. За Томсоном, процес поширення теплоти в цьому випадку описується рівнянням:

$$t(x, y, z, \tau_{ic}) = \frac{Q}{\lambda \sqrt{a_T} (4\pi \tau_{ic})^{3/2}} \exp\left[-\frac{R^2}{4a_T \tau_{ic}}\right], \quad (10.26)$$

де  $t(x, y, z, \tau_{ic})$  – температура довільної точки тіла з координатами  $x, y, z$  через  $\tau_{ic}$  секунд після того як в точці з координатами  $X_D, Y_D, Z_D$  мав місце тепловий імпульс, тобто виникло і потухло

миттєве точкове джерело теплоти, в  $^{\circ}\text{C}$ ;  $Q$  – кількість теплоти, внесена в тіло цим імпульсом, Дж.

$$R = \sqrt{(x_d - x)^2 + (y_d - y)^2 + (z_d - z)^2} \quad (10.27)$$

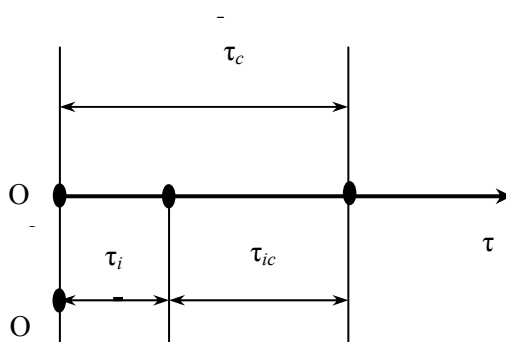
де відстань від джерела до точки розгляду в м;  $\lambda$ ,  $a_T$  – коефіцієнти тепло- і температуропровідності тіла, прийняті незалежними від температури ( $\text{Вт/м}\cdot\text{К}$  і  $\text{м}^2/\text{с}$ , відповідно).

Рівняння (10.26) можна записати таким чином:

$$t_{TM} = Q \cdot F(R, \tau_{ic}), \quad (10.28)$$

тобто температура в довільній точці твердого тіла з відомими теплофізичними параметрами, яка виникла під дією точкового миттєвого джерела теплоти, залежить від кількості теплоти, внесеної цим джерелом, відстані від нього до заданої точки і часу, що пройшов від моменту виникнення імпульсу до моменту початку спостереження.

Моменти імпульсу і спостереження краще пояснити користуючись відмітками на осі часу (рис. 10.2).



**Рис. 10.2 – Ілюстрація понять “момент імпульсу” і “момент спостереження”**

Точка  $O$  – початок відліку часу. Миттєве джерело загорілось і потухло в момент часу  $\tau_i$ . Величина  $\tau_i$  визначає момент імпульсу. Температура будь-якої точки тіла нас цікавить в момент часу  $\tau_c$ , який назовемо моментом спостереження. Теплота джерела таким чином, поширювалась в тілі від моменту імпульсу до моменту спостереження, тобто протягом часу:

$$\tau_{ic} = \tau_c - \tau_i. \quad (10.29)$$

Користуючись фундаментальним розв'язком, можна описати температурне поле, що виникає під дією різних джерел теплоти.

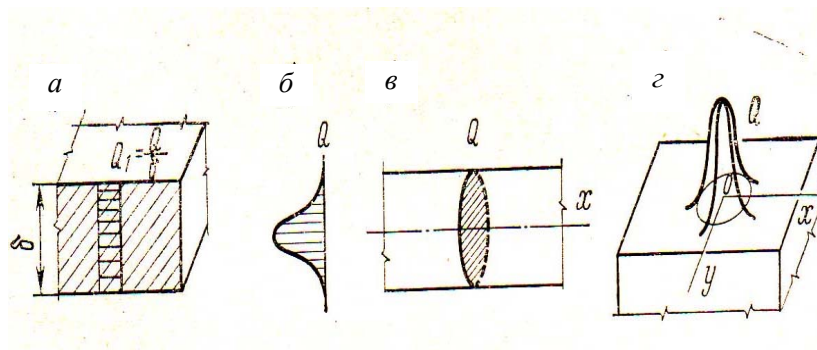
Для цього, залежно від поставленої задачі, доводиться здійснювати такі інтегральні переходи:

- від точкового джерела до лінійного, смугового, плоского або об'ємного;
- від миттєвого джерела до безперервно діючого;
- від миттєвого джерела до рухомого.

Використовуючи принцип накладення, у результаті комбінування миттєвих точкових джерел, можна отримати багато інших джерел теплоти. Принципом накладення можна користуватись за умови, що теплофізичні характеристики приймають незалежними від температури, а виділенням і поглинанням теплоти в процесі фазових перетворень нехтують. Принцип накладення полягає в додаванні температур від дії окремих джерел, які або знаходяться в різних точках тіла, або виділяють теплоту в різні моменти часу, або і знаходяться в різних точках тіла і виділяють теплоту неодноразово.

**Миттєве лінійне джерело теплоти** являє собою комбінацію миттєвих точкових джерел, що діють одночасно і розташовані на лінії. Розподіл теплоти на лінії дії ряду миттєвих точкових джерел може виражатись різними функціями.

Рівномірний розподіл теплоти на лінії (рис. 10.3, а) означає дію миттєвого лінійного джерела. У випадку розподілу теплоти за нормальним законом (рис. 10.3, б) отримуємо нормально-лінійне миттєве джерело.



**Рис. 10.3 – Розрахункові схеми джерел теплоти:**  
***a*** – лінійне в пластині; ***б*** – нормально-лінійне; ***в*** – плоске в стрижні;  
***г*** – нормально-кругове на поверхні півнескінченного тіла

Температурне поле в пластині від миттєвого лінійного джерела при відсутності тепловіддачі, можна отримати шляхом інтегрування температурних полів від миттєвих точкових джерел (рівняння 10.26):

$$t = 2 \int_0^{\infty} \frac{Q dz}{c\rho\delta(4\pi a_T \tau)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4a_T \tau} - \frac{z^2}{4a_T \tau}}. \quad (10.30)$$

Після перетворень і заміни  $Q_1 = Q/\delta$  знаходимо:

$$t = \frac{Q_1}{c\rho 4\pi a_T \tau} e^{-\frac{r^2}{4a_T \tau}}, \quad (10.31)$$

де  $r$  – відстань від досліджуваної точки до джерела теплоти,  
 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Температурне поле симетричне відносно осі  $z$ . Теплота поширюється відносно осі  $z$  рівномірно в площині  $хоу$ .

**Миттєве плоске джерело теплоти** – це сукупність миттєвих точкових джерел теплоти, що діють одночасно і розташовані в одній площині. Поширення теплоти в початковий момент часу ( $\tau = 0$ ) може мати різноманітний характер. Під миттєвим плоским джерелом звичайно розуміють рівномірний розподіл теплоти в перерізі тіла (рис. 10.3, *в*).

У випадку нормального розподілу теплоти по кругу маємо миттєве нормально-кругове плоске джерело (рис. 10.3, *г*).

Температурне поле від миттєвого плоского джерела  $Q_2 = Q/F$  у стрижні без тепловіддачі виражається рівнянням:

$$t = \frac{Q_2}{c\rho(4\pi a_T \tau)^{1/2}} e^{-\frac{x^2}{4a_T \tau}}. \quad (10.32)$$

Температурне поле є лінійним, температура залежить тільки від координати  $x$  та часу  $\tau$ .

**Миттєве об'ємне джерело теплоти** являє собою сукупність миттєвих точкових джерел, розподілених за будь-яким законом в тілі.

Використовуючи принцип накладення, можна отримати різні миттєві джерела теплоти, що відрізняються своїм розподілом. По суті тільки точкове джерело теплоти є зосередженим відносно всіх координатних осей. Лінійне джерело теплоти є зосередженим відносно двох координатних осей і розподіленим у третьому напрямі. Плоске джерело є зосередженим лише в одному напрямі. Об'ємне джерело може слугувати прикладом розподіленого джерела за всіма напрямками.

**Безперервно діючі джерела теплоти** являють собою сукупність миттєвих джерел, що розподілені за проміжок часу дії джерела. Наприклад, точкове джерело може діяти безперервно протягом певного проміжку часу  $\tau$ . В цьому випадку воно вже не є миттєвим, оскільки теплота виділяється у точці поступово.

Очевидно, що рухоме джерело не може бути миттєвим, оскільки його рух відбувається протягом деякого відрізка часу, коли виділяється теплота. Для швидкорухомих джерел теплоти характерна низка особливостей, які будуть розглянуті в подальшому.

#### **10.8. Алгоритм і методика теплофізичного аналізу технологічних систем при обробці поверхонь**

Довільна технологічна система складається з твердих тіл, що дотикаються між собою в тій або іншій послідовності, а також з рідин і газів, що оточують ці тіла, або циркулюють всередині них. Кожне з твердих тіл має одну або кілька контактних поверхонь. Джерела і стоки теплоти можуть виникати як на цих поверхнях, так і за їх межами.

Завдання теплофізичного аналізу полягає в тому, щоб виявити вплив сукупності джерел і стоків, діючих у конкретній технологічній системі, на температуру довільного компоненту цієї системи. Залежно від мети аналізу можуть бути поставлені задачі щодо визначення:

- закону розподілу температур на різних ділянках технологічної системи або підсистеми, в першу чергу в місцях дотику тіл;
- середніх температур на поверхні тіл;

– максимальних температур, які виникають у системі на найбільш навантажених і відповідальних ділянках.

Маючи цю інформацію, конструктор і технолог можуть намітити шляхи управління тепловими явищами, розв'язати задачу оптимізації системи, підвищення продуктивності процесів обробки та якості виробів.

***Узагальнений алгоритм теплофізичного аналізу:***

1. Виявляють кількість і місце розташування джерел та стоків теплоти в системі. Встановлюють потужність і тривалість функціонування кожного з джерел та стоків.

2. Визначають розміри та конфігурацію площадок або об'єктів, всередині яких діють джерела і стоки теплоти. Встановлюють або приймають закони розподілу густини потоку для кожного джерела (стоку).

3. Схематизують форму і властивості твердих тіл, а також форму та інші характерні особливості джерел і стоків теплоти, діючих в технологічній системі.

4. Приймають вигляд математичного опису граничних умов на поверхні твердих тіл, не зайнятих джерелами і стоками теплоти.

5. Розробляють структурну схему теплообміну, в якій як окремі компоненти фігурують тверді тіла, що приймають участь у технологічній системі. Для кожного компонента схеми показують джерела і стоки теплоти як діючі, які імітують теплообмін між тілами, що дотикаються.

6. Кодують теплові завдання для кожного з твердих тіл, що входять у структурну схему теплообміну.

7. Відповідно до коду теплового завдання встановлюють вигляд теоретичних розрахункових формул і поправок до них, отриманих експериментально. За цими формулами складають розрахункові вирази для визначення середньої температури на кожній з контактних площадок окремого твердого тіла.

8. Розв'язують сумісно вирази для визначення середніх температур на контактних площадках тіл, що дотикаються, і таким чином розраховують густини результуючих потоків теплообміну між твердими тілами, що входять у технологічну систему.

9. У кінцевому результаті формулюють математичні закономірності, що відповідають меті теплофізичного аналізу (розподіл температур, середня або найбільша температура).

10. Розробляють пропозиції з оптимізації процесів і конструкцій у технологічній системі, що витікають з аналізу.

Результуючий потік теплообміну – алгебраїчна сума всіх потоків теплопередачі, що рухаються через контактну площадку двох тіл. Якщо результуючий потік направлений від контактної площадки всередину тіла надаємо йому знак “+”, а якщо із тіл, то знак “-”.

Для одного з двох тіл, що знаходяться у контакті, результуючий потік є джерелом теплоти і, таким чином, має знак “+”. Для іншого тіла той же результуючий потік є стоком теплоти, тому йому повинен бути присвоєний знак “-”. У випадку коли напрям результуючого потоку завчасно невідомий, його вибирають довільно. Дійсний напрям результуючих потоків, що залежить від конкретної теплофізичної обстановки в системі тіл, виявляється у ході подальшого розв’язку.

Структурна схема теплообміну в системі тіл являє собою комплект зображень схематизованих тіл з віднесеними до них джерелами і стоками теплоти, тіла умовно розсунуті, теплові контакти між ними замінені результуючими потоками теплообміну.

Густину результуючих потоків теплообміну визначають шляхом розв’язання балансової задачі при граничних умовах четвертого роду (ГУ4). У цьому випадку прирівнюють одна одній середні температури тіл, що дотикаються, на кожній контактній площадці. Для розв’язання балансової задачі в системі тіл (або для знаходження густини результуючих контактів) слід скласти стільки рівнянь, скільки контактних площадок існує у цій системі.

У ці рівняння входять середні температури, значення яких залежать від відомих густин потоків теплотворних джерел і від невідомих густин результуючих потоків теплообміну. Оскільки число невідомих дорівнює числу рівнянь (результуючих потоків стільки, скільки площадок контакту), система рівнянь має єдиний розв’язок. Таким чином, для всіх контактних площадок складають по два вирази, що описують середню температуру на площадці зі сторони кожного з тіл, що дотикаються. Попарні складання цих виразів дозволяють отримати число рівнянь, рівне числу невідомих густин результуючих потоків теплообміну. В результаті розв’язання цих рівнянь кожний з результуючих потоків теплообміну може виявитись з знаком “+” або “-”. Знак “+” показує, що результуючий потік діє в тому напрямку, який передбачався в структурній схемі теплообміну. Знак “-” свідчить про те, що напрям результуючого потоку повинен бути прийнятим протилежним тому, який передбачався у структурній схемі.

**Інженерна методика розрахунку температур на контактних площадках.** У рівняння, складені при розв'язанні балансових задач, входять вирази для розрахунку температури контактних площадок тіл. Температури на контактних площадках, виникаючи під дією різних джерел і стоків теплоти, можуть бути розраховані шляхом інтегрування розв'язку Томсона. Однак іноді, особливо при нестационарному теплообміні, складних формах та законах розподілу густини джерел, ці розрахунки достатньо трудомісткі. Справа в тому, що при розв'язанні навіть порівняно простих технологічних задач, інтегралі представляють собою складні вирази, а в деяких випадках взагалі неможливо виконати інтегрування точними методами. Тому для практичних цілей з деяким наближенням та похибками, допустимими при теплофізичному аналізі технологічних систем, можна застосувати запропоновану інженерну методику використання розрахункових формул.

Ідея інженерної методики полягає в тому, що формули для розрахунку температур представляють у вигляді ряду співмножників, причому структура цих формул відповідає структурі кодів, що призначені для опису теплових задач. Нагадаємо, що код складається з восьми символів, кожний з яких характеризує ознаку джерела або тіла, що нагрівається:  $M$  – мірність джерела;  $K$  – конфігурація площадки, на якій воно розраховане;  $O$  – обмеженість джерела;  $P$  – закон розподілу густини теплового потоку;  $C$  – швидкість переміщення джерела;  $D$  – тривалість його функціонування;  $T$  – форма тіла, що нагрівається;  $V$  – граничні умови.

Відповідно до цих символів формула для розрахунку температур має вигляд:

$$t = A_M \cdot A_C \cdot A_P \cdot A_D \cdot A_R \cdot A_O \cdot A_T, \quad (10.33)$$

в якій значення кожного із співмножників  $A$  залежить від значення символу в коді теплової задачі [24]. Порядок символів у формулі (10.33) дещо відрізняється від їх порядку в коді задачі, що не вносить принципової різниці. Це зроблено з метою зручності викладу алгоритму розрахунку.

Формула (10.33) може бути застосована для розрахунку як середніх  $t^{cp}$ , так і найбільших  $t^{\max}$  температур на контактній площадці. Тому кожний з співмножників  $A$  може мати позначення  $A^{cp}$  в випадку, коли розраховують середню температуру і  $A^{\max}$  – коли

визначають максимальне значення температури контакту. У формулу (10.33) не входить співмножник  $A_v$ , що враховує граничні умови на поверхнях тіл. Це пояснюється тим, що в технологічних системах найчастіше всього можливі два варіанта граничних умов: другого роду (ГУ2) – коли тепловіддачею з поверхонь, не зайнятих джерелами і стоками теплоти, можна знехтувати, і третього роду (ГУ3) – коли поверхні, незайняті контактом, активно обмінюються теплою з рідиною (технологічною рідиною, мастильним матеріалом) або з навколишнім середовищем (повітрям і іншими газами).

Нехай формула (10.33) написана для ГУ2. Тоді вона повністю може бути застосована для розрахунку температур в першому з двох варіантів теплової задачі. Коли на тих або інших ділянках поверхонь тіла діють ГУ3, тепловіддача в рідину або в газ може бути представлена в вигляді відповідних стоків теплоти і таким шляхом врахована в кодї теплової задачі. Заміна ГУ3 стоками теплоти дозволяє і для цього випадку застосувати формулу (10.33).

### 10.9. Чисельні методи розрахунку теплових процесів при зварюванні

Основним недоліком розглянутого аналітичного методу джерел теплоти є вимога сталості теплофізичних характеристик ( $a_T$ ,  $c_p$ ,  $\lambda$  і  $\alpha$ ), а також вимушене спрощення геометричної форми зварюваних тіл. Основна перевага методу – відносна простота розв'язку задачі за будь-якого джерела, розподіленого в просторі і часі.

Враховуючи неоднорідність і складну геометричну форму зварного виробу, температурну залежність властивостей матеріалу, складні нелінійні граничні умови, розподіл зварювальних джерел у просторі і часі та інші фактори, температурна задача може бути розв'язана тільки чисельними методами.

Ця основна перевага чисельних методів і обумовила інтенсивне впровадження їх в зварювальну практику за останні десятиліття. Можна стверджувати [9], що в наш час точність результатів розрахунку теплових процесів при зварюванні обмежена не похибкою чисельних методів, а неповнотою вихідної фізичної моделі (недостатніми знаннями законів введення теплоти і теплообміну з навколишнім середовищем, похибками властивостей матеріалу і т.п.). Зі

всіх чисельних методів у зварюванні отримали поширення метод кінцевих різниць (МКР) і метод кінцевих елементів (МКЕ).

**1. Метод кінцевих різниць.** Він полягає в заміні шуканої безперервної функції температури  $t$  сукупністю її значень визначених на дискретному полі точок заданої області. Ці точки називають вузлами, а сукупність вузлів, що з'єднані між собою – сіткою.

МКР розглянемо на прикладі лінійного розподілу теплоти в стрижні, один кінець якого підтримується при температурі навколишнього середовища (її приймемо за початок відліку,  $t_c = 0$ ), а решта поверхні теплоізолювана (рис. 10.4). Цей випадок має місце, наприклад, при контактному зварюванні двох однакових стрижнів, кінці яких жорстко закріплені в охолоджуваних мідних затискачах.

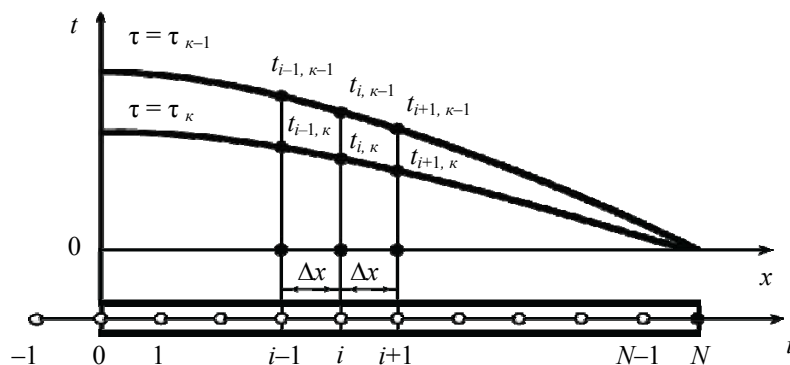


Рис. 10.4 – Розподіл температур у стрижні для моментів часу  $\tau_{k-1}$  і  $\tau_k$

Постановка одновимірної крайової задачі.

1. Рівняння теплопровідності

$$c_p \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right), \quad (10.34)$$

або при  $\lambda = \text{const}$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a_T \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}. \quad (10.35)$$

2. Початкова умова

$$t_{(x,0)} = t_0(x). \quad (10.36)$$

## 3. Граничні умови

$$\frac{\partial t_{(0,\tau)}}{\partial x} = 0; \quad t_{(L,\tau)} = 0. \quad (10.37)$$

Розв'яжемо задачу методом кінцевих різниць. Метод полягає на заміні похідних їх наближеними значеннями, вираженими через різниці значень в окремих точках – вузлах сітки, в окремі моменти часу (див. рис. 10.4).

Диференціальне рівняння теплопровідності (10.34) в результаті таких перетворень замінюється еквівалентним співвідношенням у кінцевих різницях.

Розділимо весь період нагріву і охолодження на окремі етапи. Нехай сітка рівномірна (крок сітки  $\Delta x$  постійний), а часовий проміжок між етапами  $k-1$  і  $k$  дорівнює  $\Delta\tau$ , тобто  $\Delta\tau = \tau_k - \tau_{k-1}$ . Тоді для  $i$ -го вузла з координатою  $x = i \cdot \Delta x$  у момент  $\Delta\tau = \tau_{k-1}$  отримуємо співвідношення:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} \approx \frac{t_{i,k} - t_{i,k-1}}{\Delta\tau}; \quad \frac{\partial t}{\partial x} \approx \frac{t_{i+1,k-1} - t_{i,k-1}}{\Delta x}; \quad (10.38)$$

та ж похідна зліва від вузла:

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial x} &\approx \frac{t_{i,k-1} - t_{i-1,k-1}}{\Delta x}; \\ \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial t}{\partial x} \right) \approx \frac{1}{\Delta x} \left( \frac{t_{i+1,k-1} - t_{i,k-1}}{\Delta x} - \frac{t_{i,k-1} - t_{i-1,k-1}}{\Delta x} \right) = \\ &= \frac{t_{i-1,k-1} - 2t_{i,k-1} + t_{i+1,k-1}}{\Delta x^2}. \end{aligned} \quad (10.39)$$

Тут індекси вказують номер вузлів сітки і моменти часу. Похідні по  $x$  віднесені до попереднього етапу, тобто до моменту  $\tau_{k-1}$ . Підставляючи (10.38) і (10.39) в (10.35) і розв'язуючи відносно  $t_{i,k}$ , отримуємо:

$$t_{i,k} = t_{i,k-1} + \frac{a_T \Delta\tau}{\Delta x^2} (t_{i-1,k-1} - 2t_{i,k-1} + t_{i+1,k-1}). \quad (10.40)$$

Якщо сітка нерівномірна (крок  $\Delta x$  змінний), то формула (10.40) ускладнюється, а точність апроксимації вихідного рівняння зменшується.

Аналогічно можуть бути отримані формули і в випадку нелінійного рівняння (10.34), коли властивості зварного з'єднання (об'ємна теплоємність  $c \cdot \rho$  і коефіцієнт теплопровідності  $\lambda$ ) змінні. Тоді друга похідна апроксимується виразом:

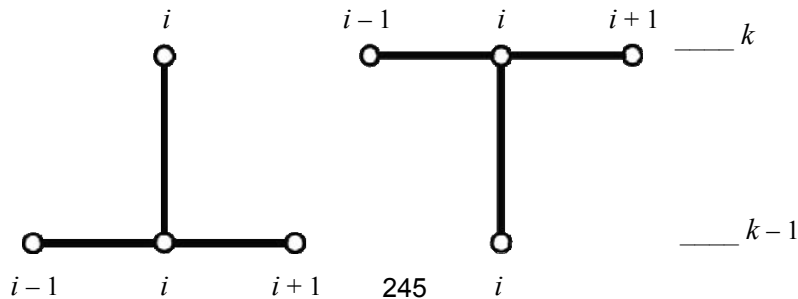
$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) \approx \frac{1}{\Delta x^2} \left[ \lambda_{i+1/2} (t_{i+1,k-1} - t_{i,k-1}) - \lambda_{i-1/2} (t_{i,k-1} - t_{i-1,k-1}) \right], \quad (10.41)$$

де  $\lambda_{i+1/2}$ ,  $\lambda_{i-1/2}$  – середні поточні значення теплопровідності між вузлами  $i$  та  $i+1$ ,  $i$  та  $i-1$ , відповідно. Величина  $c \cdot \rho$  приймається залежно від поточної температури вузла.

Граничні умови (10.37) у кінцевих різницях виражаються таким чином. Температура на правому торці на всіх етапах приймається рівною  $t_{N,k-1} = t_{(L,\tau)} = 0$ . На лівому кінці сітки вводиться додатковий вузол (вузол  $i = -1$ , рис. 10.4), який дозволяє задавати нульове значення похідної для всіх  $k$  шляхом виконання умови  $t_{-1,k-1} = t_{0,k-1}$  (точніше за умовою симетрії на адіабатичній границі  $t_{-1,k-1} = t_{1,k-1}$ ).

Таким чином, температуру  $t_{i,k}$  у довільному вузлі  $i$  ( $i = 0, 1 \dots N-1$ ) у цей момент  $\tau_k$  можна знайти за формулою (10.40), якщо відома температура тільки в цьому  $i$  в двох сусідніх вузлах в попередній момент  $\tau_{k-1}$  (рис. 10.5, а). Починаючи з моменту  $\tau = \Delta \tau$ , коли  $k = 1$  і  $t_{i,k-1} = t_0(i \cdot \Delta x)$  згідно з (10.37), процес побудови розв'язку можна продовжити далі, якщо інтервал часу задовольняє умові стійкості розв'язку [8]:

$$\Delta \tau \leq \frac{\Delta x^2}{2a_T}. \quad (10.42)$$



*a**б*

**Рис. 10.5 – Шаблони для нестационарного рівняння теплопровідності:  
*a* – явна схема, *б* – неявна схема**

Якщо крок  $\Delta x$  і коефіцієнт температуропровідності  $a_T$  змінні, то необхідно приймати мінімум  $\Delta x^2/a_T$ . Фізичний зміст умови (10.42) полягає в тому, що за малого інтервалу часу  $\Delta t$  на температуру в вузлі виявляють вплив тільки сусідні вузли.

Принципово так само можуть бути отримані формули для розрахунку дво- і тривимірного температурного поля у зварному з'єднанні довільної форми з врахуванням температурної залежності теплофізичних властивостей металу неоднорідного зварного з'єднання, граничних умов другого роду, додаткових джерел і стоків теплоти та інших факторів.

Перевагою явної схеми є простота алгоритму, оскільки використовується простий цикл за вузлами сітки з малим числом арифметичних операцій на кожному кроці. Недоліком є умова стійкості (10.42), що вимагає малого часового кроку, навіть якщо швидкість зміни температури  $\partial t/\partial \tau$  мала. Перевагою неявної схеми є безумовна стійкість, недоліком – відносно складний алгоритм з необхідністю розв'язку системи рівнянь високого порядку, що вимагає застосування ЕОМ з великою пам'яттю. Комбінування переваг явної (об'єм обчислень пропорційний числу вузлів сітки) і неявної (безумовна стійкість) схем, привело до розробки економічних розрахункових схем, серед яких найкращим для розв'язку двовірних нестационарних задач є метод змінних напрямів (поздовжньо-поперечна схема), а для тримірних – методи розчеплення (локально-одномірна схема) [8].

Точність чисельного розв'язку тим вища, чим менші інтервали  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  і  $\Delta t$ , тобто чим точніше апроксимується рівняння теплопровідності. Рекомендується приймати мінімальні значення  $\Delta x$  та  $\Delta y$  в областях високих градієнтів температурного поля (поблизу шва), а  $\Delta t$  – в період високої швидкості зміни температури. Наприклад, у випадку променевого зварювання рекомендується сітка кроком до 1 мм поблизу джерела нагріву з часовим кроком не більше 0,01 с.

Основна перевага МКР – простота. Основними недоліками методу є погана апроксимація криволінійної області прямокутною сіткою і необхідність рівномірного кроку сітки, інакше ускладнюється розрахункова схема і зростає похибка розв’язку.

**2. Метод кінцевих елементів.** Виникнення методу у 1950-х роках пов’язане з необхідністю виконання завдань космічних досліджень. Цей метод виник із будівельної механіки та теорії пружності, а вже потім було отримано його математичне обґрунтування. Термін “кінцеві елементи” ввів у 1960 році Клаф. Після того як було встановлено зв’язок МКЕ з процедурою мінімізації, його почали застосовувати до завдань поширення теплоти теплопровідністю, описуваних рівняннями Лапласа і Пуассона. В сімдесятих роках минулого сторіччя була сформована математична теорія кінцевих елементів. Вона знайшла своє відображення в роботах Р. Голлагера, Дж. Одена, Р. Стренга, Дж. Фікса, Ларрі Дж. Сегерленда. Значний вклад в розробку основ МКЕ зробили і російські вчені. У.Р. Корнеєв встановив збіг математичної сутності МКЕ і варіаційних розрахункових методів (ВРМ). Зіставлення МКЕ з низкою ВРМ наведено в працях Л.А. Розіна. Під керівництвом А.З. Сахарова розроблена моментна схема кінцевих елементів.

З розвитком обчислювальної техніки можливості МКЕ постійно зростають, також і збільшується клас завдань, що розв’язуються ним.

Основна ідея методу кінцевих елементів полягає в тому, що будь-яку безперервну величину – температуру, тиск і переміщення, можна апроксимувати дискретною моделлю, яка будується на множині кусочно-безперервних функцій, визначених на кінцевому числі підобластей [26]. Кусово-неперервні функції визначаються з допомогою значень безперервної величини в кінцевому числі точок області розгляду.

У загальному випадку безперервна величина наперед невідома, і потрібно визначити значення цієї величини в деяких внутрішніх точках області. Дискретну модель, однак, легко побудувати, якщо спочатку припустити, що числові значення цієї величини в кожній внутрішній точці області відомі. Після цього можна перейти до загального випадку. При побудові дискретної моделі безперервної величини діють таким чином:

1. У досліджуваній області фіксується кінцеве число точок, які називаються вузловими точками або просто вузлами.

2. Значення безперервної величини в кожній вузловій точці вважається змінним, але повинне бути визначеним.

3. Область визначення безперервної величини розділяється на кінцеве число підобластей, що називаються елементами. Ці елементи мають спільні вузлові точки і в сукупності апроксимують форму області.

4. Безперервна величина апроксимується на кожному елементі поліномом, який визначається за допомогою вузлових значень цієї величини. Для кожного елемента визначається свій поліном, але вони підбираються таким чином, щоб зберігалась безперервність величини вздовж границь елемента.

Основна концепція методу кінцевих елементів може бути наглядно проілюстрована на прикладі розподілу температури в одномірному стрижні (рис. 10.6).

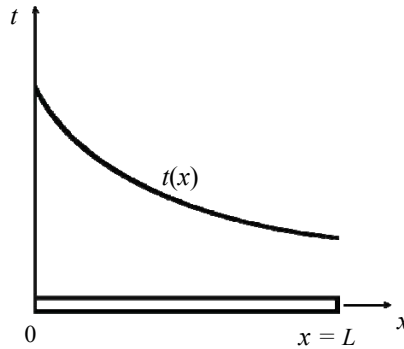
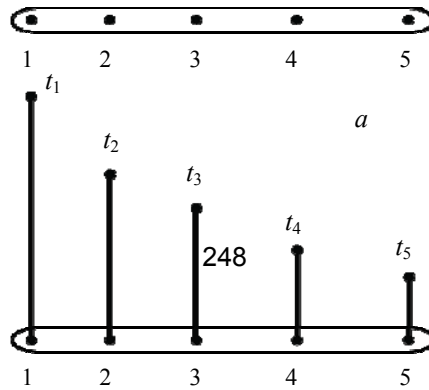


Рис. 10.6 – Розподіл температури в одномірному стрижні

Розглядається безперервна величина  $t(x)$ . Область визначення – відрізок  $0L$  вздовж осі  $x$ . Фіксовані і пронумеровані п'ять точок по осі  $x$  (рис. 10.7).



б

**Рис. 10.7 – Зображення вузлових точок – *a*  
і допустимих значень функції  $t(x)$  – *б***

Ці вузлові точки не обов'язково розташовувати на однаковій відстані одна від одної. Значення  $t(x)$  відомі в кожній вузловій точці. Ці фіксовані значення представлені графічно на рис. 10.7, *б* і позначені в відповідності з номерами вузлових точок через  $t_1, t_2 \dots t_5$ .

Поділ області на елементи може бути проведено двома різними способами. Можна, наприклад, обмежити кожний елемент двома сусідніми вузловими точками, створивши чотири елементи (рис. 10.8, *a*), або розділити область на два елементи, кожний з яких містить три вузли (рис. 10.8, *б*).

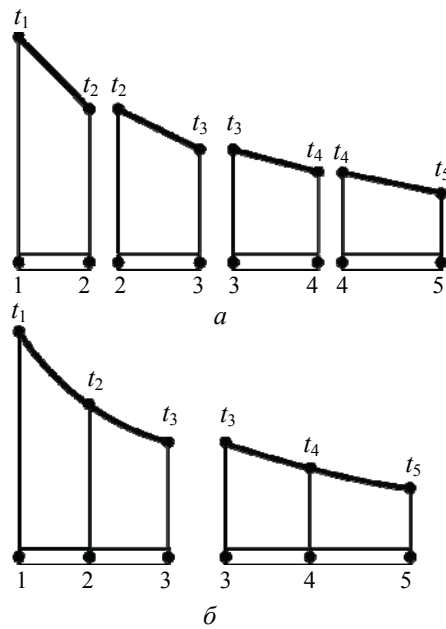


Рис. 10.8 – Поділ області на елементи

Відповідний елементу поліном визначають за значеннями  $t(x)$  у вузлових точках елемента. У випадку розділення області на чотири елементи, коли на кожний елемент припадає по два вузли, функція елемента буде лінійною по  $x$  (дві точки однозначно визначають пряму лінію). Кінцева апроксимація  $t(x)$  буде складатись з чотирьох кусочно-лінійних функцій, кожна з яких визначена на окремому елементі (рис. 10.9, *a*).

Інший спосіб розділення на два елементи з трьома вузловими точками приводить до представлення функції елемента в вигляді полінома другого ступеня. У цьому випадку кінцевою апроксимацією  $t(x)$  буде сукупність двох кусочно-безперервних квадратичних функцій. Відмітимо, що це наближення буде саме кусочно-безперервним, оскільки кути нахилу на графіку обох цих функцій можуть мати різні значення в третьому вузлі.

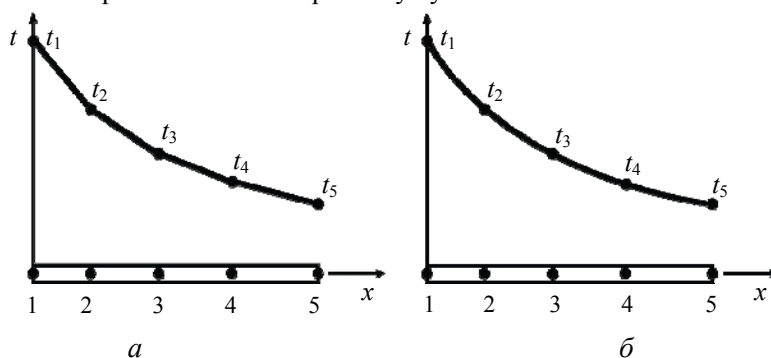


Рис. 10.9 – Дискретні моделі для одномірного температурного поля

У загальному випадку розподіл температури невідомий і тому необхідно визначити значення цієї величини в деяких точках. Методика побудови дискретної моделі залишається такою же, як описано вище, але з додаванням одного додаткового кроку.

Знову визначається множина вузлів і значення температури в цих вузлах  $t_1, t_2, t_3, \dots$ , які тепер є змінними, оскільки вони наперед невідомі. Область розділяється на елементи, на кожному з яких визначається відповідна функція елемента.

При побудові дискретної моделі безперервної величини, що визначається в дво- або тримірній області, основна концепція методу кінцевих елементів використовується аналогічно. У двомірному випадку елементи описуються функціями від  $x$  та  $y$ , при цьому найчастіше розглядаються елементи в вигляді трикутника або чотирикутника.

Таким чином, розподіл у досліджуваній області апроксимується функцією від вузлових значень шуканого розподілу.

Знаходження вузлових значень здійснюється шляхом мінімізації деякої величини – функціонала, який зв'язаний з фізичною суттю задачі. Вид функціонала визначається за допомогою варіаційного обчислення, в якому встановлюється: якщо в кожній точці певної області виконується диференціальне рівняння, то для заданої області справедливо відповідне інтегральне співвідношення, що називається функціоналом. Оскільки вигляд апроксимуючої функції нами заданий, функціонали (визначені інтегралами) виражаються аналітично через вузлові значення шуканого розподілу, і розв'язок диференціального рівняння зводиться до розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно вузлових значень  $t(x)$ .

Таким чином, послідовність визначення температурного поля методом кінцевих елементів наступна:

1) формулюється задача теплопровідності, початкові і граничні умови;

2) підбирається функціонал, який має таку властивість, що функція, за якої він є мінімальним, задовольняє як вихідне диференціальне рівняння теплопровідності так і граничні умови;

3) розділяється досліджувана область на елементи (дискретизація області) і вибираються функції, що апроксимують досліджуване температурне поле в межах кожного елемента;

4) визначається функціонал через значення температури в вузлах елементів;

5) диференціюється функціонал за кожним невідомим значенням температури у вузлах, а похідні прирівнюються до нуля;

6) розв'язується отримана система рівнянь відносно невідомих значень температури в вузлах.

**Приклад розв'язку рівняння теплопровідності для однорідного поля.** Однорідне стаціонарне температурне поле описується диференціальним рівнянням:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = 0. \quad (10.43)$$

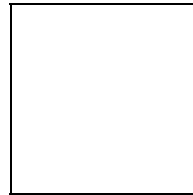
Для знаходження розв'язку цього рівняння необхідно задати граничні умови. Задамо граничні умови першого роду  $t = t_{TP}$  на одному торці стрижня і граничні умови другого роду:

$$q = \alpha(t_{CT} - t_C) \quad (10.44)$$

на другому торці.

Вихідні дані для розв'язання диференціального рівняння (10.43): площа перерізу стрижня –  $F$ , м<sup>2</sup>; його довжина –  $L$ , м; коефіцієнт теплопровідності –  $\lambda$ , Вт/м·К; коефіцієнт тепловіддачі –  $\alpha$ , Вт/м<sup>2</sup>·К; температура охолоджуючого середовища –  $t_c$ , °С; початкова температура –  $t_0$ , °С.

У варіаційному обчисленні встановлюється, що для мінімізації функціонала:



$$(10.45)$$

необхідно, щоб в області  $V$  виконувалося диференціальне рівняння (10.43) з граничними умовами (10.44) на поверхні  $F$ .

Розділимо досліджувану область – ділянку довжиною  $L$  на  $n$  відрізків з координатами  $x_0 = 0, x_1, x_2 \dots x_{n-1}, x_n = L$ . Позначимо температуру в вузлових точках  $t_0, t_1, t_2 \dots t_{n-1}, t_n$ . Апроксимуючи розподіл температури по довжині стрижня ломаною, що приймає в вузлах значення  $t_0, t_1, t_2 \dots t_{n-1}, t_n$  отримаємо для розподілу температури всередині  $i$ -го вузла:

$$t_i(x) = t_i + \frac{t_{i+1} - t_i}{x_{i+1} - x_i}. \quad (10.46)$$

Оскільки область  $V$  дорівнює сумі  $V_0, V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, V_n$ , то:

$$\begin{aligned} \varphi = \int_{V_0} \frac{\lambda}{2} \left( \frac{dt_0(x)}{dx} \right)^2 dV + \dots + \int_{V_i} \frac{\lambda}{2} \left( \frac{dt_i(x)}{dx} \right)^2 dV + \dots \\ + \int_{V_n} \frac{\lambda}{2} \left( \frac{dt_n(x)}{dx} \right)^2 dV + \int_F \frac{\alpha}{2} (t_n - t_c)^2 dF. \end{aligned} \quad (10.47)$$

Враховуючи, що:

$$\int \frac{\lambda}{2} \left( \frac{dt}{dx} \right)^2 dx = \frac{\lambda}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( \frac{t_{i+1} - t_i}{x_{i+1} - x_i} \right)^2 F dx = \frac{\lambda}{2} F \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{x_{i+1} - x_i}$$

i

$$\int_F \frac{\alpha}{2} (t_n - t_c)^2 dF = F \frac{\alpha}{2} (t_n - t_c)^2,$$

вираз (10.47) приймає вигляд:

$$\begin{aligned} \varphi = \frac{\lambda}{2} F \frac{(t_1 - t_0)^2}{x_1 - x_0} + \dots + \frac{\lambda}{2} F \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{x_{i+1} - x_i} + \dots \\ + \frac{\lambda}{2} F \frac{(t_n - t_{n-1})^2}{x_n - x_{n-1}} + F \frac{\alpha}{2} (t_n - t_c)^2 \end{aligned}$$

Найкращими наближеннями значень температури  $t_i$  будуть такі, за якими величина  $\varphi$  мінімальна.

Екстремум функції багатьох змінних  $\varphi(t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n)$  досягається за умови:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t_0} = \frac{\lambda F}{x_1 - x_0} (t_0 - t_1) = 0; \\ \dots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} = \frac{\lambda F}{x_i - x_{i-1}} (t_i - t_{i-1}) + \frac{\lambda F}{x_{i+1} - x_i} (t_i - t_{i+1}) = 0; \\ \dots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t_n} = \frac{\lambda F}{x_n - x_{n-1}} (t_n - t_{n-1}) + \alpha F (t_n - t_c) = 0. \end{cases} \quad (10.48)$$

Вираз (10.48) представляє собою систему з  $n$  лінійних алгебраїчних рівнянь з  $n + 1$  невідомими. Для того щоб система рівнянь була замкнутою задають граничну умову  $t = t_{ГР}$ . Таким чином, розв'язок диференціального рівняння теплопровідності (10.43) у цьому випадку зводиться до розв'язання системи лінійних рівнянь. Такий же підхід може бути застосований і до розв'язання рівнянь теплопровідності для випадків дво- і тримірних температурних полів.

**Особливості і переваги методу.** На сьогодні область застосування методу кінцевих елементів дуже обширна і охоплює всі фізичні задачі, які можуть бути описані диференціальними рівняннями. Найбільш важливими перевагами методу є:

1. Властивості матеріалів суміжних елементів не повинні бути обов'язково однаковими. Це дозволяє застосовувати метод до тіл, складених з декількох матеріалів.

2. Криволінійна область може бути апроксимована з допомогою прямолінійних елементів або описана точно з допомогою криволінійних елементів. Таким чином, цим методом можна користуватись не тільки для областей з "доброю" формою границь.

3. Розміри елементів можуть бути змінними. Це дозволяє збільшувати або зменшувати сітку розділення області на елементи, якщо в цьому є необхідність.

4. За допомогою методу кінцевих елементів можна розглядати граничні умови з розривним поверхневим навантаженням, а також змішані граничні умови.

5. Вказані переваги методу кінцевих елементів можуть бути використані при складанні достатньо загальної програми для розв'язання широкого класу задач.

На сьогодні використання чисельних методів в інженерних розрахунках постійно збільшується. Це пов'язано з бурхливим розвитком обчислювальної техніки. Окрім того, існує цілий ряд математичних пакетів (ANSYS, NASTRAN і ін.) орієнтованих на розв'язок диференціальних рівнянь методом кінцевих елементів [3]. Це достатньо потужні математичні продукти, що містять графічні інструменти для задання геометричної форми об'єктів і створення сіток, довідникового апарату з відомостями про фізичні характеристики середовищ і матеріалів і звичайно процедури розв'язку диференціальних рівнянь теплопровідності при зварюванні.

#### Контрольні питання

1. Як класифікують джерела і стоки теплоти?
2. Як записують джерела і стоки теплоти в кодованому вигляді?
3. Як проводять схематизацію тіл і джерел теплоти, що приймають участь в теплообміні при механічній обробці матеріалів і зварюванні?
4. Як здійснюють схематизацію геометричної форми тіл?
5. Для яких розрахунків застосовують граничні умови першого, другого, третього і четвертого роду?
6. Чи можна стверджувати, що умови другого роду задає градієнт температури на границі тіла?
7. За якою формулою перевіряють гіпотезу про адіабатичність тих або інших ділянок деталі чи інструменту?
8. Що називають коефіцієнтом температуровіддачі?
9. Які є аналітичні методи розв'язання теплофізичних задач, що використовуються для опису теплових явищ в процесах механічної обробки матеріалів і зварюванні?
10. У чому полягає суть методу джерел теплоти?
11. У чому є суть методу накладення при формуванні джерел теплоти?
12. Як розраховується температурне поле в пластині від миттєвого лінійного джерела теплоти?
13. Як розраховується температурне поле від миттєвого плоского джерела теплоти?
14. Що розуміють під миттєвим об'ємним і безперервно діючим джерелом теплоти?
15. Як реалізується узагальнений алгоритм теплофізичного аналізу в технологічних системах?
16. У чому суть інженерної методики розрахунку температур на контактних площадках?
17. Які чисельні методи розв'язку диференціальних рівнянь теплопровідності найчастіше застосовують при дослідженні теплових процесів зварювання?
18. Поясніть суть чисельного розв'язку диференціального рівняння методом кінцевих різниць.
19. Наведіть послідовність визначення температурного поля методом кінцевих елементів.
20. Вкажіть особливості і переваги методу кінцевих елементів.



**8. Коефіцієнт температуровіддачі для пластини:**

а)  $b = \frac{2\alpha}{c\rho\delta}$ ;    б)  $b = \frac{2\alpha}{c\rho\omega}$ ;    в)  $b = \frac{2\alpha}{c\tau\delta}$ ;    г)  $b = \frac{2\mu}{c\rho\delta}$ .

**9. Під поняттям “час від моменту імпульсу до моменту спостереження” розуміють час ...**

- а) протягом якого діє імпульс;
- б) від початку дії імпульсу до спостереження;
- в) від закінчення дії імпульсу до спостереження;
- г) протягом якого не діє імпульс.

**10. У чому полягає суть принципу накладення?**

- а) у відніманні температур від дії окремих джерел, які або знаходяться в різних точках тіла, або виділяють теплоту в різні моменти часу, або і знаходяться в різних точках тіла і виділяють теплоту неодноразово;
- б) у додаванні температур від дії окремих джерел, які або знаходяться в різних точках тіла, або виділяють теплоту в різні моменти часу, або і знаходяться в різних точках тіла і виділяють теплоту неодноразово;
- в) у добутку температур від дії окремих джерел, які або знаходяться в різних точках тіла, або виділяють теплоту в різні моменти часу, або і знаходяться в різних точках тіла і виділяють теплоту неодноразово;
- г) у діленні температур від дії окремих джерел, які або знаходяться в різних точках тіла, або виділяють теплоту в різні моменти часу, або і знаходяться в різних точках тіла і виділяють теплоту неодноразово.

**11. У чому є основна перевага методу кінцевих різниць?**

- а) добрій апроксимації криволінійної області;
- б) простоті виконання розрахунків;
- в) необхідності рівномірного кроку сітки;
- г) підвищенні точності розв'язку.

## РОЗРАХУНКИ ТЕПЛОВИХ ПРОЦЕСІВ І ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ТЕМПЕРАТУРИ ЗВАРЮВАННЯ

---

- Схеми нагріву металу зварювальними джерелами теплоти
- Нагрів металу зварювальною дугою
- Поширення теплоти при наплавленні валика на масивне тіло. Термічний цикл, ізохрони та ізотерми у плані
- Періоди теплонасичення і вирівнювання температури
- Температурне поле в пластині при її проплавленні на всю товщину
- Вплив режиму зварювання і теплофізичних параметрів металу на температурне поле граничного стану
- Нагрів потужними швидкорухомими джерелами теплоти
- Автоматичне зварювання пластин за один прохід
- Обмеженість розмірів тіла та процес поширення теплоти
- Визначення температури зварювання

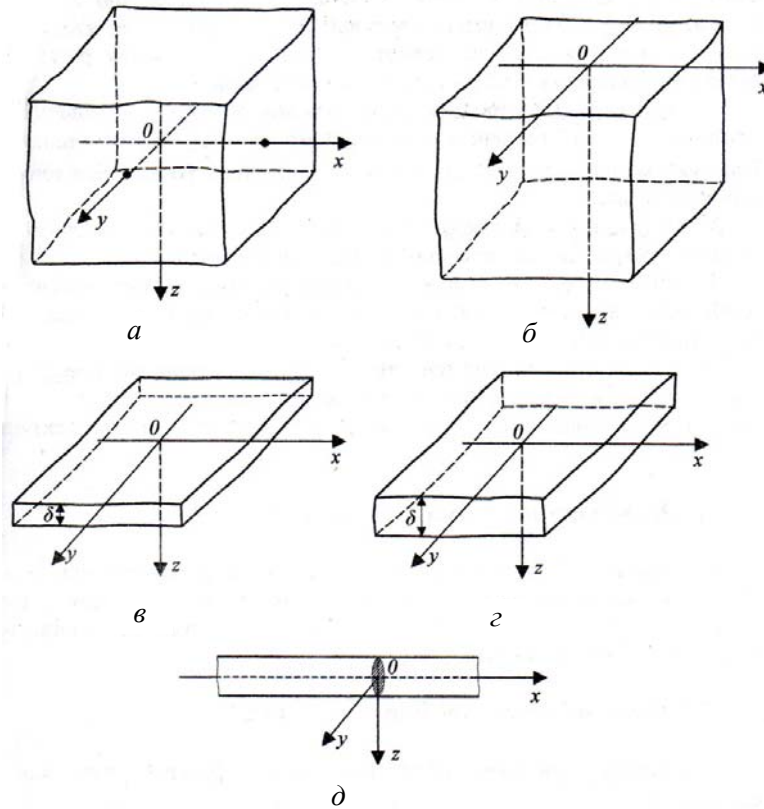
### 11.1. Схеми нагріву металу зварювальними джерелами теплоти

У більшості випадків зварювальні процеси в металі відбуваються при швидкій зміні температури в межах від температури навколишнього повітря до температури випаровування металу. В цьому досить широкому температурному проміжку розвиваються різноманітні фізичні і хімічні процеси плавлення основного і присадкового металу, структурні і об'ємні зміни в них, процеси місцевого пластичного деформування. Для управління зварювальними процесами необхідно знати, як впливають на них всі визначальні параметри, у т.ч. часова зміна температури металу.

Для розрахунків стосовно зварювання найбільш простим є метод джерел теплоти. Застосовуючи цей метод для теплових розрахунків теплофізичні характеристики:  $a_T$ ,  $c_p$ ,  $\lambda$  приймають постійними, незалежно від температури. При цьому також нехтують і теплою фазових перетворень. Значення величин  $a_T$ ,  $c_p$ ,  $\lambda$  прий-

мають середніми для заданого діапазону температур, хоча це і приводить до певної невідповідності розрахункових температурних полів порівняно з реально існуючими.

Процеси поширення теплоти в умовах зварювання є досить складними і для їх аналізу у більшості випадків необхідно застосовувати спрощені методи, що зводять конкретну задачу до ідеальних теоретичних схем. Оскільки характер поширення теплоти в тілі залежить від його форми і розмірів, то для розрахунків використовують певні ідеалізовані схеми тіл, що підлягають нагріву (рис. 11.1).



**Рис. 11.1 – Розрахункові схеми тіл, які нагрівають:**  
***a* – нескінченне; *б* – півнескінченне;**  
***в* – необмежена пластина; *г* – плоский шар; *д* – нескінченний стрижень**

**Нескінченне тіло** – тіло, з такою протяжністю по осях  $XX$ ,  $YY$ ,  $ZZ$ , що його межі не впливають на характер теплового поля. Цю схему використовують тільки для попередніх припущень (рис. 11.1, *a*).

**Півнескінченне тіло** – має лише одну граничну поверхню  $Z = 0$ , зі сторони якої діє джерело теплоти. Потік теплоти в такому тілі просторовий. Стосовно зварювання така схема може використовуватися, наприклад, при наплавленні валика на поверхню масивного тіла (11.1, *b*).

**Необмежена пластина** – плоский шар невеликої товщини  $\delta$ , в якому температуру по товщині можна прийняти рівномірною. Тепловий потік шаровий. Схема застосовується при зварюванні з наскрізним проплавленням на всю товщину, при роздільному кисневому різанні (рис. 11.1, *в*).

**Плоский шар** – тіло, обмежене паралельними площинами  $Z = 0$ , і  $Z = \delta$ . Цій схемі відповідає лист середньої товщини за великої довжини і ширини. Тепловий потік в такому тілі просторовий (рис. 11.1, *г*).

**Нескінченний стрижень** – тіло з прямолінійною віссю достатньої довжини, щоб кінцеві поверхні не впливали на розподіл теплоти (рис. 11.1, *д*). Тепловий потік є лінійним.

Джерела теплоти, що зустрічаються у практичних випадках зварювання, можна класифікувати:

– **за ознакою розподіленості**: зосереджені (точкові, лінійні, плоскі, об'ємні) і розподілені (за певним законом внесення теплоти у виріб);

– **за часом дії**: миттєві і безперервно діючі;

– **за часом розміщення відносно прийнятої координати**: нерухомі, рухомі, швидкорухомі.

Фактично тепловий потік зварювальних джерел теплоти є завжди розподіленим на поверхні нагріву або в об'ємі.

При поверхневому нагріві газозварювальним полум'ям або дугою розподіл теплового потоку на плямі нагріву наближено описується законом нормального розподілу. Розрахунок розподілу введення теплоти від зварювальних джерел значно ускладнює отримання формул, зручних для розрахунків. Тому використовують різні спрощені схеми точкового, лінійного, шарового і об'ємного джерел теплоти. Ці спрощення дають суттєві зміни конфігурацій температурних полів безпосередньо біля джерел, а на деякій відстані від них уже дають задовільну відповідність з реальними полями.

### 11.2. Нагрів металу зварювальною дугою

Джерела теплоти, що використовуються для зварювання, характеризуються ефективною тепловою потужністю, розподілом виділеної теплоти на поверхні або в об'ємі виробу і часовою зміною цього розподілу.

**Теплові характеристики джерел теплоти.** Повну теплову потужність дуги  $q_D$  наближено приймають рівною тепловому еквіваленту її електричної потужності –  $U \cdot I$ , Вт. Ефективна теплова потужність дуги  $q_e$  – це кількість теплоти, введеної за одиницю часу в метал виробу і затраченої на його нагрів:

$$q_e = k \eta_e UI, \quad (11.1)$$

де  $k$  – коефіцієнт, що враховує вплив несинусоїдальності кривих напруги та струму на потужність дуги (для постійного струму  $k = 1$ , змінного –  $k = 0,7-0,97$ );  $\eta_e$  – ефективний коефіцієнт корисної дії (к.к.д.) процесу нагріву, приймається як відношення кількості теплоти, що вводиться дугою в виріб до теплового еквівалента електричної потужності дуги. Він характеризує ефективність процесу виділення теплоти і теплообміну в дуговому проміжку та залежить від технологічних умов зварювання.

Ефективний к.к.д. процесу нагріву дуги зменшується із видовженням дуги і зростає при її заглибленні в ванну. При застосуванні металевих електродів  $\eta_e$  частково залежить від полярності та величини зварювального струму.

Ефективний к.к.д. визначають за формулою:

$$\eta_e = \frac{q_e}{q_D}. \quad (11.2)$$

Поняття ефективності застосовують також і до процесу нагріву (зварювання, наплавлення, різання, пічний нагрів) оскільки особливості технології його в значній мірі визначають втрати теплоти в навколишнє середовище.

Експериментальне значення  $\eta_e$  різних методів дугового зварювання наведено у таблиці 11.1 [5].

Таблиця 11.1 – Значення  $\eta_e$  різних методів дугового зварювання

Метод зварювання	Струм зварювання, $I_{зв}, A$	Напруга дуги, $U_d, B$	Ефективний к.к.д. процесу нагріву, $\eta_e$
Відкрита вугільна дуга	160–250	26–30	0,5–0,6
Дуга в аргоні (вольфрамовий електрод)	150–200	24–32	0,5–0,6
Відкрита дуга (стальний електрод)	180–250	26–32	0,65–0,85
Дуга під флюсом (стальний електрод)	600–800	28–34	0,80–0,96
Дуга в вуглекислому газі (стальний електрод)	350–400	24–28	0,80–0,84
Відкрита дуга (порошковий дріт)	370–450	25–28	0,80–0,86

При зварюванні, наплавленні, різанні металу тепла енергія, що поглинається тілом, витрачається на розплавлення основного металу, нагрів решти маси тіла за рахунок теплопровідності, тепловіддачу в навколишнє середовище. Теплова потужність, затрачена на розплавлення основного металу, називається потужністю плавлення і позначається символом  $q_{п}$  (Вт). Відношення:

$$\frac{q_{п}}{q_e} = \eta_e, \quad (11.3)$$

називається термічним коефіцієнтом корисної дії при зварюванні і показує яка частина ефективної теплової потужності затрачена на розплавлення основного металу.

Для того, щоб визначити повну ефективність використання джерела теплоти необхідно розрахувати відношення:

$$\frac{q_{п}}{q_d} = \eta_{п}, \quad (11.4)$$

що називається повним тепловим коефіцієнтом корисної дії і показує, яка частина повної теплової потужності джерела затрачена на розплавлення основного металу.

Повний тепловий к.к.д. можна отримати також як добуток ефективного і термічного коефіцієнтів корисної дії при зварюванні:

$$\eta_e \cdot \eta_t = \frac{q_e}{q_d} \cdot \frac{q_{II}}{q_e} = \frac{q_{II}}{q_d} = \eta_{II}. \quad (11.5)$$

Різні джерела теплоти, що використовують при зварюванні характеризуються деякими особливостями, які визначають ефективність їх застосування та технологічну гнучкість використання для зварювальних операцій.

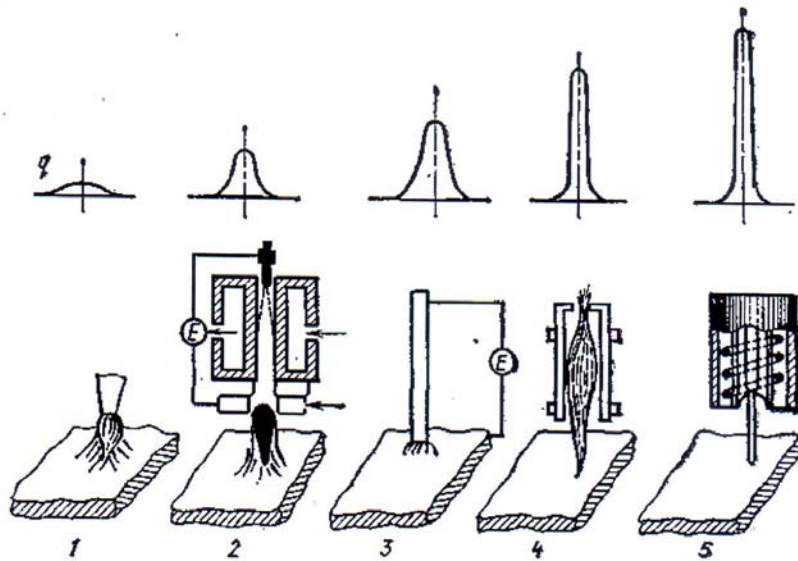
Так, за ступенем локалізації введення теплоти в виріб, що зварюється (в пляму нагріву) джерела теплоти значно відрізняються один від одного. На практиці намагаються збільшити зосередженість зварювальних джерел. Це досягається застосуванням пристроїв, що стискають зварювальну дугу до тонкого шнура. У цьому випадку дуга стає витягнутою, відбувається інтенсивне утворення плазми. Для отримання плазмового струменя використовують спеціальні головки – плазмотрони, в яких вольфрамовий електрод, що не плавиться і є катодом. Анодом в цьому випадку слугує виріб або сопло плазмотрона. Залежно від того, де знаходиться анод, змінюється і дуга. Якщо анодом слугує виріб, то стовп плазми співпадає з стовпом дуги, дуга стає тонкою і витягнутою. Якщо ж анод знаходиться на каналі сопла, то струмінь плазми виділяється з стовпа дуги в вигляді факела.

Останнім часом широко використовуються види зварювання з променевими джерелами зварювального нагріву – електронно-променевого зварювання, зварювання променем лазера тощо.

Електронно-променевого зварювання ґрунтується на явищі перетворення у теплову енергію кінетичної енергії гальмування електронів у матеріалі, що зварюється. Особливістю електронно-променевого зварювання є те, що електрони, що проникають у метал, втрачають свою енергію не одразу, а на деякому шляху, де відбувається їх гальмування. Ця особливість приводить до того, що, на відміну від дугових способів зварювання, які нагрівають, як правило, поверхню виробу, електронний промінь нагріває метал на певну глибину, що відповідає довжині шляху електронів при гальмуванні. Джерело теплоти в цьому випадку на тонких листах може вважатись лінійним.

У випадку нагріву матеріалу, що зварюється променем лазера, енергія фотонів передається вільним електронам, які знаходяться в матеріалі. Вони збільшують свою кінетичну енергію, що передається решітці і приводить до підвищення температури точки опромінення. Промінь лазера може бути сфокусованим за допомо-

гою оптичного пристрою на досить малій ділянці поверхні (практично точці) з густиною до  $100 \text{ Дж/мм}^2$  протягом  $10^{-3} \dots 10^{-6} \text{ с}$ . Співвідношення глибини проплавлення до його діаметра складає 25:1. Характер розподілу питомого теплового потоку при використанні різних зварювальних джерел теплоти за однакового тепловкладення у виріб показано на рис. 11.2.



**Рис. 11.2 – Розподіл питомого теплового потоку при зварюванні з однаковим тепловкладенням у виріб:**  
**1 – газозварювальне полум'я; 2 – дуга непрямої дії при її обтискуванні плазмотроном; 3 – дуга з електродом, що плавиться;**  
**4 – електронний промінь; 5 – лазерний промінь [22]**

Найбільша локалізація введення теплоти може бути створена при нагріві виробу лазером (5) і електронним променем (4). Дуга, запалена електродом, що плавиться (особливо під флюсом) є також достатньо високолокалізованим джерелом теплоти (3). Дещо менша локалізація введення теплоти характерна для нагріву дугою непрямої дії (2), навіть за обтискування її плазмотроном. Найменш локалізовано вводиться теплота в зварюваний виріб газозварювальним полум'ям (1). Введення теплоти здійснюється на великій площі (малолокалізовано) і при електрошлаковому джерелі теплоти.

Дуже важливим є і максимальна потужність зварювального джерела, максимальне ефективне тепловведення в центрі плями нагріву, а також к.к.д. використання потужності для нагріву виробу.

Для співставлення різних зварювальних джерел теплоти в таблиці 11.2 наведені їх деякі характеристики.

**Таблиця 11.2 – Характеристики зварювальних джерел теплоти**

Зварювальне джерело теплоти	Найменша площа плями нагріву, $10^{-7}$ , м <sup>2</sup>	Найбільша густина теплового потоку в плямі, кВт/м <sup>2</sup>	Найбільша загальна теплова потужність, що вводиться у виріб, кВт
Ацетилено-кисневе полум'я	1000	0,5	10
Електрична дуга	100	30	100
Електронний промінь	1,0	$10^5$	40
Електрошлакове джерело	10000	–	350

При порівнянні цих характеристик можна стверджувати, що найбільша загальна теплова потужність зварювальних джерел теплоти забезпечується за електрошлакового зварювання. Цей спосіб з успіхом може бути застосований для зварювальних операцій, що потребують значних затрат теплової енергії, особливо для зварювання металу великої товщини.

Більш низьке значення найбільшої загальної теплової потужності має ацетиленокисневе полум'я. Для зварювання металу великої товщини застосування цього методу нагріву є менш перспективне.

Аналогічне співставлення електричної дуги і електронного променя представляє більші труднощі. Хоча практично стосовно дугового джерела досягнута більша загальна теплова потужність (~100 кВт), ніж електронному променю (~40 кВт), однак локалізація введення теплоти у ньому набагато більша. В зв'язку з цим можна більш ефективно використовувати загальну потужність променя, тобто, за рівної загальної потужності краще зварювати товстий метал, що потребує для виконання зварювання більшого введення теплової енергії.

Також важливою характеристикою зварювальних джерел теплоти є їх технологічна гнучкість та маневреність.

Деякі зварювальні джерела теплоти не можуть забезпечити нагрів металу без його розплавлення навіть у тих випадках, коли б

це було корисним, наприклад, при наплавленні спеціальних сплавів. Так, електрична дуга з застосуванням електроду, що плавиться завжди супроводжує нагрів металу плавленням. У цьому випадку відділити нагрів від плавлення не вдається. Складніше, але можливо, здійснювати нагрів без розплавлення металу дугою з застосуванням електрода, що не плавиться. У цьому випадку приходится обмежувати теплову потужність дуги, а таким чином і продуктивність нагріву. Газозварювальне полум'я, наприклад, ацетиленокисневе, легко може забезпечувати прогрів металу без його розплавлення, регулюванням не тільки потужності, але й відстані від пальника до металу, що нагрівається.

Процес нагріву без розплавлення дозволяє здійснювати і електронний промінь шляхом його розфокусування, тобто шляхом бомбардування великої площі променю тої самої потужності. Однак, електронний промінь потребує застосування спеціальних камер, в яких повинен бути створений відповідний вакуум. Маніпулювання дією джерела теплоти у цьому випадку повинно здійснюватись на відстані, дистанційно. Це призводить до ускладнення нагріву при зварюванні виробів великих розмірів. Крім того, застосування високих напруг приводить до випромінювання поза камерою жорстких рентгенівських променів. Опромінення робочого персоналу такими променями відповідної тривалості і інтенсивності є недопустимим. Тому верхні значення напруги рекомендується обмежувати. Все це значно обмежує можливості електронного променя для зварювання виробів великих розмірів.

Електрошлакове джерело теплоти не може забезпечити введення в виріб, що зварюється, малої теплової потужності. Для забезпечення необхідної теплопровідності розплавленого шлаку його кількість повинна бути досить значною; для підтримування такої кількості шлаку в розплавленому стані, електрична потужність, що вводиться повинна бути достатньо великою і, отже, вироби не можуть бути невеликими.

Таким чином, у результаті порівняння зварювальних джерел теплоти більш зручними для виготовлення різних зварювальних конструкцій є електрична дуга і в меншій мірі газозварювальне полум'я. Менш універсальними є й інші джерела теплоти, хоча кожне з них у специфічних умовах може виявитись найбільш доцільним для використання того або іншого способу зварювання.

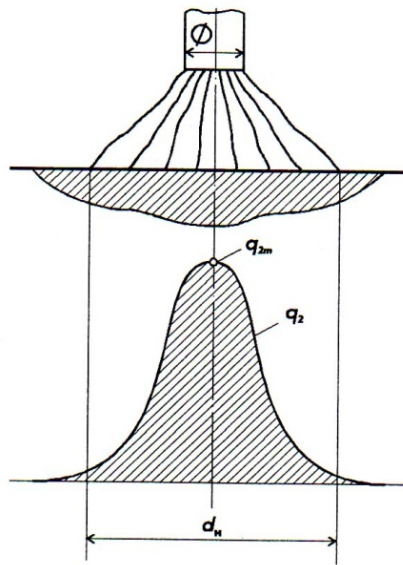
Тепловий потік зварювальної дуги найбільш інтенсивний в центральній частині плями нагріву, де відбувається виділення

теплоти в поверхневих шарах металу як результат електронного та іонного бомбардування. В області, прилеглої до електронно-активної плями нагріву, метал нагрівається переважно за рахунок променевого теплообміну зі стовпом дуги і конвективного теплообміну з гарячими газами дуги. У міру віддалення від центру плями, інтенсивність теплового потоку зменшується.

Умовно прийнято вважати, що діаметр плями нагріву, через який теплота вводиться в метал такий, що поверхнева густина теплового потоку, яка приходить на нього, складає  $0,05 q_{2m}$  (рис. 11.3), причому:

$$q_2 = q_{2m} e^{-kr^2}, \quad (11.6)$$

де  $q_2$  – розподіл поверхневої густини теплового потоку у радіальному напрямі  $r$ , Вт/м<sup>2</sup>;  $k$  – коефіцієнт зосередженості теплового потоку джерела, (м<sup>2</sup>)<sup>-1</sup>;  $q_{2m}$  – найбільша поверхнева густина теплового потоку в центрі плями нагріву, Вт/м<sup>2</sup>.



**Рис. 11.3 – Розподіл поверхневої густини теплового потоку джерела теплоти при електродуговому зварюванні**

Якщо електрична дуга щосекунди вводить у пластину  $q$  теплоти, то з врахуванням (11.6) можна записати:

$$q = \int_0^{\infty} q_2 2\pi r dr = 2\pi q_{2m} \int_0^{\infty} e^{-kr^2} r dr. \quad (11.7)$$

$$\text{Звідси } q = \frac{\pi q_{2m}}{k}.$$

Використовуючи залежність (11.6), також отримаємо:

$$q_2(r_H) = q_{2m} e^{-kr_H^2} = 0,05q_{2m},$$

де  $r_H$  – радіус плями нагріву.

Звідси діаметр плями нагріву наступний:

$$d_H = \frac{3,46}{\sqrt{k}}. \quad (11.8)$$

Знаючи ефективну потужність джерела нагріву  $q$  і коефіцієнт зосередженості теплового потоку  $k$ , можна оцінити розподіл теплоти по поверхні металу.

Виконуючи ці розрахунки для конкретних випадків, можемо переконатись, що пляма нагріву не є точковою для дугових способів зварювання, її діаметр складає 0,5–3 мм, а в випадку зварювання газовим пальником досягає 8–10 см. Таким чином, при цьому виконувати розрахунки дії дуги як точкового джерела неможливо. У випадках, коли діаметр плями нагріву великий, необхідно виконувати розрахунок з врахуванням розподілу по плямі нагріву.

З підвищенням струму при  $U = \text{const}$ ,  $q_{2m}$  збільшується. З підвищенням напруги при  $I = \text{const}$ ,  $q_{2m}$  зменшується і розподіл питомого теплового потоку стає менш зосередженим. Тепловий потік електричної дуги під флюсом значно більш зосереджений, ніж тепловий потік відкритої вугільної чи металеві дуги.

При математичному моделюванні процесів зварювання найбільш досконалою на сьогодні вважається модель розподіленого об'ємного джерела нагрівання, запропонована Голдаком [33]. Аналітична модель Голдака задає нормальний (за Гаусом) розподіл густини потужності джерела нагрівання в об'ємі тіла, який має форму подвійного еліпсоїда (див. рис. 11.4).

Відмінність моделі подвійного еліпсоїда за Голдаком від інших моделей об'ємних джерел нагрівання полягає в тому, що в ній

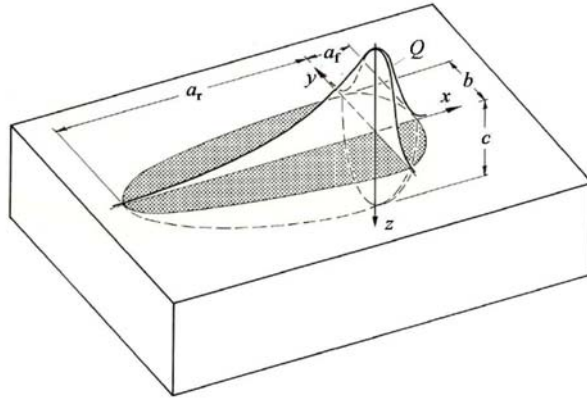


Рис. 11.4. Модель об'ємного зварювального джерела нагрівання [33]

розподіл об'ємної густини потужності джерела задається незалежно для фронтальної (індекс  $f$ ) та хвостової (індекс  $r$ ) чвертей еліпсоїда:

$$q_{v,f} = f_f \frac{6\sqrt{3}Q}{a_f b c \pi^{3/2}} \exp \left\{ -3 \left[ \left( \frac{x + \omega_3 (\tau - \tau_n)}{a} \right)^2 + \left( \frac{y}{b} \right)^2 + \left( \frac{z}{c} \right)^2 \right] \right\}; \quad (11.9)$$

$$q_{v,r} = f_r \frac{6\sqrt{3}Q}{a_r b c \pi^{3/2}} \exp \left\{ -3 \left[ \left( \frac{x + \omega_3 (\tau - \tau_n)}{a_r} \right)^2 + \left( \frac{y}{b} \right)^2 + \left( \frac{z}{c} \right)^2 \right] \right\}, \quad (11.10)$$

де  $Q$  – ефективна теплова потужність джерела нагрівання, Вт (для дугового зварювання  $Q = \eta IU$ );  $\tau$  – час від початку дії джерела;  $\tau_n$  – поточний час;  $\omega_3$  – швидкість переміщення джерела (швидкість зварювання);  $x, y, z$  – півосі еліпсоїда за координатними напрямками  $OX, OY, OZ$ ;  $f_f$  і  $f_r$  – коефіцієнти, що визначають співвідношення теплоти, введеного у фронтальну та хвостову частину еліпсоїда;  $a_f, a_r, b, c$  – відповідні радіуси нормального розподілу.

За даними [33] між коефіцієнтами  $f_f$  і  $f_r$  існує наступне співвідношення:

$$f_f = \frac{2a_f}{a_f + a_r}; \quad f_r = \frac{2a_r}{a_f + a_r}; \quad f_f + f_r = 2. \quad (11.11)$$

Рекомендовано для загальних випадків дугового зварювання призначати  $f_f = 0,4$  та  $f_r = 1,6$ .

Запропонована Голдаком модель зварювального джерела теплоти об'єднує в собі всі попередні моделі розподілених джерел: об'ємних дискових за Павелічем, Круцем та Зегерліндем [34, 36], об'ємного за Пелі та Гібертом [35], об'ємного півсферичного та еліпсоїдного [33]. Всі ці моделі базуються на запропонованій Рикалінім гіпотезі нормального розподілу густини питомого теплового потоку джерела у плямі нагрівання [25].

Сливінський О.А. та Препіяло А.О. дали аналіз запропонованої Голдаком моделі джерела теплоти [27]. Ними встановлено, що параметри  $a_f$ ,  $a_r$ ,  $b$  та  $c$  рівнянь (11.9) і (11.10) незалежні й можуть приймати різні значення у кожному з них. Задаючи різні геометричні параметри, можна в широких межах змінювати форму джерела нагрівання від майже сферичної до сильно витягнутої вздовж осі  $OX$ . Це дозволяє пристосовувати геометрію моделі до практично будь-якого способу зварювання плавленням концентрованими джерелами нагрівання: від аргоно-дугового та плазмового до зварювання під флюсом чи гібридного.

Необхідні для розрахунків за допомогою рівнянь (11.9) та (11.10) значення геометричних параметрів  $a_f$ ,  $a_r$ ,  $b$ ,  $c$ , пов'язані з дисперсією функції нормального розподілення, яка, в свою чергу, залежить від значення параметрів режиму зварювання, що також присутні у цих виразах. Отже, найбільш актуальним завданням моделювання процесів зварювання за допомогою моделі Голдака є пошук емпіричних або статистичних залежностей між параметрами режиму зварювання та геометричними параметрами самої моделі.

Чисельні методи, що можуть застосовуватись при такому моделюванні, на відміну від аналітичних, дозволяють розв'язувати задачу теплопровідності з врахуванням реальної геометрії зварюваної конструкції, температурної залежності теплофізичних властивостей, розподіленості джерел нагріву. На сьогодні найбільш поширеним є чисельний метод кінцевих елементів. Сучасні програмні продукти, наприклад ANSYS, представляють широкі можливості розрахунку теплопровідності при зварюванні [3].

Чисельні розрахунки надають інформацію тільки для заданих умов задачі за певних значень всіх постійних параметрів. Однак, чисельний метод не дає, на відміну від аналітичного, загального розв'язку задачі, але його доцільно застосовувати для інженерних розрахунків у випадках, коли отримання аналітичного розв'язку через складність умов задачі є складним або недосяжним.

**11.3. Поширення теплоти  
при наплавленні валика на масивне тіло.  
Термічний цикл, ізохрони та ізотерми у плані**

Якщо відслідковувати зміну температурного поля при зварюванні виробів зосередженим джерелом теплоти (наприклад, дугою або електронним променем), то легко встановити, що на початку його дії область високих температур невелика, а потім зростає до певних розмірів. Після припинення дії такого джерела теплоти (дуга вимкнена) охолодження металу відбувається інтенсивніше, оскільки додаткового введення теплоти не відбувається, а введена теплота поширюється в тілі. Для розрахунку процесу поширення теплоти при наплавленні валика на масивне тіло необхідно вибрати його розрахункову схему та джерело теплоти.

Вважаємо масивне тіло півнескінченим, оскільки розміри його такі, що всі граничні поверхні, крім поверхні, на яку виконується наплавлення, не спотворюють теплове поле. Електричну зварювальну дугу прийmemo точковим, рухомих і постійно діючим джерелом теплоти. Теплову потужність зварювальної дуги в процесі наплавлення валика задамо постійною.

Розглянемо спочатку граничний стан, характерний для зварювання більшої частини довжини достатньо довгих швів.

Рівняння граничного стану процесу поширення теплоти від точкового джерела постійної потужності, що рухається з постійною швидкістю поверхнею півнескінченного тіла, віднесене до рухомої системи координат має вигляд:

$$t_{(R,x)} = \frac{q_e}{2\pi\lambda R} e^{-\frac{\omega_3}{2a_T}(x+R)}, \quad (11.12)$$

де  $R$  – відстань точки, де визначається температура, від початку координат  $O$  рухомої системи;  $x$  – її абсциса в рухомій системі координат;  $\omega_3$  – швидкість зварювання.

Якщо джерело теплоти нерухоме, тобто  $\omega_3 = 0$ , то  $e^0 = 1$  і вираз (11.12) буде мати вигляд:

$$t_{(R)} = \frac{q_e}{2\pi\lambda R}. \quad (11.13)$$

Температура для цієї потужності джерела  $q_e$  і заданого металу  $\lambda$  залежить тільки від відстані  $R$ .

Залежність  $t = \varphi(R)$  є простою гіперболою. Відстань від точки спостереження до джерела теплоти  $R$ , визначають за формулою:

$$R = \sqrt{(x - x_D)^2 + (y - y_D)^2 + (z - z_D)^2}, \quad (11.14)$$

де  $x, y, z$  – координати точки спостереження,  $x_D, y_D, z_D$  – координати джерела теплоти.

Використовуючи вираз (11.12), можна графоаналітичним способом побудувати термічний цикл, ізохрони і ізотерми в плані при наплавленні валика на поверхню масивного тіла.

Термічний цикл – це часова зміна температури заданих точок температурного поля, що утворюється при зварюванні.

У деякий момент часу досліджувана точка температурного поля буде мати максимальне значення. Вміння визначити цю температуру в процесі зварювання дуже важливе для практики, оскільки відомо, що при перегріві металу вище 600–800 °С деякі аустенітні сталі втрачають свою корозійну стійкість [14]. Враховуючи це, методами теплового розрахунку можна завчасно знайти величину зони перегріву і передбачити її зменшення.

Ізохрони – лінії температурного розподілу в визначеному поперечному перетині за різні проміжки часу. Ізотерми в плані – лінії постійної температури на площині  $xOy$ . На рис. 11.5 наведені термічні цикли, ізохрони, ізотерми в плані (на поверхні  $xOy$ ) і в поперечній площині  $xOz$  під час руху точкового джерела теплоти на поверхні півнескінченного тіла [4].

Температурне поле граничного стану симетричне відносно осі  $Ox$  (рис. 11.5). Ізотерми в плані (на поверхні  $xOy$ ) являють собою овальні криві, що стиснені перед джерелом теплоти і розріджені позаду нього (рис. 11.5, *a*). Ізотермічні поверхні утворюються обертанням ізотерм відносно осі  $Ox$ .

Зміщення ізотерм одна відносно іншої та їх видовженість залежать від параметра  $\omega_s R / 2a_T$ . В області його малих значень ізотерми є близькими до кола, за великих значень – ізотерми витягнуті вздовж осі  $Ox$ . Температура точок при наближенні джерела теплоти різко зростає, досягає максимуму, а потім зменшується. Зниження температури відбувається з меншою швидкістю, ніж її зростання. Максимум температури в точках, що знаходяться не на осі  $Ox$ , дося-

гається після проходження джерелом теплоти площини, яка паралельна  $yOz$ , і де розміщена досліджувана точка.

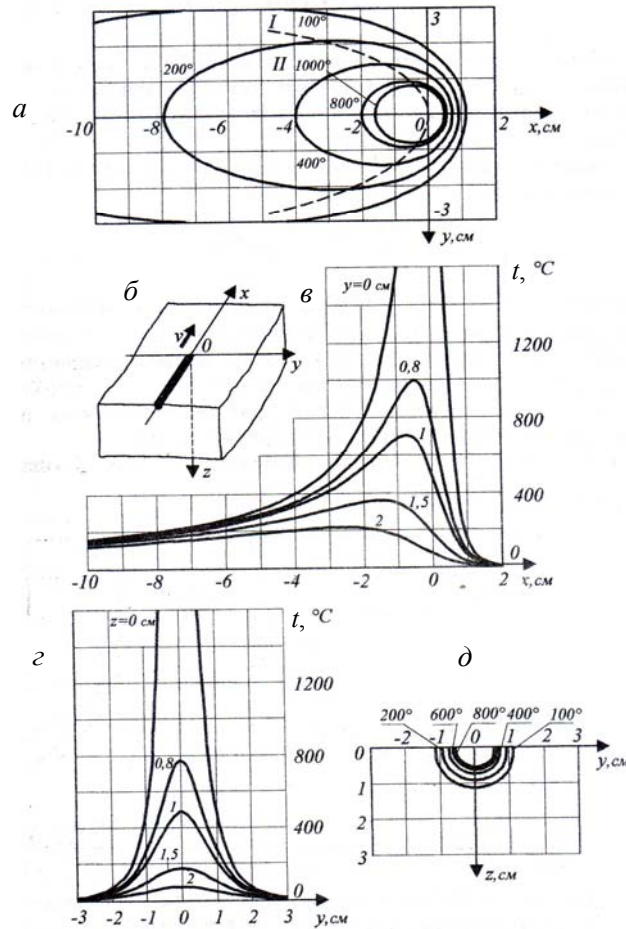


Рис. 11.5 – Температурне поле граничного стану при русі точкового джерела теплоти поверхнею півнескінченного тіла ( $q_e=4000$  Вт,  $\omega_s = 0,2$  см/с;  $a_T = 0,85 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с;  $\lambda = 40,2$  Вт/м·К);  
 а – ізотерми в плані (на поверхні  $xOy$ );  
 б – схема розташування координатних осей;  
 в – термічні цикли для на відстаней, що дорівнюють 0; 0,8; 1,5; 2 см;  
 з – температури прямих, паралельних осі  $y$  для площини  $xOz$ ;  
 д – ізотерми у площині  $yOz$ , що проходить через центр джерела теплоти [4]

У більш віддалених від осі  $Ox$  точках максимальна температура досягається пізніше і має менше чисельне значення порівняно з точками, що розташовані ближче до осі  $Ox$ . Пунктирною лінією (рис. 11.5, *a*) з'єднані точки з максимальною температурою на площині  $xOy$ . Поверхню розділу областей нагріву і охолодження отримують шляхом обертання пунктирної кривої відносно осі  $Ox$ . Область, що розташована попереду пунктирної кривої нагрівається, позаду – охолоджується. Ізотерми на площині  $xOy$  можна побудувати, використовуючи номограму, що дає розв'язок задачі в полярних координатах.

Введемо наступні безрозмірні величини:  $\frac{\omega_3 x}{2a_T} = \alpha_n$  і  $\frac{\omega_3 R}{2a_T} = \rho$ .

Оскільки  $\alpha_n$  – це величина, що характеризує вимірювання по осі  $x$ , а  $\rho$  – радіус-вектор, то між ними у полярних координатах існує зв'язок:  $\alpha_n = \rho \cos \varphi$ , де  $\varphi$  – кут між напрямками  $X$  та  $R$ .

Після підстановки  $R = \frac{2a_T \rho}{\omega_3}$  у формулу (11.12), отримаємо:

$$t = \frac{q_e \omega_3}{2\pi\lambda 2a_T} \cdot \frac{1}{\rho} e^{-\rho(1+\cos\varphi)} \quad (11.15)$$

або

$$\frac{4\pi\lambda a_T t}{q_e \omega_3} = \frac{1}{\rho} e^{-\rho(1+\cos\varphi)}. \quad (11.16)$$

Позначимо безрозмірну ліву частину рівняння (11.16) як деякий безрозмірний параметр температури:

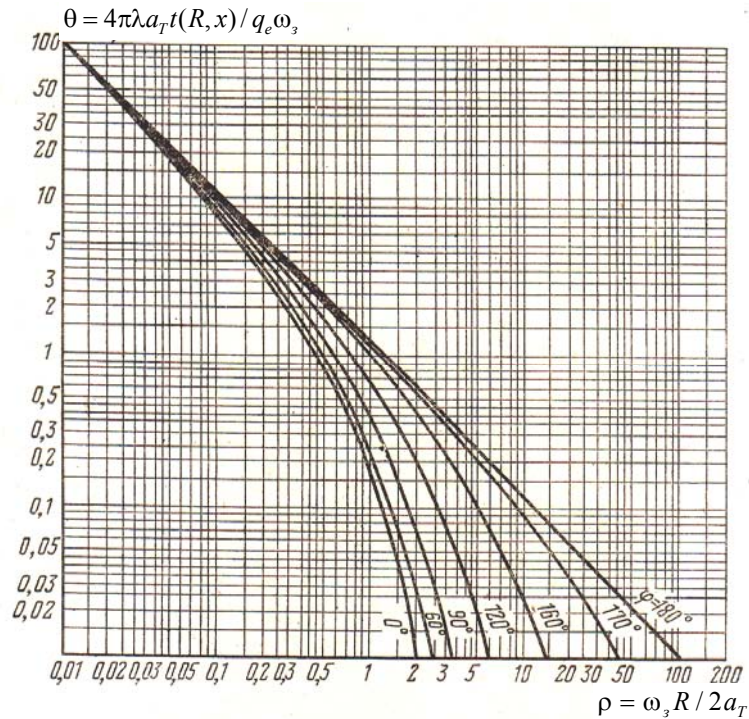
$$\theta = \frac{4\pi\lambda a_T t}{q_e \omega_3}. \quad (11.17)$$

Отримаємо рівність:

$$\theta = \frac{1}{\rho} e^{-\rho(1+\cos\varphi)}, \quad (11.18)$$

що встановлює зв'язок між величинами  $\theta$ ,  $\rho$  та  $\varphi$ .

Задаючи постійні значення  $\varphi$ , можна побудувати графічні залежності  $\theta = \psi(\rho)$ . Така діаграма для побудови температурних полів граничного стану півнескінченного тіла показана на рис. 11.6.



**Рис. 11.6 – Номограма для побудови температурних полів граничного стану півнескінченного тіла [22]**

Для побудови ізотерми в площині  $xOy$  визначають параметр  $\theta = 4\pi\lambda a_T t / q_e \omega_3$ , проводять на номограмі горизонталь від цього значення і від місця її перетину з кривими для різних  $\varphi$  знаходять на осі абсцис відповідні величини  $\omega_3 R / 2a_T = \rho$ , а таким чином, і  $R$ , тобто радіус-вектори під кутами  $\varphi$  від точки знаходження точкового джерела теплоти.

Процес поширення теплоти при зварюванні можна умовно розділити на три стадії:

- теплонасичення, коли температури в полі, що переміщується разом з джерелом теплоти, продовжують зростати;
- межовий квазістаціонарний стан, коли рухоме поле практично не змінюється;
- вирівнювання температури після закінчення зварювання, коли джерело теплоти перестає діяти.

#### 11.4. Періоди теплонасичення і вирівнювання температури

За рухомих джерел утворення граничного стану характеризується встановленням квазістаціонарного поля, яке, не змінюючись, переміщується разом із джерелом. Такий граничний стан створюється не одразу. Наприклад, для дугового зварювання в початковий момент, теплота дуги вводиться в холодний метал, температура якого постійна для усього об'єму. У міру горіння дуги метал нагрівається, при цьому зона нагрітого металу, що прилягає до джерела, зростає. Коли ж при даному режимі нагріву зона металу, нагріта вище будь-якої температури  $t$ , перестає зростати, то для цієї зони настає граничний стан.

Період процесу поширення теплоти до досягнення граничного стану (стаціонарного за нерухомого джерела і квазістаціонарного за рухомого) називається періодом теплонасичення. Після закінчення дії джерела теплоти, введена теплота продовжує поширюватися у тілі за рахунок теплопровідності. Період процесу поширення теплоти, починаючи з моменту припинення дії джерела, називається періодом вирівнювання температури.

Розглянемо розрахункову схему для цього періоду, запропоновану М.М. Рикаліним (рис. 11.7).

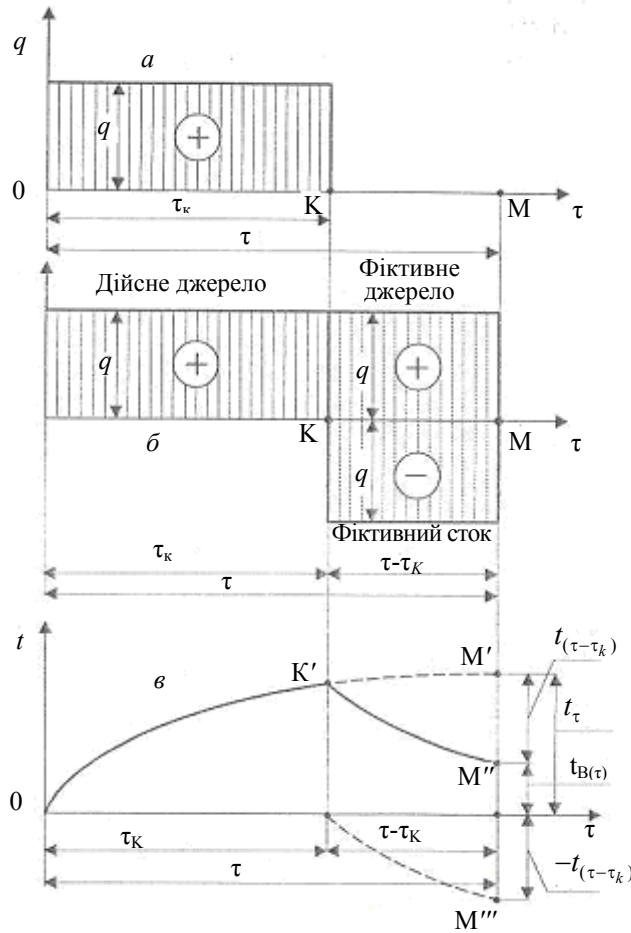
Нехай після проходження відрізка  $OK$  дійсне джерело теплоти потужністю  $q$ , припинивши введення теплоти в тіло в момент його знаходження у точці  $K$ , продовжує діяти і далі, але як фіктивне джерело такої самої потужності (рис. 11.7, б). Одночасно в момент  $K$  введений і фіктивний стік теплоти потужністю  $q$ , прикладений до тих самих ділянок тіла, що й фіктивне джерело теплоти  $+q$ , тобто на ділянці  $KM$  тіло теплоти не отримує. Температуру  $t_{\theta(t)}$  у момент  $M$  в періоді вирівнювання можна представити як алгебраїчну суму температури  $t_{(t)}$  від продовжуючого діяти джерела  $q$  і температури  $t_{(t-\tau_K)}$  стоку теплоти  $-q$ , що почав діяти (рис. 11.7, б):

$$t_{\theta(\tau)} = t_{(\tau)} - t_{(\tau-\tau_K)}. \quad (11.19)$$

Температуру  $t_{\theta(\tau)}$  можна виразити через температуру граничного стану  $t_{cp}$  і відповідні коефіцієнти теплонасичення:

$$t_{\theta(\tau)} = t_{cp} [\Psi_{(\tau)} - \Psi_{(\tau-\tau_K)}], \quad (11.20)$$

де  $t_{cp}$  визначаємо за формулою (11.12);  $R$  – відстань від точки спостереження до джерела теплоти;  $\Psi_{(\tau)}$  – коефіцієнт теплонасичення джерел теплоти;  $\Psi_{(\tau-\tau_k)}$  – коефіцієнт теплонасичення стоку теплоти.



**Рис. 11.7 – Схема розрахунку процесу поширення теплоти у період вирівнювання: а – дійсне джерело теплоти; б – введення фіктивного джерела і стоку теплоти; в – зміна температури від джерела теплоти: 0K' – дійсного, K'M' – дійсного і фіктивного, K'M'' – дійсного, в період вирівнювання**

Коефіцієнт теплонасичення зростає від нуля в початковий момент  $\psi_{(0)} = 0$  до одиниці, у граничному стані  $\psi_{(\infty)} = 1$ . Зростання цього коефіцієнта в часі характеризує процес насичення цієї точки тіла теплотою.

Величина коефіцієнта  $\psi_{(\tau)}$  залежить не тільки від часу, але й від відстані заданої точки від джерела теплоти  $\psi = f(R, \tau)$ .

Для зручності визначення  $\psi$  вводять безрозмірні параметри відстані та часу:

а) для просторового процесу поширення теплоти точкового джерела в півнескінченному тілі – безрозмірні критерії відстані

$$\rho_3 = \frac{\omega_3 R}{2a_T} \text{ та часу } \tau_3 = \frac{\omega_3^2 \tau}{4a_T};$$

б) для плоского процесу поширення теплоти лінійного джерела в пластині з тепловіддачею – безрозмірні критерії відстані

$$\rho_2 = \frac{\omega_3 r}{2a_T} \sqrt{1 + \frac{4ba_T}{\omega_3^2}} \text{ та часу } \tau_2 = \frac{\omega_3^2 \tau}{4a_T} \left(1 + \frac{4ba_T}{\omega_3^2}\right);$$

в) для плоского джерела теплоти, що поширюється в нескінченному стрижні – безрозмірні критерії відстані

$$\rho_1 = \frac{\omega_3 |x|}{2a_T} \sqrt{1 + \frac{4ba_T}{\omega_3^2}}$$

$$\text{та часу } \tau_1 = \frac{\omega_3^2 \tau}{4a_T} \left(1 + \frac{4ba_T}{\omega_3^2}\right);$$

Визначені М.М. Рикаліним значення коефіцієнтів теплонасичення для точкового, лінійного та плоского джерел теплоти наведені на рис. 11.8.

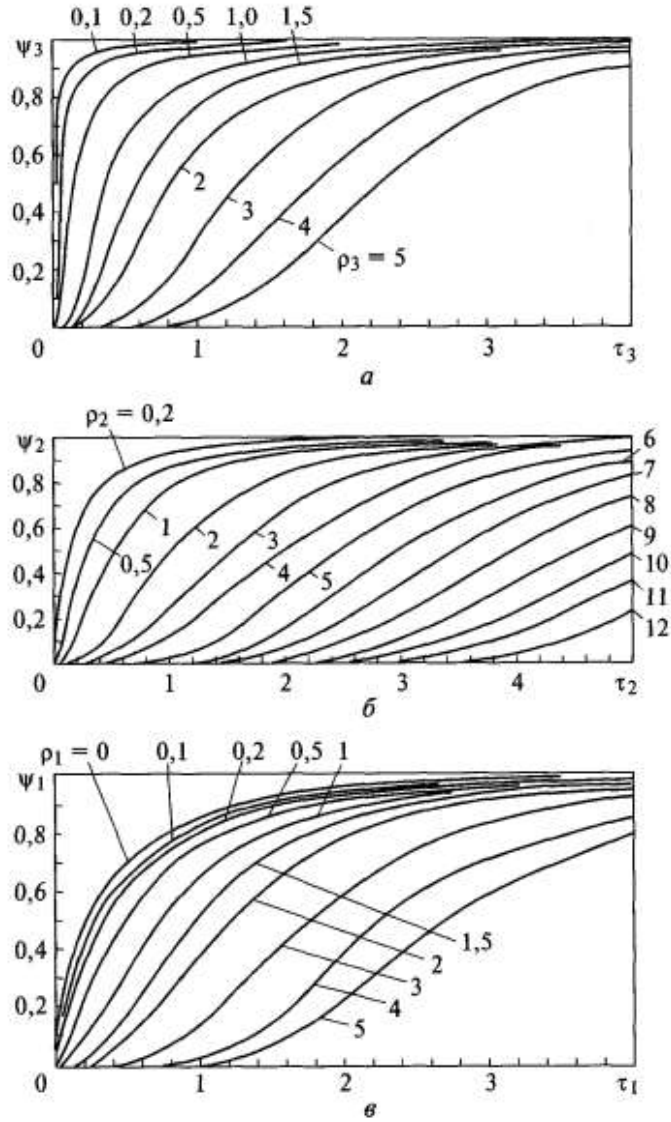
Порядок розрахунку температур у період теплонасичення включає визначення для точки з заданими координатами температури граничного стану за формулами: (11.12) – для масивного тіла, (11.22) – для пластини при її проплавленні на всю товщину.

Для плоского джерела в нескінченному стрижні температура граничного стану визначається за формулою:

$$t = \frac{q_e}{c\rho\omega_3 F \sqrt{1 + \frac{4ba_T}{\omega_3^2}}} e^{-\frac{\omega_3 x}{2a_T} - \frac{\omega_3 |x|}{2a_T} \sqrt{1 + \frac{4ba_T}{\omega_3^2}}}, \quad (11.21)$$

де  $b = \alpha\Pi/c\rho F$ ;  $\Pi$  – периметр стрижня.

Після цього визначають значення безрозмірних критеріїв і коефіцієнти теплонасичення за допомогою номограми (див. рис. 11.8). Температура в період вирівнювання визначається виразом (11.17).

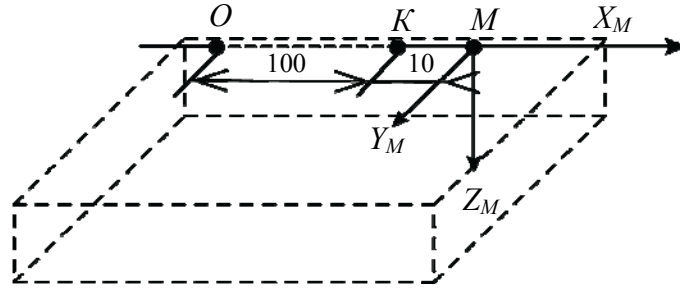


**Рис. 11.8 – Номограми для визначення коефіцієнтів теплонасичення:**  
*a* – точкове джерело в півнескінченному тілі ( $\psi_3$ );  
*b* – лінійне джерело в нескінченній пластині ( $\psi_2$ );  
*v* – плоске джерело в нескінченному стрижні ( $\psi_1$ ) [29]

**Приклад 11.1.** На поверхню масивного тіла наплавляють валик ОК, довжиною 100 мм (рис. 11.9).

Режим наплавлення – тепла потужність дуги  $q_e = 4200$  Вт; швидкість її переміщення  $\omega_3 = 1 \cdot 10^{-3}$  м/с; теплофізичні властивості металу: коефіцієнт теплопровідності  $\lambda = 41,8$  Вт/м·К, коефіцієнт температуропровідності  $a_T = 1 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с.

Необхідно розраховувати температуру точки *K* через 10 с після закінчення наплавлення.



**Рис. 11.9 – До розрахунку температури в період вирівнювання**

#### **Розв'язок**

При напавленні дійсне точкове джерело теплоти на довжині валика 100 мм переміщується зі швидкістю  $\omega_3 = 1 \cdot 10^{-3}$  м/с. Тривалість його дії  $\tau_k = 0,1/10^{-3} = 100$  с. Після закінчення наплавлення фіктивне джерело теплоти (сток), рухаючись з тією ж швидкістю, через 10 с знаходиться в точці *M*. Координати точки *K*, температура якої нас цікавить, відносно фіктивного джерела-стоку буде:

$$X_k = -1 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \text{ с} = -1 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad Y_k = 0; \quad Z_k = 0.$$

Температуру граничного стану точки  $(-1 \cdot 10^{-2}, 0, 0)$ , що лежить на від'ємній півосі  $X < 0$ , визначимо з рівняння:

$$t_{TP(-1 \cdot 10^{-2})} = \frac{q}{2\pi\lambda R} = \frac{4200}{2 \cdot 3,14 \cdot 41,8 \cdot 1 \cdot 10^{-2}} = 1600 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Тривалість дії джерела теплоти, дійсного та фіктивного  $\tau = 100 + 10 = 110$  с. Тривалість дії фіктивного стоку теплоти:  $\tau - \tau_k = 10$  с.

Безрозмірні критерії, за якими будуть знаходитись коефіцієнти теплонасичення:

$$\text{– відстані } \rho_3 = \frac{\omega_3 R}{2a_T} = \frac{1 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-5}} = 0,5;$$

$$\text{– часу дії джерела } \tau_3 = \frac{\omega_3^2 \tau}{4a_T} = \frac{(1 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 110}{4 \cdot 10^{-5}} = 1,75;$$

$$\text{– тривалості стоку } \tau_3^* = \frac{(1 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 10}{4 \cdot 10^{-5}} = 0,25.$$

Відповідні коефіцієнти теплонасичення (рис. 11.8):  $\psi_3 = 0,98$ ;  $\psi_3^* = 0,73$ . Температура точки  $K$  через 10 с після закінчення наплавлення:

$$t_{(-1 \cdot 10^{-3}, 110)} = 1600 \cdot (0,98 - 0,73) = 400 \text{ }^\circ\text{C}.$$

### 11.5. Температурне поле в пластині при її проплавленні на всю товщину

Розглянемо квазістаціонарне температурне поле для нагріву пластини товщиною  $\delta$  лінійним джерелом теплоти, розташованим на осі  $z$  і рівномірно розподіленому по товщині. Формула для розрахунку температури для граничного стану нагріву пластини тривало діючим рухомим лінійним джерелом теплоти:

$$t_{(r,x)} = \frac{q_e}{2\pi\delta\lambda} e^{-\frac{\omega_3 x}{2a_T}} \cdot K_0 \left( r \sqrt{\frac{\omega_3^2}{4a_T^2} + \frac{b}{a_T}} \right), \quad (11.22)$$

де  $r$  – відстань від центра джерела теплоти (початок координат) до заданої точки;  $\omega_3$  – швидкість зварювання, см/с;  $K_0$  – функція Бесселя другого роду нульового порядку від аргументу,  $U$ .

$$U = r \sqrt{\frac{\omega_3^2}{4a_T^2} + \frac{b}{a_T}},$$

де  $b = 2\alpha/cr\delta$  – коефіцієнт температуровіддачі,  $\text{с}^{-1}$ ;  $\alpha$  – коефіцієнт тепловіддачі,  $\text{Вт}/\text{м}^2 \cdot \text{К}$ ;  $\delta$  – товщина пластини, м.

Значення функції Бесселя другого роду нульового порядку табульовані. Щоб визначити її, досить знайти аргумент  $r \sqrt{\frac{\omega_3^2}{4a_T^2} + \frac{b}{a_T}}$  і знаючи його, за таблицею визначити значення функції.

Поле граничного стану при нагріві нерухомим джерелом можна розрахувати за спрощеною формулою. Підставивши в рівняння (11.22)  $\omega_3 = 0$ , одержимо:

$$t_{(r)} = \frac{q_e}{2\pi\delta\lambda} K_0 \left( r \sqrt{\frac{b}{a_T}} \right). \quad (11.23)$$

Якщо знехтувати поверхневою тепловіддачею пластини, то рівняння (11.22) можна ще спростити:

$$t_{(r,x)} = \frac{q_e}{2\pi\delta\lambda} e^{-\frac{\omega_3 x}{2a_T}} \cdot K_0 \left( \frac{\omega_3 r}{2a_T} \right). \quad (11.24)$$

Подібно до рівняння температурного поля у безрозмірних параметрах для півнескінченного тіла при його нагріві точковим джерелом теплоти, можна отримати розв'язок і для температурного поля в пластині при її нагріві лінійним джерелом теплоти.

Прийmemo  $\frac{\omega_3 x}{2a_T} = \alpha_{nl}$  та  $\frac{\omega_3 r}{2a_T} = \rho^*$  звідки  $r = \frac{2\alpha_{nl}\rho^*}{\omega_3}$  і пере-

пишемо вираз (11.22) наступним чином:

$$\frac{2\pi\lambda\delta t}{q_e} = e^{-\alpha_{nl}} \cdot K_0(\rho^*). \quad (11.25)$$

Ліву частину цього виразу, пов'язаного з температурою, позначимо через  $\theta^*$ , тобто  $\theta^* = e^{-\alpha_{nl}} \cdot K_0(\rho^*)$ . Оскільки  $x = r \cos \varphi$ , то  $\alpha_{nl} = \rho^* \cos \varphi$ .

Тоді:

$$\theta^* = e^{-\alpha_{nl}} \cdot K_0(\rho^*) = e^{-\alpha_{nl}} e^{+\rho^*} e^{-\rho^*} \cdot K_0(\rho^*). \quad (11.26)$$

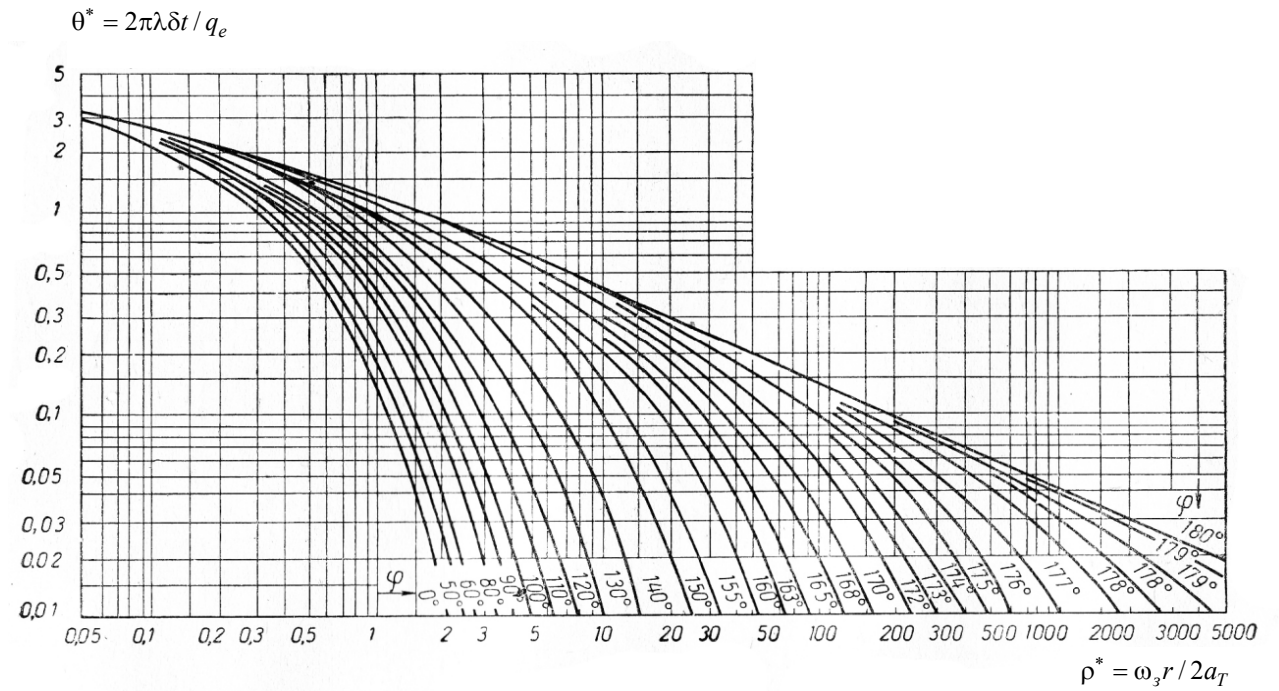
У кінцевому підсумку отримаємо наступну формулу:

$$\theta^* = e^{\rho^*} \cdot K_0(\rho^*) e^{-\rho^*(1+\cos\varphi)}. \quad (11.27)$$

Номограма розрахунку температурних полів у вигляді  $\theta^* = f(\rho^*)$  для нескінченної пластини, що нагрівається лінійним рухомим дже-

релом теплоти без тепловіддачі в навколишнє середовище зображена на рис. 11.10.

При лінійному джерелі на пластині у деяких випадках використовують розрахунки граничного стану за схемою швидкорухомого джерела.



**Рис. 11.10 – Номограма розрахунку температурних полів граничного стану в нескінченній пластині без тепловіддачі [22]**

### 11.6. Вплив режиму зварювання і теплофізичних параметрів металу на температурне поле граничного стану

Параметри режиму зварювання суттєво впливають на характер температурного поля граничного стану. Наведені результати експериментів при однопрохідному стиковому зварюванні сталевих зразків товщиною 1 см (температурне поле граничного стану в нескінченній пластині від рухомого безперервно діючого лінійного джерела теплоти), дозволяють зробити такі висновки:

1. Збільшення швидкості зварювання при постійній потужності джерела ( $q = \text{const}$ ) приводить до звуження ізотерм у напрямі, перпендикулярному до переміщення джерела і їх скорочення.

2. Збільшення потужності джерела зварювання (при  $U_{зв} = \text{const}$ ) веде до значного розвитку області нагрітого металу, ізотерми відповідних температур і по ширині та довжині мають більші розміри.

3. Для постійної погонної енергії ( $q/\omega_s = \text{const}$ ) вплив збільшення потужності переважає над впливом швидкості. Нагріті зони зростають зі збільшенням потужності.

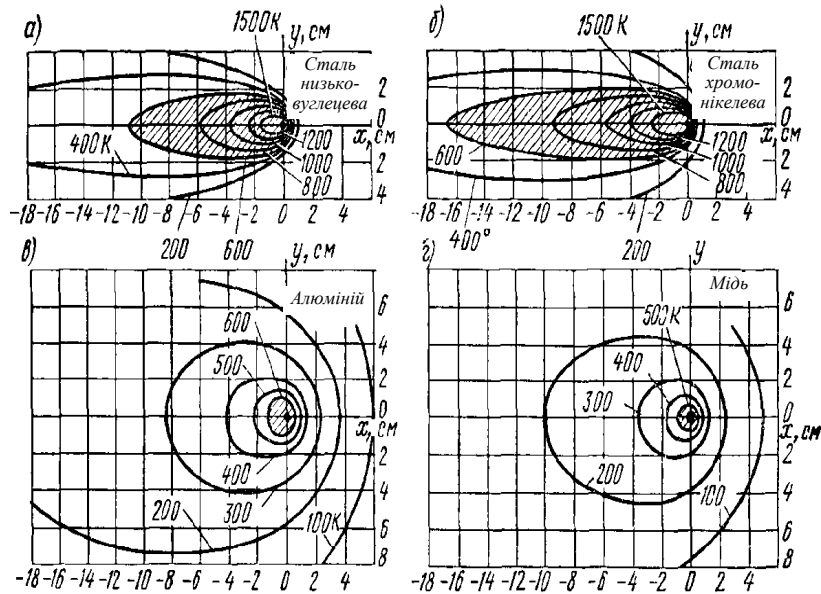


Рис. 11.11 – Теплофізичні властивості металу і температурне поле рухомого ( $\omega_{зв} = 2 \cdot 10^{-3}$  м/с)

**лінійного джерела теплоти ( $q_0 = 4200$  Вт) у пластині ( $\delta = 1$  см) [29]**

Якщо зварювати при однаковому режимі метал з різними теплофізичними властивостями, то характер їх теплових полів неоднаковий (див. рис. 11.11).

Найбільш суттєвий вплив на теплове поле має теплопровідність. Порівнюючи температурні поля в маловуглецевій і хромонікелевій сталях за практично однакової об'ємної теплоємності, але різної теплопровідності, можна відмітити, що при більш низькому коефіцієнті теплопровідності область високих температур виявляється ширшою і довшою. Тобто, для одержання певної зони розплавлення хромонікелевої аустенітної сталі, порівняно з маловуглецевою нелегованою, можна користуватись джерелами меншої потужності.

Більш висока теплопровідність алюмінію значно зменшує високотемпературну область, незважаючи на менше значення об'ємної теплоємності. Високою теплопровідністю алюмінію визначається і менша щільність ізотерм перед рухомих джерелом теплоти. Тому і розрахунки за схемами з швидкорухомими джерелами теплоти стосовно зварювання алюмінію дають значно більшу похибку, ніж при зварюванні сталі. Так, наприклад, якщо при зварюванні сталей похибка у розрахунку полів незначна при  $\omega_{ze} \geq 7 \cdot 10^{-3}$  м/с, то при зварюванні алюмінію мала похибка застосування розрахункових схем швидкорухомих джерел має місце тільки для  $\omega_{ze} \approx 2,8 \cdot 10^{-2}$  м/с.

Мідь ще більш теплопровідна, ніж алюміній і для її розплавлення в умовах зварювання необхідно мати досить потужне та концентроване джерело теплоти.

### **11.7. Нагрів потужними швидкорухомими джерелами теплоти**

У зварювальній техніці часто застосовують потужні джерела теплоти, що здійснюють зварювання з досить великими швидкостями. У граничному випадку, коли ефективна потужність дуги  $q_e$  і швидкість зварювання (швидкість руху джерела теплоти)  $\omega_z$ , прямують до нескінченності, тоді як відношення  $q_e/\omega_z$  зберігає деяке постійне кінцеве значення, поширення теплоти в масивному тілі і пластині має особливості, що дозволяють значно спростити розрахункові схеми.

**Точкове джерело теплоти.** Спростимо рівняння граничного стану:

$$t_{ГР} = \frac{q_e}{2\pi\lambda R} e^{-\frac{\omega_3}{2a_T}(x+R)}, \quad (11.28)$$

за умов:

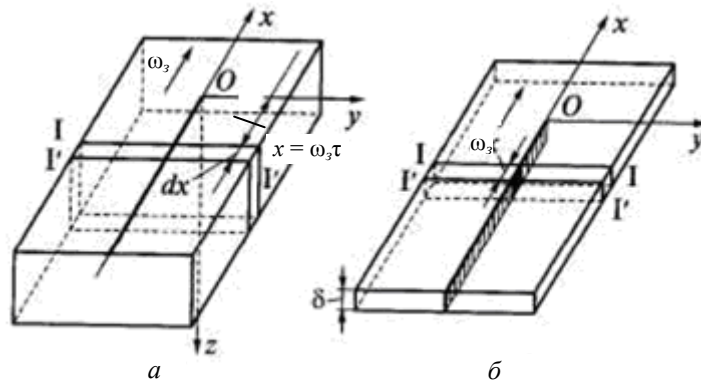
$$q_e \rightarrow \infty, \omega_3 \rightarrow \infty, q_e/\omega_3 = q_n = \text{const}, \quad (11.29)$$

де  $q_n$  – погонна енергія, Дж/м.

Очевидно, що рівняння (11.28) для області позаду джерела теплоти, де  $x < 0$ , можна перетворити із врахуванням  $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  та  $x = -\omega_3\tau$ , до наступного вигляду:

$$t_{ГР} = \frac{q_n}{2\pi\lambda \sqrt{\tau^2 + \frac{y^2 + z^2}{\omega_3^2}}} e^{-\frac{2}{\omega_3} \left( -\tau + \sqrt{\tau^2 + \frac{y^2 + z^2}{\omega_3^2}} \right)}, \quad (11.30)$$

де  $\tau$  – час від моменту, коли джерело теплоти перетнуло перпендикулярну до осі  $Ox$  площину  $I$ , в якій розташована задана точка (рис. 11.12).



**Рис. 11.12 – Схема виділення площинами  $I$  та  $I'$  областей поширення теплоти від потужного швидкорухомого джерела:  
 а – точкове джерело на поверхні півнескінченного тіла;  
 б – лінійне джерело в нескінченній пластині**

Оскільки при  $\omega_3 \rightarrow \infty$  величина  $\frac{y^2 + z^2}{\omega_3^2}$  мала порівняно з  $\tau^2$ , то:

$$\sqrt{\tau^2 + \frac{y^2 + z^2}{\omega_3^2}} \approx \tau + \frac{y^2 + z^2}{\omega_3^2 2\tau}. \quad (11.31)$$

Після перетворень, нехтуючи нескінченно малою величиною, знаходимо:

$$t_{GP} = \frac{q_n}{2\pi\lambda\tau} e^{-\frac{y^2+z^2}{4a_T\tau}}. \quad (11.32)$$

Рівняння (11.32), що не містить координати  $x$ , вказує на те, що теплові потоки в напрямі осі  $Ox$ , вздовж якої рухається джерело теплоти, досить малі порівняно з тепловими потоками в перпендикулярному напрямі, оскільки  $\frac{\partial t}{\partial x} = 0$ . Це справедливо для  $\omega_3 \rightarrow \infty$ .

Однак рівняння (11.32) може використовуватись для технічних розрахунків, коли швидкість  $\omega_3$ , хоча і не прямує до нескінченності, але є достатньо великою. У цьому випадку приймають заміну  $\tau = -x/\omega_3$ , тоді:

$$t_{GP} = -\frac{q_n}{2\pi\lambda x} e^{\frac{\omega_3 r^2}{4a_T x}}, \quad (11.33)$$

де

$$r^2 = y^2 + z^2. \quad (11.34)$$

Якщо з виразу (11.33) знайти величину  $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = 0$ , пропорційну різниці теплових потоків, що проходять через площини  $I$  та  $I'$  в напрямі  $Ox$ , і записати її в функції  $\omega_3$  та  $\tau$ , то виявиться, що кількість теплоти, що поступає у шар між площинами  $I$  та  $I'$  при конкретному  $\tau$  значно залежить від  $\omega_3$ . Чим більше  $\omega_3$ , тим менше вплив теплових потоків вздовж осі  $Ox$  на розподіл температур у площині  $yOz$ .

Процес поширення теплоти майже повністю залежить від теплових потоків в площині  $yOz$ .

Для визначення температури точок, розташованих позаду джерела теплоти, можна використовувати вирази (11.32) або (11.33). При застосуванні рівняння (11.32) необхідно враховувати, що для кожної поперечної площини  $I$  півнескінченного тіла приймається

свій час  $\tau$ , що визначається з моменту проходження джерела теплоти через задану площину.

Не варто користуватись рівнянням (11.32) в області малих значень  $\tau$ , що відповідають області виділення теплоти.

### 11.8. Автоматичне зварювання пластин за один прохід

Граничний стан процесу поширення теплоти при нагріві пластин потужним швидко рухомих джерелом теплоти також можна отримати з рівняння:

$$t_{ГР} = -\frac{q_e}{2\pi\lambda\delta} e^{-\frac{\omega_3 x}{2a_T}} \cdot K_0\left(\frac{\omega_3 r}{2a_T} \cdot \sqrt{1 + \frac{4ba_T}{\omega_3^2}}\right), \quad (11.35)$$

де  $K_0$  – функція Бесселя першого роду нульового порядку, за умови, що  $q_e \rightarrow \infty$ ,  $\omega_3 \rightarrow \infty$ ,  $q_e/\omega_3 = q_n = \text{const}$ .

За аналогією для точкового джерела теплоти, можна отримати для лінійного джерела наступну схему (рис. 11.12, б). Джерело теплоти виділяє на відріжку довжиною  $dx$  теплоту  $Q = q \cdot dx/\omega_3$ , яка поширюється вздовж стрижня, обмеженого площинами  $I$  та  $I'$  і має поперечний переріз  $\delta \cdot dx$ . Підставляючи ці величини в рівняння:

$$t_{ГР} = \frac{\frac{Q}{F}}{c\rho(4\pi a_T \tau)^{0.5}} e^{-\frac{x^2}{4a_T \tau} - b\tau}, \quad (11.36)$$

і замінюючи координату  $x$  координатою  $y$ , а також враховуючи поверхневу тепловіддачу, отримаємо:

$$t_{ГР} = \frac{q_e}{\omega_3 \delta \sqrt{4\pi\lambda c\rho\tau}} e^{-\frac{y^2}{4a_T \tau} - b\tau}. \quad (11.37)$$

Якщо тіла мають початкову температуру  $t_0$ , то замість рівнянь (11.32) і (11.36) використовують наступний вираз:

$$t_{ГР} = \frac{q_e}{2\pi\lambda\tau} e^{-\frac{r^2}{4a_T \tau}} + t_0, \quad (11.38)$$

або

$$t_{GP} = \frac{q_e}{\omega_3 \delta \sqrt{4\pi\lambda c\rho\tau}} e^{-\frac{y^2}{4a_T\tau} - b\tau} + t_0, \quad (11.39)$$

де  $t_0$  – початкова температура або температура підігріву тіла.

**Приклад 11.2.** Пластини з низьколегованої сталі товщиною  $\delta = 6$  мм зварюють з підігрівом при  $t_0 = 150$  °С дуговим зварюванням під флюсом (струм  $I = 160$  А, напруга дуги  $U = 36$  В, швидкість зварювання  $\omega_3 = 20$  м/год = 0,56 см/с). Ефективний к.к.д. джерела теплоти  $\eta_e = 0,85$ .

Визначити температуру точки біля зварювального шва з координатами відносно рухомого джерела:  $x = -25$  см,  $y = 4$  см та температуру осі шва в тому самому перерізі. Теплофізичні параметри сталі:  $\lambda = 39$  Вт/м·К,  $a_T = 8 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с,  $c\rho = 4,9 \cdot 10^6$  Дж/м<sup>3</sup>·К,  $\alpha = 50$  Вт/м<sup>2</sup>·К.

**Розв'язок**

Ефективна теплова потужність дуги:

$$q_e = \eta_e \cdot U \cdot I = 0,85 \cdot 36 \cdot 260 = 7956 \text{ Вт.}$$

Швидкість зварювання:

$$\omega_3 = 20 \text{ м/год} = 0,56 \text{ см/с} = 0,56 \cdot 10^{-2} \text{ м/с.}$$

Визначаємо коефіцієнт температуровіддачі:

$$b = \frac{2\alpha}{c\rho\delta} = \frac{2 \cdot 50}{4,9 \cdot 10^6 \cdot 6 \cdot 10^{-3}} = 3,4 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}.$$

Час, що пройшов з моменту проходження джерела теплоти через площину, в якій розміщені задані точки, визначаємо через відстань  $x$  та швидкість зварювання  $\omega_3$ :

$$\tau = -\frac{x}{\omega_3} = -\frac{-25}{0,56} = 44,6 \text{ с.}$$

Температуру точки біля шва з координатою  $y = 4$  см визначимо за формулою (11.35):

$$t_{ГР} = \frac{7956}{0,56 \cdot 10^{-2} \cdot 0,6 \cdot 10^{-2} \cdot \sqrt{4 \cdot 3,14 \cdot 39 \cdot 4,9 \cdot 10^6 \cdot 44,6}} e^{\frac{4 \cdot 10^{-4}}{43 \cdot 10^{-6} \cdot 44,6} - 3,4 \cdot 10^{-3} \cdot 44,6} + 150^{\circ}\text{C} = 621,6^{\circ}\text{C}.$$

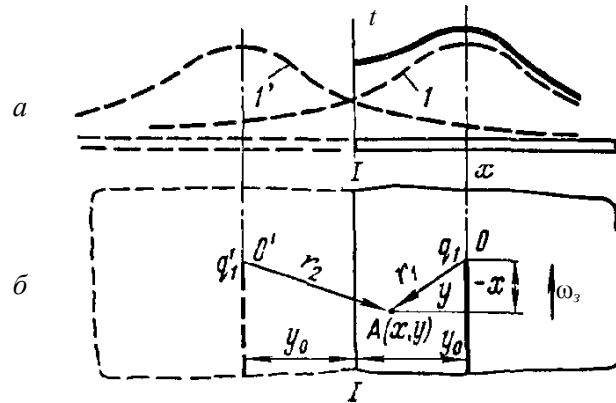
Температуру осі шва визначимо за формулою (11.38) при  $y = 0$ :

$$t_{ГР} = 723,93 \cdot e^{-0,1516} + 150 = 723,93 \cdot 0,86 + 150 = 772,7^{\circ}\text{C}.$$

### 11.9. Обмеженість розмірів тіла та процес поширення теплоти

Зварювальні вироби завжди мають обмежені розміри. Однак, у більшості випадків для оцінки температурного поля і визначення термічних циклів немає необхідності враховувати вплив границь тіла. Але для деяких випадків таке врахування є необхідним як результат значного впливу теплоти, яка відбивається від границь тіла, на температурне поле. Границі тіла у першому наближенні можна вважати такими, що не пропускають теплоту, тобто адіабатичними. Раніше був описаний метод за допомогою якого створюються адіабатичні умови для необмеженого тіла. Цей метод використовується також і для опису рухомих температурних полів.

Нехай джерело теплоти переміщується на деякій відстані від краю пластини  $y_0$  (рис. 11.13). Вважаючи границю  $I-I$  адіабатичною, прийmemo умови відбиття теплоти від неї.



**Рис. 11.13** – Схема введення додаткового рухомого джерела  $q_1'$  для врахування відбиття теплоти від границі  $I-I$ :  
 $a$  – розподіл температури від джерел  $q_1$  і  $q_1'$  та її реальний розподіл (суцільна лінія);  $b$  – схема руху джерел  $q_1$  та  $q_1'$  у пластині

Цього можна досягнути, якщо допустити, що пластина є нескінченною і в ній рухаються одночасно з однаковою швидкістю два джерела рівної потужності. Відстань між реальним та фіктивним джерелами становить  $2y_0$ . Розподіл температури в довільному перерізі від дійсного джерела теплоти  $q_1$  у нескінченній пластині показано на рис. 11.13,  $a$  пунктирною лінією  $I$ . Пунктирною кривою  $I'$  показаний розподіл температури від фіктивного джерела. Загальний розподіл температури з врахуванням відбиття теплоти від границі  $I-I$  являє собою суму температур від дійсного та фіктивного джерел теплоти і показаний на рисунку товстою суцільною лінією.

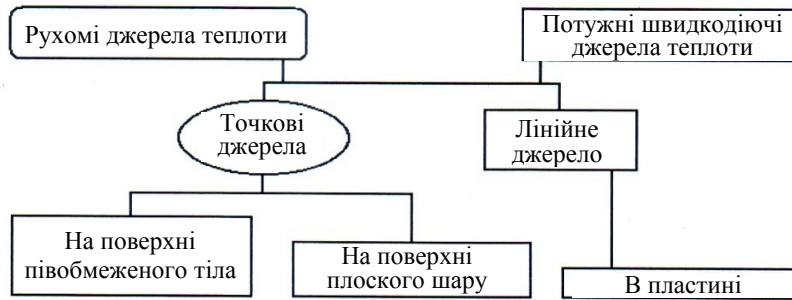
Температура в деякій точці  $A$  визначається за наступною формулою:

$$t_A = \frac{q_e}{2\pi\delta\lambda} e^{-\frac{\omega_3 x}{2a_T}} \cdot \left[ K_0 \left( r_1 \sqrt{\frac{\omega_3^2}{4a_T^2} + \frac{b}{a_T}} \right) + K_0 \left( r_2 \sqrt{\frac{\omega_3^2}{4a_T^2} + \frac{b}{a_T}} \right) \right], \quad (11.40)$$

$$\text{де } r_1 = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{x^2 + (2y_0 - y)^2}.$$

Аналогічно можна визначити температуру для випадку, якщо джерело теплоти рухається під деяким кутом до границі тіла. За допомогою такої самої методики визначають температуру при русі точкового джерела теплоти поблизу краю масивного тіла.

**Вибір схеми розрахунку температурних полів при зварюванні.** Розглянуті схеми температурних полів відповідають основній масі практичних випадків для найбільш розповсюджених способів зварювання. Для розв'язання інженерних задач, виходячи з критеріїв значення швидкості зварювання, теплофізичних властивостей матеріалу, співвідношення глибини провару і товщини виробу, цілком реально підібрати одну із наведених методик. При цьому можна керуватись методологічною класифікацією [12] (рис. 11.4).



**Рис. 11.14 – Схема розрахунку температурного поля при зварюванні**  
*Алгоритм вибору схеми розрахунку*

**Рухоме чи потужне швидкодіюче джерело теплоти?** Це залежить від співвідношення швидкості руху джерела зварювального нагріву і швидкості розповсюдження теплоти у тілі (швидкості вирівнювання температури). Остання, в свою чергу, визначається переважно коефіцієнтом теплопровідності матеріалу тіла. Чим більше значення має цей коефіцієнт, тим при більшому значенні швидкості джерела теплоти відбувається перехід від рухомих схем до схем потужних швидкодіючих джерел.

Грунтуючись на досвіді такого роду обчислень можна рекомендувати наступні (див. таблицю) критерії швидкості зварювання (чи наплавлення) для переходу від розрахунків рухомих джерел теплоти (при менших значеннях швидкості руху) до розрахунків потужних швидкодіючих джерел теплоти (при більших значеннях швидкості руху) [12]:

Матеріал	Швидкість руху, яка розділяє схеми рухомих та потужних швидкодіючих джерел теплоти
Мідь і сплави на її основі	16–18 м/год.
Алюміній і сплави на його основі	12–14 м/год.
Сталі, вуглецеві та низьколеговані	10–12 м/год.
Сталі, високолеговані, нержавіючі	8–10 м/год.
Титан і титанові сплави	7–8 м/год.

**Півобмежене тіло, плоский шар чи пластина?** Вибір залежить від величини виробу, його маси, а головне від співвідношення глибини проплавлення і товщини виробу, що зварюється. У практиці

розрахунків для вибору конфігурації тіл прийнято вважати справедливими наступні критерії співвідношення глибини провару  $h_{np}$  та товщини виробу  $b$ :

$h_{np}/b < 1/10$  – точкові джерела на поверхні масивних тіл;

$h_{np}/b = 1/10-2/3$  – точкові джерела на поверхні пластин;

$h_{np}/b > 2/3$  – лінійні джерела у пластинах.

**Точкове джерело теплоти чи лінійне?** У цьому випадку вибір простий – схеми лінійних джерел теплоти застосовуються тільки для пластин.

Необхідно вказати, що жодна з розглянутих схем не визначає точну температуру точки конкретного зварюваного виробу у певний, точно визначений час. Кількість виконаних при виведенні аналітичних рівнянь припущень і їх якість робить це неможливим. Розглянуті розрахункові схеми можуть претендувати лише на аналіз характеру розподілу температур у тілі, тобто дати відповідь на питання про відносну величину областей основного металу, які нагріваються до заданих температур за різних режимів зварювання та про характер розташування таких областей.

Для більш точних розрахунків необхідно розв'язувати диференціальне рівняння теплопровідності чисельними або іншими доступними методами зі застосуванням комп'ютерних технологій. При цьому також не вдається врахувати всі реальні обставини і особливості процесу передачі теплоти від джерела нагрівання до рідкого металу зварювальної ванни і далі в основний метал. Якщо спрощені схеми дають вірогідність відповідності розрахунків і практичних результатів біля 20–50 %, то найскладніші обчислення на найпотужніших комп'ютерах можуть підвищити вірогідність збігу результатів не точніше 10 %.

#### 11.10. Визначення температури зварювання

Одним з найпростіших методів вимірювання температури при зварюванні є застосування термофарб або термоолівців. Деякі термофарби змінюють колір безперервно (в діапазоні 400–700 К) і дозволяють спостерігати розташування ізотермічних ліній. Інші фарби різко змінюють свій колір за певної температури і зберігають його у подальшому. Існують фарби для діапазону температур 300–1800 К з одно-, дво-, три- і чотирикратною зміною кольору при різних тем-

пературах. Термоолівці виготовляють для діапазону 340–950 К з градацією 50–80 К. При нанесенні різними термоолівцями рисок, як крейдою, можна швидко визначити розподіл температур за зміною кольору, наприклад зеленого в коричневий, блакитного в бежевий тощо. З їх допомогою можна визначити розміри зони, нагрітої до певної температури, момент часу, за якого досягається задана температура. Цей метод зручний також для визначення температури підігріву перед зварюванням. Точність вимірювання складає декілька градусів. Детальні відомості про кольорові індикатори, основаних на різних хімічних і фізичних явищах, можна знайти в роботі [1].

Частіше для вимірювання температур при зварюванні використовують термопари в вигляді двох тонких (діаметром 0,1–0,4 мм) провідників з різних металів з'єднаних між собою на кінцях, наприклад, зварюванням. Один спай встановлюють у точку вимірювання, другий знаходиться при відомій постійній температурі. Чим вища різниця температур між спаями, тим більша термоелектро-рушійна сила (термо-е.р.с.). Діапазон температур широкий: від майже абсолютного нуля до температури плавлення найбільш тугоплавких металів. У діапазоні температур до 1900 К термопари є одним із найбільш надійних засобів вимірювання температури твердих металів. Параметри сплавів, що найбільш часто використовують у техніці для виготовлення термопар наведені у таблиці 11.3.

**Таблиця 11.3 – Характеристики матеріалів для виготовлення термопар**

Матеріал	Термо-е.р.с. відносно платини, мкВ/К	Гранична температура металу при вимірюваннях, К*	Температура плавлення матеріалу, К
Алюмель (95% Ni + 5% Al)	–(10,2–13,8)	1300/1550	1723
Залізо чисте	+18,0	900/1100	1800
Константан (60 % Cu + 40 % Ni)	–35/0	900/1100	1500–1550
Копель (56 % Cu + 44 % Ni)	–40,0	900/1100	1523
Молибден	+13,1	2300/2800	3270
Платинородій (90 % Pt + 10 % Rh)	+6/4	1600/1900	–
Хромель (90 % Ni + 10 % Cr)	+(27,1–31,3)	1300/1550	1723

**Примітка.** \*Чисельник при довготривалих, знаменник – короткочасних вимірюваннях.

До матеріалів, що використовуються для виготовлення штучних термопар, ставиться низка вимог: жаростійкість, жароміцність, хімічна стійкість, стабільність, відтворюваність, однозначність і лінійність градувальної характеристики. Серед них є обов'язкові та додаткові вимоги. До числа обов'язкових відносять стабільність градувальної характеристики та відтворюваність, а всі інші вимоги є додатковими.

Перевагу при застосуванні мають стандартні термопари, їх характеристики наведені у таблиці 11.4 [6].

**Таблиця 11.4 – Параметри стандартних термопар**

Тип термопари	Позначення нове (старе)	Робочий діапазон довготривалого режиму роботи, °С	Максимальна температура короткочасного режиму роботи, °С
Залізо-міднонікелеві	I	-200...+700	900
Хромель-копелева	(ХК)	-50...+600	800
Нікельхром-нікель алюмінієва (хромель-алюмелева)	К (ХА)	-200...+1000	1300
Нікельхром міднонікелева	Е	-100...+700	900
Платинородій (10 %)-платинова	S (ПП)	0...1300	1600
Платинородій (30 %)-платинородієва (6 %)	В (ПР)	300...1600	1800
Вольфрамрений (5 %)-вольфрамрениєва (20 %)	(ВР)	0...2200	2500

Якщо, наприклад, градувальна характеристика жароміцних матеріалів є відтворювана, однозначна і лінійна, має високий коефіцієнт перетворення, але ці параметри нестабільні, то користуватись такою термопарою неможливо. З іншої сторони, матеріали з низьким коефіцієнтом перетворення, нелінійною градувальною характеристикою, але за стабільних параметрів, використовують для термопар. Значні термо-е.р.с. мають термопари хромель-алюмелев, хромель-копелев, залізо-константан.

Термо-е.р.с. дещо змінюється за різних температур, тому термопари градуують, а шкалу приладів виконують нерівномірною, а при використанні в якості приладів показу гальванометрів, температуру розраховують за спеціальними таблицями.

Залізо-міднонікелеві термопари мають достатньо великий коефіцієнт перетворення (біля  $55 \text{ мкВ}/^\circ\text{C}$ ). Верхня межа вимірювання температури ( $900^\circ\text{C}$ ) обмежена окисненням заліза і міднонікелевого сплаву.

Хромель-копелеві термопари мають найбільший коефіцієнт перетворення зі всіх стандартних термопар (біля  $70\text{--}90 \text{ мкВ}/^\circ\text{C}$ ). Для термопар з діаметром дроту менше  $1 \text{ мм}$  верхня межа довготривалої температури менша  $600^\circ\text{C}$  і складає для термопар діаметром  $0,2\text{--}0,3 \text{ мм}$  лише  $400^\circ\text{C}$ . Верхня межа застосування визначається стабільністю характеристик копелевого дроту.

Нікельхром-нікельалюмінієві (тип К) термопари (раніше називались хромель-алюмелевими) застосовуються для вимірювання температури різних середовищ у широкому інтервалі температур. Термоелектрод з нікельалюмінієвого дроту менш стійкий до окиснення ніж нікельхромовий. Верхні границі застосування залежать від діаметра термоелектродів. Для термоелектродів діаметром  $3\text{--}5 \text{ мм}$  верхня границя тривалого використання нікельхром-алюмінієвих термопар складає  $1000^\circ\text{C}$ , а для діаметра  $0,2\text{--}0,3 \text{ мм}$  – не більше  $600^\circ\text{C}$ . Для нікельхром-міднонікелевої термопари верхня границя не перевищує  $700^\circ\text{C}$ .

Ці термопари, виготовлені із неблагородних матеріалів є стійкими до інертної і відновлювальної атмосфери, в окиснювальному середовищі – термін їх дії обмежений.

Окрім того, хромель-копелеві і нікельхром-нікельалюмінієві (хромель-алюмелеві) термопари мають достатньо високу стабільну градувальну характеристику за високої інтенсивності іонізуючих випромінювань.

У платинородій-платинових термопарах (тип S) позитивний термоелектрод являє собою сплав, що складається на  $10\%$  з родію і на  $90\%$  з платини, від'ємний термоелектрод – з чистої платини. Ці термопари забезпечують стабільність градувальної характеристики в окиснювальному і нейтральному середовищах. У відновному середовищі платинородій-платинові термопари застосовувати неможливо, оскільки відбувається суттєва зміна її термо-е.р.с. Також не-

гativement діє на платинородій-платинові термопари контакт з вуглецем, паром металів, сполуками вуглецю та кремнію.

У платинородій-платинородієвих термопарах (тип В) позитивний електрод – сплав з 30 % родію та 70 % платини, а від’ємний – з 6 % родію та 94 % платини. Ці термопари мають більшу стабільність градувальної характеристики, ніж платинородій-платинові, але вони погано працюють у відновному середовищі. Оскільки термо-е.р.с., яка виникає у платинородій-платинородієвих термопарах в інтервалі температур 0–100 °С незначна, при технічних вимірюваннях їх можна застосовувати без термостатування вільних кінців.

Вольфрамрений-вольфрамрениєві термопари призначені для вимірювання температур у вакуумі, а також у нейтральному і відновному середовищах. Позитивний термоелектрод – сплав з 95 % вольфраму та 5 % ренію, від’ємний – сплав з 80 % вольфраму і 20 % ренію.

Точність вимірювання залежить від щільності контакту спаю з металом, що забезпечує однакову температуру спаю і металу. Спаї або приварюють контактним зварюванням до металу, або зачеканюють у невеликий отвір діаметром 1,5–2,0 мм. При швидкій зміні температури металу температура в спаю може бути дещо іншою, тому доцільно застосовувати тонкі дроти. За допомогою термопар можна також виміряти температуру рідкого металу.

Границі допустимих відхилень заміряних значень термо-е.р.с. термопар від значень, що наводяться в таблицях визначають за виразом:

$$\Delta E = \pm [a + b(t - c)] \frac{dE}{dt}, \quad (11.41)$$

де  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – коефіцієнти, наведені у таблиці 11.5,  $\frac{dE}{dt}$  –

коефіцієнт перетворення термопар.

**Таблиця 11.5 – Коефіцієнти для визначення границь допустимих відхилень термо-е.р.с. термопар**

Тип термопар	Клас точності	Робочий діапазон, °С	$a$ , °С	$b \cdot 10^3$	$c$ , °С
Залізо-міднонікелева	–	–100...900	3	0 7,5	0 400
Хромель-	–	–50...800	2,5	0	0

копелева				6,0	300
Нікельхром- міднонікелева	–	–100...900	4	0 7,5	0 400
Нікельхром- нікельалюмінієва (хромель-алюмель)	–	–100...1300	4	0 7,5	0 400
Платинородій (10 %)- платинова	1	0...1600	1,5	0 2	0 300
	2	0...1600	3	0 5	0 600
Платинородій (30 %)- платинородієва (6%)	–	300...1800	3	0 5	0 600
Вольфрамрений (5 %)- вольфрамрениєва (20 %)			5	0	0
	–	0...25000	10	6,0 11,5	1000 1800

Допустимі відхилення в градусах, визначаються виразом у квадратних дужках рівняння (11.49). Наприклад, границя допустимих відхилень для термопар хромель-копель в інтервалі  $-50-300$  °C складає:

$$\Delta t = \pm [2,5 + 0(t - 0)] = \pm 2,5 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

В інтервалі  $300-800$  °C границя допустимих відхилень для тієї самої термопар залежить від значення температури, що вимірюється, наприклад, для  $t = 600$  °C границя допустимих відхилень:

$$\Delta t = \pm [2,5 + 6 \cdot 10^{-3}(600 - 300)] = \pm 4,3 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Крім стандартних термопар мають застосування в особливих умовах і нестандартні термопар, які або не відповідають вимогам відтворюваності або не мають достатньо стабільної градуовальної характеристики. До них відносять високотемпературні термопар:

- дисиліцид молібдену-дисиліцид вольфраму ( $\text{MoSi}_2\text{-Wsi}_2$ ) для вимірювання температур агресивних газових середовищ і деяких розплавів в інтервалі температур до  $1700$  °C;
- вуглець-борид цирконію ( $\text{C-ZrB}_2$ ) для вимірювання температур рідких металів до  $1800$  °C;
- вуглець-карбід титану ( $\text{C-TiC}$ ) для вимірювання неокислювальних газових середовищ до  $2500$  °C;
- карбід ніобія-карбід цирконія ( $\text{NbC-ZrC}$ ) для вимірювання в відновлювальному і інертному середовищу або в вакуумі до  $3000$  °C.

При температурі вище 1900 К термометри поступаються оптичним пірометрам. Радіаційний метод оснований на застосуванні фотоелектричного елемента, чутливого до теплового випромінювання досліджуваної зони. Вихідний сигнал елемента пропорційний інтенсивності випромінювання. За допомогою електронних підсилювачів він підсилюється і поступає у прилад реєстрації. Радіаційні пірометри розділяють на яскравісні, сумарного випромінювання та кольорові.

Найбільшу точність вимірювання нагрітих тіл має кольоровий пірометр, оскільки його покази не залежать від розмірів випромінювальної поверхні та оптики. Він має значно менші похибки в результаті того, що в більшості реальних тіл коефіцієнт випромінювальної здатності  $\epsilon$  не змінюється при зміні довжини хвилі. Такі тіла називаються “сірими”, і їх кольорова температура співпадає з дійсною. В якості характеристики випромінювання нечорного тіла поряд з коефіцієнтом теплового випромінювання використовується так звана чорна температура. Під нею розуміється така умовна температура, яку могло би мати задане тіло, якби його випромінювання було чорним. Кожне тіло може характеризуватись цілою низкою чорних температур залежно від виду випромінювальної поверхні. При співставленні густин потоків інтегрального випромінювання тіла з температурою  $T_\phi$  ( $q_\phi$ ) і абсолютно чорного тіла ( $q_0$ ), чорна температура називається радіаційною  $T_p$ . Використовуючи закон Стефана–Больцмана, можна встановити зв’язок між дійсною та радіаційною температурами:

$$T = T_p \sqrt[4]{\frac{1}{\epsilon}}. \quad (11.42)$$

Основна перевага пірометрів полягає в тому, що відсутній механічний контакт з поверхнею, де вимірюють температуру. Вони зручні як датчики зворотного зв’язку у випадку безперервного спостереження за зоною зварювання або ванною розплавленого металу.

#### Контрольні питання

1. Які схеми тіл, що нагріваються використовують при розрахунках теплових процесів зварювання?
2. Які є теплові характеристики джерел теплоти?
3. Що розуміють під поняттям термічний цикл?

4. Що називають ізохронами і ізотермами в плані при наплавленні валика на масивне тіло?
5. Наведіть формулу для розрахунку температури граничного стану процесу поширення теплоти від точкового джерела постійної потужності, що рухається з постійною швидкістю по верхній півнескінченної тіла.
6. Що розуміють під періодом теплонасичення і вирівнювання температури?
7. У чому суть метода фіктивних джерел і стоків теплоти для розрахунку температури в період вирівнювання?
8. Як розрахувати температуру граничного стану в нескінченній пластині без тепловіддачі?
9. Проаналізуйте вплив режиму зварювання і теплофізичних властивостей металу на температурне поле граничного стану.
10. У чому особливість розрахунків при нагріві потужними швидкорухомими точковим і лінійним джерелами теплоти?
11. Проаналізуйте вплив обмеженості розмірів тіла на процес поширення теплоти.
12. Як виконується розрахунок максимальних температур?
13. Які Ви знаєте експериментальні методи вимірювання температури при зварюванні?

#### Тестові завдання

**1. Вкажіть аналітичний вираз для визначення ефективної теплової потужності зварювальної дуги:**

а)  $q = \eta_e k UI$ ; б)  $q = \eta_e k - UI$ ; в)  $q = \eta_e + UI$ ; г)  $q = \frac{\eta_e k}{UI}$ .

**2. Період теплонасичення – це період процесу поширення теплоти . . . .**

- а) починаючи з моменту припинення дії джерела;
- б) до досягнення граничного стану;
- в) до досягнення граничного квазістаціонарного стану для рухомого джерела;
- г) починаючи з моменту припинення дії стока.

**3. Період вирівнювання температури – це період процесу поширення теплоти . . . .**

- а) починаючи з моменту припинення дії джерела;
- б) до досягнення граничного стану;

- в) до досягнення граничного квазістаціонарного стану для рухомого джерела;
- г) починаючи з моменту припинення дії стока.

**4. Термічний цикл – це ...**

- а) лінії температурного розподілення в визначеному поперечному перетині тіла в різні проміжки часу;
- б) зміна температури в часі заданих точок температурного поля, що утворюється при зварюванні;
- в) лінії постійної температури на поверхні тіла;
- г) лінії постійного питомого об'єму.

**5. Ізохрони – це ...**

- а) лінії температурного розподілення в визначеному поперечному перетині тіла в різні проміжки часу;
- б) зміна температури в часі заданих точок температурного поля, що утворюється при зварюванні;
- в) лінії постійної температури на поверхні тіла;
- г) лінії постійного питомого об'єму.

**6. Ізотерми – це ...**

- а) лінії температурного розподілення в визначеному поперечному перетині тіла в різні проміжки часу;
- б) зміна температури в часі заданих точок температурного поля, що утворюється при зварюванні;
- в) лінії постійної температури на поверхні тіла;
- г) лінії постійного питомого об'єму.

**7. Ізохори – це ...**

- а) лінії температурного розподілення в визначеному поперечному перетині тіла в різні проміжки часу;
- б) зміна температури в часі заданих точок температурного поля, що утворюється при зварюванні;
- в) лінії постійної температури на поверхні тіла;
- г) лінії постійного питомого об'єму.

**8. Збільшення швидкості зварювання при постійній потужності джерела веде до:**

- а) значного розвитку області нагрітого металу, ізотерми відповідних температур і по ширині і по довжині мають більші розміри;
- б) звуження ізотерм в напрямку, перпендикулярному до переміщення джерела і їх скороченню;
- в) звуження ізотерм в напрямку, паралельному до переміщення джерела і їх скороченню;
- г) значного розвитку області нагрітого металу, ізотерми відповідних температур і по ширині і по довжині мають менші розміри.

**9. Збільшення потужності джерела зварювання при постійній напрузі дуги веде до:**

- а) значного розвитку області нагрітого металу, ізотерми відповідних температур і по ширині і по довжині мають більші розміри;
- б) звуження ізотерм в напрямку, перпендикулярному до переміщення джерела і їх скороченню;
- в) звуження ізотерм в напрямку, паралельному до переміщення джерела і їх скороченню;
- г) значного розвитку області нагрітого металу, ізотерми відповідних температур і по ширині і по довжині мають менші розміри.

**10. Найбільш суттєвий вплив на теплове поле металу виявляє:**

- а) теплоємність;
- б) теплопровідність;
- в) тепловіддача;
- г) теплове випромінювання.

## НАГРІВ І ПЛАВЛЕННЯ МЕТАЛУ ПРИ ЗВАРЮВАННІ

- Нагрів і плавлення електрода
- Плавлення основного металу. Зварювальна ванна.  
Теплова ефективність процесу зварювання
- Термічний цикл зварювання та його характеристики
- Розрахунок максимальних температур
- Розрахунок миттєвої швидкості охолодження при заданій температурі
- Тривалість нагрівання металу вище заданої температури
- Ширина зони нагріву
- Особливості нагріву і охолодження металу для деяких видів зварювання

### 12.1. Нагрів і плавлення електрода

Нагрів електрода в процесі зварювання відбувається під дією двох джерел:

- теплою електричної дуги, що діє на прилягаючу до торця ділянку довжиною 5–10 мм.
- теплою, що виникає в об'ємі електродного стрижня як результат опору електрода при проходженні струму.

Оскільки нагрів електрода від дуги поширюється тільки на незначну довжину, то при аналізі процесу нагріву всього електрода вплив дуги можна не враховувати.

Визначимо окремо нагрів електрода від струму, що проходить через нього. Рівняння теплового балансу нагріву стрижня в результаті проходження через нього струму для одиниці довжини стрижня:

$$c\rho \frac{dt}{d\tau} F = \rho_r \gamma^2 F - \alpha(t - t_0)P, \quad (12.1)$$

де  $c\rho$ ,  $F$ ,  $\rho_r$  – об'ємна теплоємність, площа поперечного перерізу, питомий опір стрижня, відповідно;  $\gamma$  – щільність струму;  $\alpha$  – коефіцієнт тепловіддачі;  $t$  і  $t_0$  – температура нагрітої поверхні

стрижня і навколишнього середовища, відповідно;  $\Pi$  – периметр стрижня.

Перший член рівняння (12.1) характеризує накопичення теплоти стрижнем за одиницю часу, другий член – кількість теплоти, що виділяється при проходженні струму з питомим опором  $\rho_r$ , третій член – кількість теплоти, що віддається з поверхні стрижня периметром  $\Pi$  у навколишнє середовище. Розв’язок диференціального рівняння (12.1), якщо прийняти коефіцієнти  $c_p$ ,  $\rho_r$  і  $\alpha$  незалежними від температури, може виявитись неточним за зміни температури в широких межах.

Питомий опір металів зростає при збільшенні температури.

Залежність величини  $\frac{\rho_r}{c_p}$  від температури для більшості матеріалів

можна наближено описати лінійним співвідношенням:

$$\frac{\rho_r}{c_p} = \left( \frac{\rho_r}{c_p} \right)_0 (1 + \beta t), \quad (12.2)$$

де  $(\rho_r / c_p)_0$  – величина периметру при  $t = 0$  °С.

Для тонких стрижнів, якими є зварювальні електроди, вплив тепловіддачі на нагрів стрижня є досить суттєвим.

Коефіцієнт  $\alpha / c_p$  необхідно приймати змінним і залежним від температури:

$$\frac{\alpha}{c_p} = \left( \frac{\alpha}{c_p} \right)_0 (1 + \beta t). \quad (12.3)$$

Підставивши рівняння (12.3) та (12.2) в диференціальне рівняння (12.1), знаходимо його розв’язок:

$$\frac{1 + \beta t}{\omega_0 + b_0 (t_0 - t)} = \frac{1 + \beta t_0}{\omega_0} e^{[\beta \omega_0 + b_0 (1 + \beta t_0)] \tau}, \quad (12.4)$$

де  $\omega_0 = \gamma^2 \left( \frac{\rho_r}{c_p} \right)_0$  – початкова швидкість нагріву;  $b_0 = \frac{\Pi}{F} \left( \frac{\alpha}{c_p} \right)_0$  –

початковий коефіцієнт температуровіддачі для стрижня.

Точність визначення температури за рівнянням (12.4) залежить від вибору постійних коефіцієнтів, що визначаються дослідним шляхом. Для електродів з покриттям, величина  $c_p$  у рівнянні (12.4)

характеризує середню теплоємність стержня і покриття, периметр  $\Pi = \pi d_3$ , де  $d_3$  – зовнішній діаметр електрода з покриттям, поперечний переріз  $F = \frac{\pi d_1^2}{4}$ , де  $d_1$  – діаметр електрода без врахування покриття.

Розрахунки за формулою 12.4 спрощуються при використанні номограми (рис. 12.1).

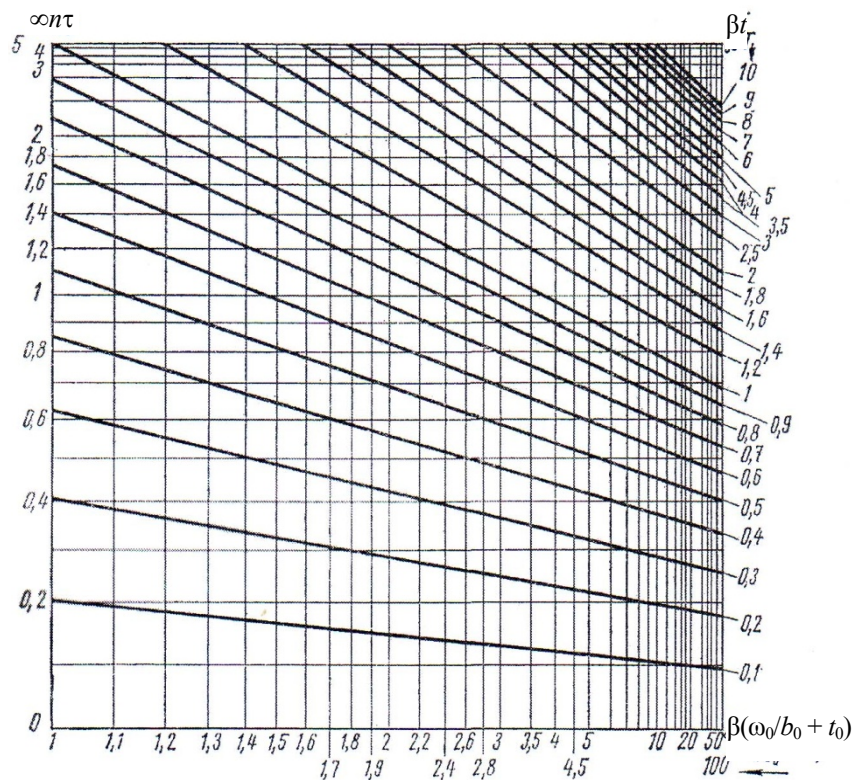


Рис. 12.1 – Номограма для розрахунку процесу нагріву струмом електрода з маловуглецевого сталюго дроту [29]

На номограмі прийнято умовне позначення:

$$n = \beta \omega_0 + b_0(1 + \beta t_0). \quad (12.5)$$

Чисельні значення коефіцієнтів при розрахунку температури електродів рекомендується вибирати з таблиці 12.1.

Таблиця 12.1 – Значення коефіцієнтів при розрахунку нагріву стрижнів

Тип електрода		Струм	$\beta, \cdot 10^{-3},$ град. <sup>-1</sup>	$\omega_0, \cdot 10^{-2} \cdot \gamma^2,$ град./с	$b_0, \cdot 10^{-2}/d_1,$ 1/град.
Дріт	Покриття				
Маловуглецева сталь	Крейдяне	Постійний	4,17	0,31	1,17
		Змінний	3,33	3,70	1,40
	ОММ-5 і УОНІ-13	Постійний	5,00	2,40	0,96
		Змінний	4,17	2,70	0,08

У цій таблиці  $\gamma = \frac{4I}{\pi d_1^2}$ , А/мм<sup>2</sup> та  $d_1$  наведені в міліметрах.

Розрахунки і експериментальні дані показують, що швидкість нагріву електрода суттєво залежить від питомого опору матеріалу стрижня. Стрижні з аустенітної сталі за температур до 600 °С мають значно більший  $\rho_r$ , ніж стрижні з маловуглецевої сталі. Тому аустенітні стрижні нагріваються значно швидше ніж маловуглецеві, однак швидкість зростання температури за підвищених її значень в них сповільнюється, оскільки  $\rho_r$  зростає повільніше, ніж тепловіддача в навколишнє середовище. Маловуглецеві стрижні нагріваються повільніше аустенітних, але швидкість їх нагріву безперервно зростає в результаті значного зростання  $\rho_r$ . Чим вища щільність струму, що протікає через електрод, тим вища температура нагріву. Тонкі електроди в результаті підвищеної тепловіддачі нагріваються повільніше, ніж товсті, якщо щільність струму однакова.

Крім нагріву струмом, електрод також нагрівається іншим джерелом теплоти – дугою. Розрахункову схему процесу нагріву електрода дугою можна представити таким чином: тіло – напівнескінченний стрижень, джерело теплоти – плоске, постійно діюче, рухоме, із переміщенням зі швидкістю плавлення електрода  $\omega_e$ .

Використовуючи рівняння граничного стану процесу поширення теплоти від рухомого плоского джерела в стрижні для області попереду джерела, коли  $x > 0$  та  $b = 0$ , отримаємо наступний розподіл температур у стрижні:

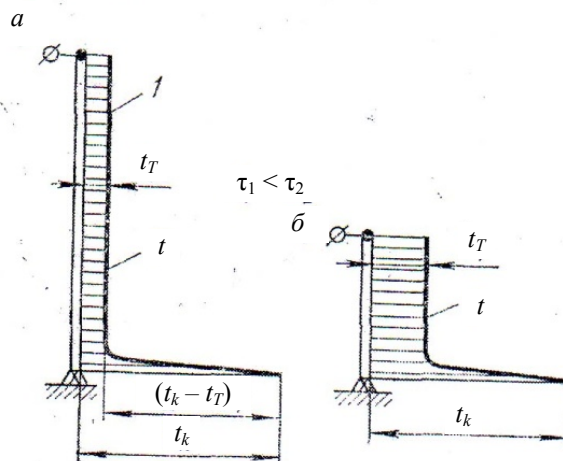
$$t - t_T = (t_k - t_T) \cdot e^{-\frac{\omega_e x}{a_T}}, \quad (12.6)$$

де  $x$  – відстань від торця електрода до заданої точки, см;  $t$  – температура цієї точки електрода, °С;  $t_T$  – температура підігріву електродного стрижня струмом, °С;  $t_k$  – температура торця електрода, що нагрівається дугою, і яка умовно вважається рівною середній

температурі крапель металу (для сталі  $t_k = 2300\text{--}2500\text{ }^\circ\text{C}$ );  $\omega_e$  – швидкість плавлення електрода, см/с.

У рівнянні (12.6) замість потужності  $q$  задана температура торця  $t_k$ , від якої віднімається температура підігріву струмом  $t_T$ .

Графіки розподілу температур довжиною електрода представлені на рис. 12.2.



**Рис. 12.2 – Розподіл температури вздовж довжини електрода при ручному зварюванні залежно від тривалості нагріву: а – мала; б – значна**

Як видно з рис. 12.2, дуга нагріває лише область біля самого кінця електрода, оскільки в результаті значної швидкості плавлення тепло не встигає поширитись по стрижню.

При автоматичному дуговому зварюванні дріт нагрівається також двома джерелами теплоти – струмом і дугою (рис. 12.3).

Особливістю автоматичного зварювання порівняно з ручним є те, що при автоматичному зварюванні струм підводиться з допомогою ковзного контакту на невеликій відстані від дуги, тобто струм не проходить по всій довжині стрижня, як при ручному зварюванні електродами. У результаті зменшується вплив попереднього підігріву стержня, що в свою чергу дає можливість значно підвищити щільність струму. При цьому продуктивність розплавлення електродного дроту зростає у кілька разів.

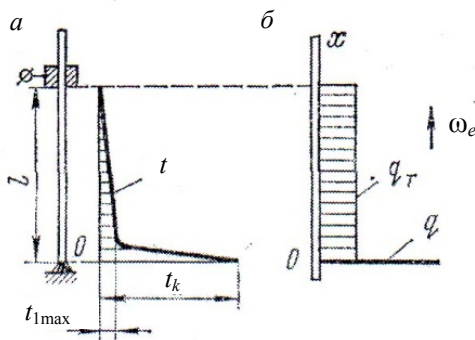


Рис. 12.3 – Нагрів електрода при автоматичному дуговому зварюванні:  
 а – розподіл температур; б – схема руху джерела теплоти

Довжина ділянки електрода, що нагрівається залишається постійною і рівна довжині від ковзного контакту до дуги  $l$  (довжина виносу). Схему нагріву електродного дроту можна представити двома рухомими джерелами теплоти, розподіленими  $q_T$  і зосередженими  $q$  (рис. 12.3, б). Причому температура в точці  $O$  дорівнює температурі крапель металу  $t_k$ . Швидкість подачі електродного дроту настільки значна, що теплота від розподіленого джерела  $q_T$  майже не встигає поширитись в напрямі  $x$ , що співпадає з  $l$ , і температура від нагріву струмом може бути представлена як лінійна залежність:

$$t_T = t_{T \max} \left( \frac{l-x}{l} \right). \quad (12.7)$$

Визначення величини  $t_{T \max}$  можна виконати за рівнянням (12.2) або з допомогою номограми (див. рис. 12.1). Час нагріву приймаємо рівним  $\tau = l/\omega_e$ , де  $\omega_e$  – швидкість подачі електродного дроту. Температуру від підігріву дугою визначаємо аналогічно рівняння (12.6):

$$t_D = t - t_T = (t_k - t_{T \max}) e^{-\frac{\omega_e x}{a_T}}. \quad (12.8)$$

**Плавлення електрода.** Плавлення електродів при дугових способах зварювання здійснюється шляхом нагріву металу дугою від температури  $t_T$  до температури крапель  $t_k$ . Тепловий вміст металу при цьому зростає від  $h_T$  до  $h_k$ . Прирівнюючи кількість теплоти, що вводиться дугою, до кількості теплоти, яка визначається через тепловий вміст металу, отримаємо рівняння процесу розплавлення електрода:

$$\eta_e UI = \omega_3 F \rho (h_k - h_T), \quad (12.9)$$

де  $\eta_e$  – ефективний коефіцієнт корисної дії процесу нагріву електрода дугою.

Миттєва продуктивність розплавлення електрода:  $g = \omega_3 \cdot F \cdot \rho$  (г/с) за постійних  $\eta_e$  і  $U$  залежить від температури підігріву струмом і величини струму:

$$g_p = \frac{\eta_e UI}{h_k - h_T} = \frac{\eta_e UI}{c(t_k - t_T)}, \quad (12.10)$$

де  $c$  – масова теплоємність.

Якщо електрод не нагрівається струмом в значній мірі, то продуктивність розплавлення наближено пропорційна струму. Для характеристики процесу розплавлення електрода використовують коефіцієнт розплавлення:

$$\alpha_p = \frac{g_p}{I}, \text{ г/А} \cdot \text{с} = 3600 \frac{g_p}{I}, \text{ г/А} \cdot \text{год}. \quad (12.11)$$

При ручному дуговому зварюванні  $\alpha_p = 5-14$  г/А·год., автоматичному зварюванні під флюсом –  $\alpha_p = 13-23$  г/А·год.

При ручному дуговому зварюванні коефіцієнт розплавлення і продуктивність розплавлення зростають в кінці розплавлення електрода як результат нагріву його струмом.

Нерівномірність плавлення електрода за правильно вибраних режимів зварювання не перевищує 20–30 %. Щоб не відбувалось значного нагріву електродів струмом, обмежують довжину електродів (для маловуглецевих сталей приймають 450 мм і аустенітних – 400 мм) та величину струму.

Величина допустимого струму залежить від складу покриття електрода. Для органічних покриттів вона значно менша, ніж для мінеральних.

При безперервній подачі електродного дроту з постійним виносом швидкість плавлення дроту визначається струмом і величиною виносу. З збільшенням виносу за інших рівних умов зростає продуктивність розплавлення електрода. Величину виносу вибирають в межах 30–50 мм. Визначення продуктивності розплавлення відбувається дослідним шляхом.

### 12.2. Плавлення основного металу. Зварювальна ванна. Теплова ефективність процесу зварювання

Плавлення основного металу при зварюванні здійснюється з метою з'єднання між собою деталей. Зварні з'єднання в основному можна розділити на дві групи:

- у яких деталі зварюються без присадкового металу;
- для здійснення яких необхідний присадковий метал.

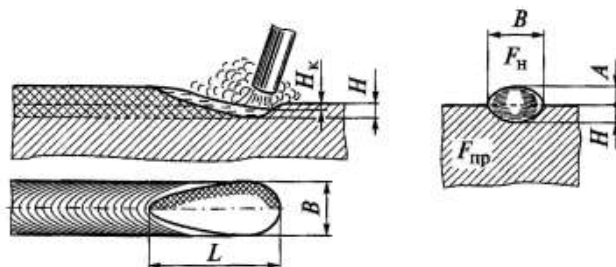
В обох випадках необхідно проплавити основний метал на деяку глибину. Якщо не ставиться спеціальна задача отримати певний хімічний склад металу шва, то досить здійснити розплавлення основного металу на мінімальну глибину в декілька десятих часток міліметра. Однак для запобігання несплавлень, глибину проплавлення збільшують іноді до значних розмірів. Залежно від форми зварного з'єднання до джерела теплоти можуть бути пред'явлені різні вимоги по відношенню до конфігурації зони проплавлення.

Ідеальним є таке тепловиділення у джерелі і таке розплавлення основного металу, яке забезпечувало би його рівномірну глибину проплавлення в усіх точках з'єднаних поверхонь. Можливості регулювання процесу і форми проплавлення основного металу обмежені. Високий ступінь регулювання мають процеси зварювання за допомогою електронного променя, менший ступінь – газозварювання. Найбільш поширене джерело енергії при зварюванні – електрична дуга має відносно невеликі можливості для регулювання розподілу теплоти. Характеристики джерела теплоти в значній мірі визначають форму розплавлення основного металу.

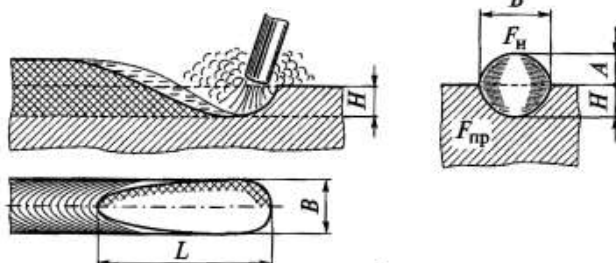
**Зварювальна ванна.** У процесі горіння і переміщення дуги під нею утворюється рідка зварювальна ванна. Основний метал розплавлюється в передній частині ванни і відкидається до її задньої частини.

За формою зварювальної ванни можна говорити про форму ізотермічної поверхні, що відповідає температурі плавлення основного металу  $t_{пл}$ . Контур ванни на поверхні виробу являє собою ізотерму  $t_{пл}$ . Параметрами ванни є її довжина –  $L$ , ширина –  $B$ , глибина –  $H$ , глибина кратера –  $H_k$  (рис. 12.4).

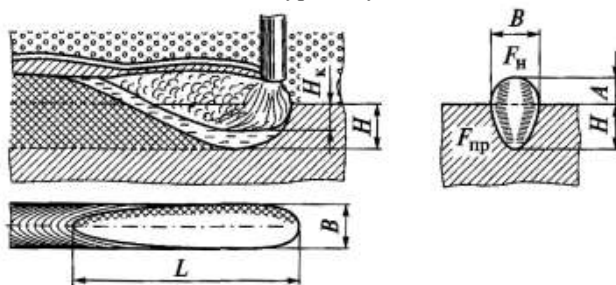
Величина і співвідношення цих параметрів залежить від багатьох причин: режиму зварювання, складу атмосфери дуги, складу і властивостей основного металу, від розташування шва в просторі тощо.



а – поверхнева дуга



б – занурена дуга



в – дуга під флюсом

#### 12.4 – Форми зварювальної ванни для дугового зварювання

За формою ванни, утвореної в нижньому положенні розрізняють такі види зварювальної дуги:

а) поверхнева – кратер неглибокий, під плямою дуги – значний шар рідкого металу;

б) занурена – кратер глибокий, рідкий метал відтіснений до заднього кінця ванни, дуга занурена в основний метал, ефективно оплавляє передню кромку ванни і оголене дно;

в) під флюсом.

*Довжину ванни розплавленого металу* простіше всього визначити з рівнянь, що зв'язують між собою температуру, час і координати точок тіла. Наприклад, при наплавленні валика на масивне тіло потужною швидкорухомою дугою температурне поле описується рівнянням:

$$t_{(r,\tau)} = \frac{q_e}{2\pi\lambda\tau\omega_3} e^{-\frac{r}{4a_T\tau}}, \quad (12.12)$$

де  $r^2 = y^2 + z^2$ .

Оскільки нас цікавить максимальна довжина ванни на поверхні виробу покладемо  $r = 0$ . Тоді:

$$t_{(0,\tau)} = \frac{q_e}{2\pi\lambda\tau\omega_3}. \quad (12.13)$$

Визначимо час перебування в рідкому стані кожного елемента, що лежить на осі  $x$ , тобто  $\tau_e$  – час проходження дуги по довжині ванни. Оскільки в точках по довжині ванни  $t = t_{nl}$ , то підставивши значення температури в попереднє рівняння, отримаємо:

$$t_{nl} = \frac{q_e}{2\pi\lambda\tau_e\omega_3}, \quad (12.14)$$

звідки:

$$\tau_e = \frac{q_e}{2\pi\lambda\omega_3 t_{nl}}, \quad (12.15)$$

або виконавши:

$$P_1 = \frac{1}{2\pi\lambda t_{nl}}. \quad (12.16)$$

Остаточно будемо мати:

$$\tau_e = P_1 \frac{q_e}{\omega_3}. \quad (12.17)$$

Час перебування у рідкому стані кожного елемента, що лежить на осі шва, пропорційний погонній енергії. Знаючи  $\tau_e$  і швидкість зварювання  $\omega_3$ , знайдемо довжину ванни  $L$ :

$$L = \omega_3 \tau_e = \frac{q_e \omega_3}{2\pi\lambda t_{nl} \omega_3} = \frac{q_e}{2\pi\lambda t_{nl}}. \quad (12.18)$$

З формули (12.18) видно, що довжина зварювальної ванни при наплавленні валика на масивне тіло пропорційна потужності дуги, обернено пропорційна коефіцієнту теплопровідності металу  $\lambda$  і температурі плавлення металу  $t_{пл}$ . Крім того, довжина ванни не залежить від швидкості зварювання. Така сама залежність зберігається і для наплавлення валиків на сталеві листи.

**Теплова ефективність процесу проплавлення.** Зварювальний шов, або наплавлений валик, являє собою сплав основного і електродного металу. Співвідношення цих металів може характеризуватись площами наплавлення  $F_n$  та  $F_{np}$  (рис. 12.5).

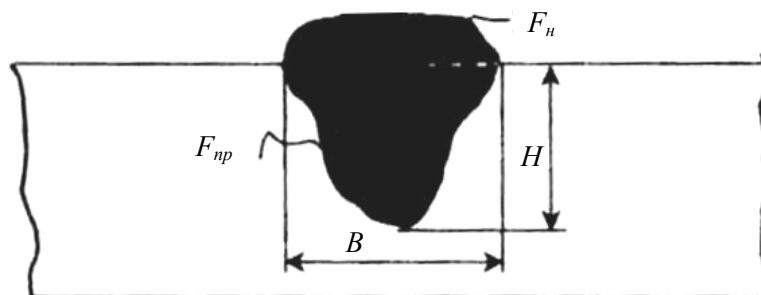


Рис. 12.5 – Геометричні параметри перерізу зварювального шва

Зона розплавлення основного металу оцінюється трьома показниками:

- відносною глибиною проплавлення  $H/B$ ;
- коефіцієнтом повноти  $F_{np}/HB$ ;
- коефіцієнтом площин  $F_{np}/F_n$  (характеризує частку участі основного металу в утворенні шва).

На проплавлення основного металу витрачається тільки частина всієї теплоти дуги. Теплоту, затрачену дугою на проплавлення основного металу за одиницю часу  $q_{II}$ , або теплову потужність, затрачену нею на проплавлення, можна розрахувати, якщо відомий об'єм металу, що проплавляється за одиницю часу  $V = F_{np} \cdot \omega_z$ , його густина  $\rho$  і тепловміст, який відповідає температурі плавлення металу  $h_{пл}$ . Тоді:

$$q_{II} = F_{II} \omega_z \cdot h_{пл} \cdot \rho, \quad (12.19)$$

де  $F_{II}$  – площа проплавлення основного металу,  $m^2$ ;  $\omega_z$  – швидкість зварювання,  $m/s$ ;  $h_{пл}$  – тепловміст розплавленого металу

зварювальної ванни, тобто загальна кількість теплоти, що міститься в тілі (наприклад в одиниці його маси) при температурі плавлення, Дж/кг;  $\rho$  – густина, кг/м<sup>3</sup>.

Відношення теплової потужності, затраченої на проплавлення до повної теплової потужності дуги, називають повним тепловим коефіцієнтом корисної дії  $\eta_n$ :

$$\eta_n = \frac{q_{II}}{q_D} = \frac{F_n \rho \omega_s h_{пл}}{UI}. \quad (12.20)$$

Процес розплавлення основного металу можна розділити на дві стадії:

а) нагрів основного металу за рахунок теплоти дуги. При цьому в метал проходить не вся теплота дуги, а лише та її частина, котру оцінюють ефективним к.к.д.  $\eta_e$ ;

б) на проплавлення основного металу витрачається не вся теплота, що передана дугою металу, а лише її частина, яку оцінюють термічним к.к.д.:

$$\eta_t = \frac{q_{II}}{q_e}. \quad (12.21)$$

Очевидно, повний тепловий к.к.д. дорівнює добутку ефективного і термічного коефіцієнтів корисної дії:

$$\eta_{II} = \frac{q_e}{q_D} \cdot \frac{q_{II}}{q_e}; \quad \eta_{II} = \eta_e \eta_t. \quad (12.22)$$

**Термічний к.к.д. процесу проплавлення.** Ця характеристика процесу проплавлення залежить від цілого ряду факторів: потужності джерела теплоти, швидкості зварювання, заглиблення дуги, розмірів виробу. Величину термічного к.к.д. в окремих випадках наплавлення або зварювання визначають розрахунковим шляхом.

Так, наприклад, при наплавленні валика на масивний виріб потужною швидкорухомою дугою максимальну температуру нагріву можна знайти з виразу:

$$t_{\max}(r_x) = \frac{0,368 q_e}{\frac{\pi r_x^2}{2} \cdot \omega_s c_p}, \quad (12.23)$$

де  $\frac{\pi r_x^2}{2} \cdot \omega_3$  – об'єм металу, що нагрівається за 1 с, напівциліндричної форми, обмежений ізотермічною поверхнею з температурою  $t_{\max}$  і площиною на яку наплавляється валик (рис. 12.6).

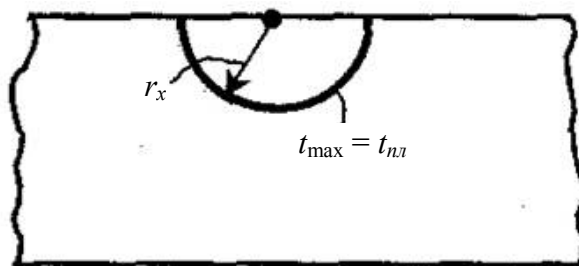


Рис. 12.6 – Схема до виведення термічного к.к.д. процесу проплавлення

Цей об'єм нагрітий вище температури  $t_{\max}(r_x)$ . Об'єм проплавленого дугою металу також представляє собою напівциліндр, обмежений ізотермічною поверхнею, але тільки з температурою плавлення  $t_{пл}$ .

Оскільки рівняння для визначення  $t_{\max}(r_x)$  дійсно для довільного значення  $r_x$  ми маємо право підставити замість  $r_x$  глибину проплавлення  $H$ ; при цьому  $t_{\max}(H)$  буде дорівнювати  $t_{пл}$  і тоді отримаємо:

$$\frac{\pi H^2}{2} \cdot \omega_3 \cdot c_p \cdot t_{пл} = 0,368 q_e. \quad (12.24)$$

У лівій частині рівності виявилась кількість теплоти, що необхідна для проплавлення основного металу за одиницю часу – теплова потужність  $q_n$ . Таким чином,

$$q_n = 0,368 q_e \quad (12.25)$$

і

$$\eta_t = \frac{q_n}{q_e} = 0,368. \quad (12.26)$$

Аналогічно можна виконати теоретичний розрахунок к.к.д. проплавлення для випадку однопрохідного зварювання пластин у стик потужною швидкорухомою дугою (рис. 12.7).

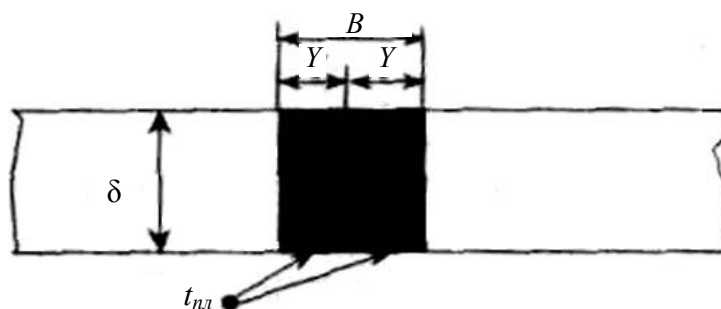


Рис. 12.7 – Схема до виведення термічного к.к.д. процесу плавлення

Для цього скористаємось рівнянням:

$$t_{\max}(y) = \frac{0,484q_e}{\omega_3 \rho \delta 2 \gamma c} \left( 1 - \frac{by^2}{2a_T} \right)$$

і припустивши що тепловіддача з поверхні відсутня, тобто  $b = 0$ , отримаємо:

$$t_{\max}(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi e}} \cdot \frac{q_e}{\omega_3 \rho \delta 2 \gamma c}. \quad (12.27)$$

Підставивши в це рівняння  $B = 2y$  і  $t_{\max}(y) = t_{пл}$  будемо мати:

$$q_{\Pi} = \omega_3 \delta B c \rho t_{пл} = q_e \sqrt{\frac{2}{\pi e}}; \quad (12.28)$$

$$\eta_t = \frac{q_{\Pi}}{q_e} = \frac{\omega_3 \delta B c \rho t_{пл}}{q_e} = \sqrt{\frac{2}{\pi e}} = 0,484. \quad (12.29)$$

Значення  $\eta_t$  відповідають прийнятій нами розрахунковій схемі для швидкорухомої дуги, згідно якої теплота поширюється тільки перпендикулярно до осі шва. Оскільки не враховувались втрати теплоти в результаті теплопровідності поздовж шва і тепловіддачу з поверхні, визначені значення є максимальними. При менших швидкостях руху дуги значення  $\eta_t$  будуть нижчі.

Для визначення  $\eta_t$  при зварюванні і наплавленні дугою, що рухається з довільною швидкістю, користуються номограмами (рис. 12.8, 12.9).

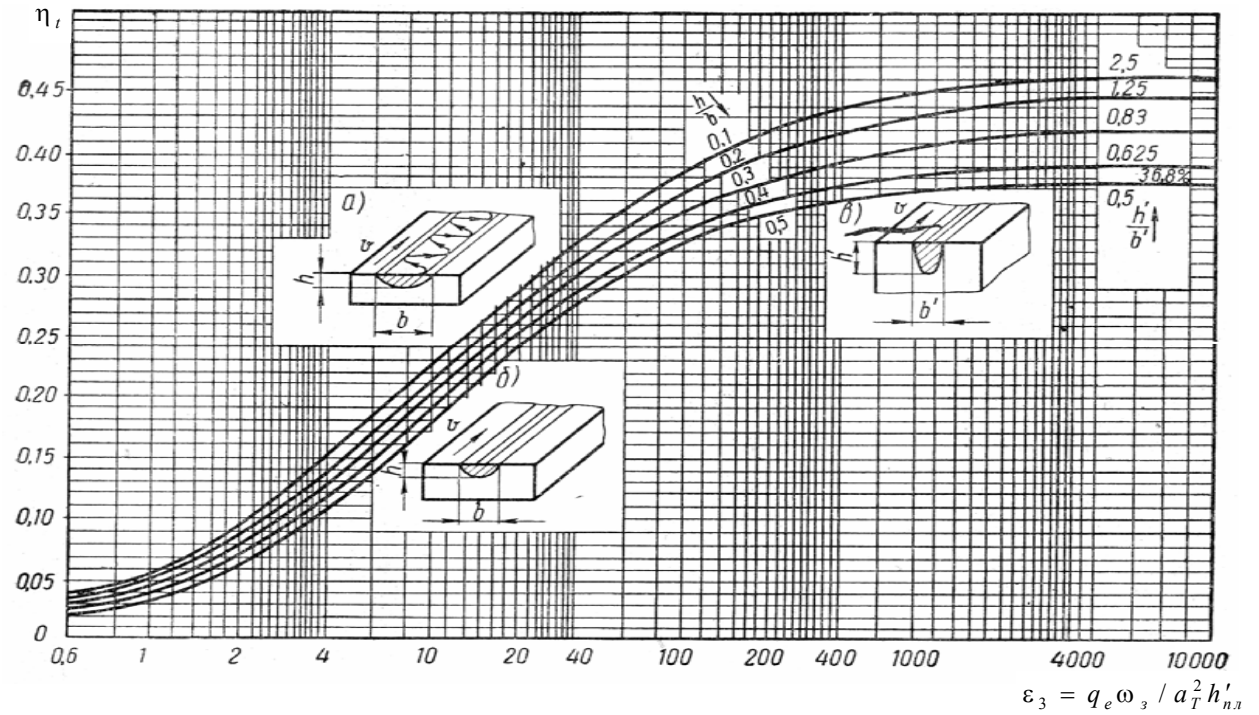
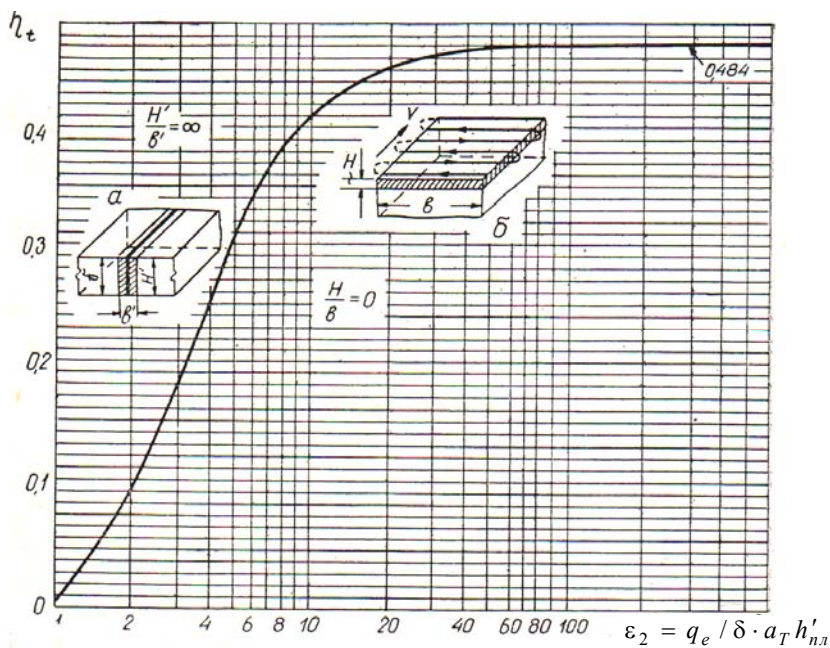


Рис. 12.8 – Номограма для визначення термічного к.к.д. при наплавленні валика на масивне тіло ( $H/B = 0,1-2,5$ ) і розширеній (а) зоні проплавлення ( $H/B < 0,5$ ), півкруглій (б) зоні ( $H/B = 0,5$ ) і заглибленій (в) зоні ( $H/B > 0,5$ ) [22]



**Рис. 12.9 – Номограма для визначення термічного к.к.д. при зварюванні тонких листів у стик ( $H/B = 0,1-2,5$ ) [22]**

При наплавленні валика на масивне тіло користуються залежністю  $\eta_t = \varphi(\varepsilon_3)$ , де

$$\varepsilon_3 = \frac{q_e \cdot \omega_3}{a_T^2 \cdot h_{nl}} \quad (12.30)$$

Для маловуглецевої сталі можна прийняти  $a_T = 0,08 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$ ;  $h_{nl} = 10 \text{ Мдж/м}^3$ . При зварюванні тонких листів в стик для маловуглецевої сталі використовують залежність  $\eta_t = \varphi(\varepsilon_2)$ , де

$$\varepsilon_2 = \frac{q_e}{\delta \cdot a_T \cdot h_{nl}}, \quad (12.31)$$

тут  $\delta$  – товщина пластини в см.

Номограми враховують відносну глибину проплавлення  $H/B$ , яка змінюється від 0,1 до 2,5. Термічний к.к.д. можна визначити за відомими практичними даними: площею проплавлення, швидкістю зварювання, ефективною тепловою потужністю:

$$\eta_t = \frac{F \cdot \omega_3 \cdot c \cdot \rho \cdot t_{nl}}{q_e} \quad (12.32)$$

### 12.3. Термічний цикл зварювання та його характеристики

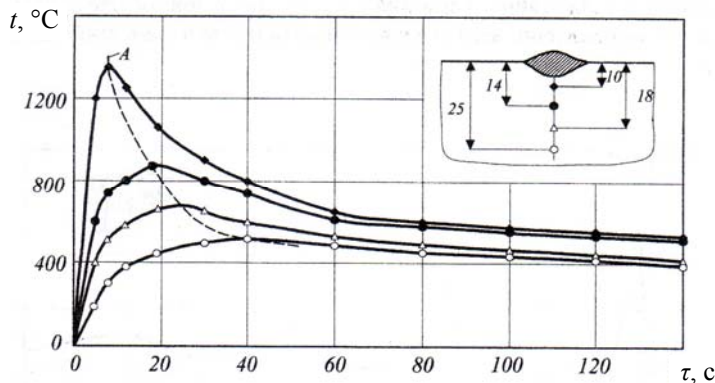
Термічний цикл зварювання – це зміна температури від початку нагрівання при зварюванні до повного охолодження, тобто часова зміна температури в заданій точці зварювання.

У результаті теплової дії дуги метал виробу піддається нагріву і охолодженню. При цьому ділянки виробу нагріваються до температур, за яких в металі відбуваються зміни структури і властивостей. Ця зона називається зоною термічного впливу (ЗТВ) зварювання. За межами ЗТВ метал нагрівається до менших температур, а в ще більш віддалених ділянках температура металу залишається незмінною протягом усього процесу зварювання.

Для оцінки впливу зварювання на властивості зварного з'єднання важливо встановити характер термічних циклів точок металу виробу і вплив цих циклів на структуру і властивості металу.

Розміри ЗТВ залежать від ступеня зосередженості або розподіленості зварювальних джерел та їх потужності, а також від складу зварюваного металу та його вихідного стану перед зварюванням.

Характер експериментально визначених термічних циклів на різних глибинах масивної сталюї плити при наплавленні валика на її поверхні електродуговим способом наведено на рис. 12.10 [4].



**Рис. 12.10 – Діаграми термічного циклу на різних відстанях від лінії наплавлення на поверхні сталюї плити: (A – лінія максимальних температур)**

Умови нагрівання, зокрема зони біля шва, при зварюванні плавленням, суттєво відрізняються від умов термічного оброблення.

Швидкість нагрівання металу при зварюванні в десятки і сотні разів вища ніж при пічному термічному обробленні. Кінцеві властивості зварного з'єднання значною мірою визначаються швидкістю охолодження металу. Забезпечення оптимальних властивостей ЗТВ, а отже і зварного з'єднання в цілому досягається дослідженням реакції металу на термічний цикл зварювання, на основі якого вибирається спосіб та режими зварювання.

Основними параметрами термічного циклу є: максимальна температура нагрівання; швидкість охолодження; тривалість перебування металу вище заданої температури.

Розглянемо метод розрахунку основних параметрів термічного циклу.

#### 12.4. Розрахунок максимальних температур

Максимальні значення температур визначаємо прирівнюючи перші похідні рівнянь процесів поширення теплоти рівними нулю. Записуємо основну розрахункову формулу і логарифмуємо її:

$$t_{(r,\tau)} = \frac{q_e}{2\pi\lambda\tau\omega_s} e^{-\frac{r^2}{4a_T\tau}}; \quad (12.33)$$

$$\ln t_{(r,\tau)} = \ln \left[ \frac{q_e}{2\pi\lambda\omega_s} \right] - \ln \tau - \frac{r^2}{4a_T\tau}. \quad (12.34)$$

Після диференціювання, враховуючи що перший член правої частини рівняння в логарифмічному вигляді не залежить від часу, отримуємо:

$$\frac{1}{t} \frac{\partial t_{(r,\tau)}}{\partial \tau} = -\frac{1}{\tau} + \frac{r^2}{4a_T\tau^2} = \frac{t}{\tau} \left( \frac{r^2}{4a_T\tau^2} - 1 \right). \quad (12.35)$$

Звідси швидкість зміни температури:

$$\frac{\partial t_{(\tau)}}{\partial \tau} = \frac{t}{\tau} \left( \frac{r^2}{4a_T\tau} - 1 \right). \quad (12.36)$$

Випадки, коли  $t = 0$  або  $\tau = \infty$ , що перетворюють праву частину похідної  $\frac{\partial t_{(\tau)}}{\partial \tau}$  в нуль, інтересу не представляють (вони відповідають кінцевому стану процесу, коли температура повністю вирівнялась і рівна нулю). Тоді залишається випадок  $\frac{r^2}{4a_T \tau} - 1 = 0$ , який і відповідає моменту  $\tau_{\max}$ , коли ізотерма досягає своєї максимальної величини. Звідси

$$\tau_{\max} = \frac{r^2}{4a_T} \text{ або } r^2 = -\frac{4a_T}{\omega_3} \cdot x_{\max}, \quad (12.37)$$

оскільки  $\omega_3 \tau_{\max} = x_{\max}$ .

Максимальна температура в точці, що визначається радіусом  $r$ , очевидно рівна температурі в момент  $\tau_{\max}$ .

Підставивши значення  $\tau = \tau_{\max}$  в формулу (12.35) отримаємо:

$$t_{\max(r, \tau_{\max})} = \frac{q_e 4a_T}{2\pi\lambda\omega_3 r^2} e^{-1} \text{ і, замінивши } a_T = \frac{\lambda}{c\rho} \text{ та } e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,368,$$

отримаємо вираз:

$$t_{\max(r)} = \frac{0,368q_e}{\frac{\pi}{2}\omega_3 c\rho r^2}. \quad (12.38)$$

Для випадку нагріву нескінченної пластини швидкорухомим джерелом теплоти виконуємо аналогічні операції.

Логарифмуємо основну розрахункову формулу (11.23):

$$\ln t_{(\tau)} = \ln \left( \frac{q_e}{\omega_3 \delta \sqrt{4\pi\lambda c\rho}} \right) - \frac{1}{2} \ln \tau - \frac{y_0^2}{4a_T \tau} - b\tau. \quad (12.39)$$

Диференціюємо почленно по  $\tau$  (перший член постійний і від  $\tau$  не залежить), після чого отримаємо:

$$\frac{1}{t} \cdot \frac{\partial t_{(\tau)}}{\partial \tau} = -\frac{1}{2\tau} + \frac{y_0^2}{4a_T \tau^2} - b, \quad (12.40)$$

Для знаходження максимального часу ( $\tau = \tau_{\max}$ ) прирівняємо похідну нулю:

$$\frac{\partial t(\tau)}{\partial \tau} = t \left( -\frac{1}{2\tau_{\max}} + \frac{y_0^2}{4a_T \tau_{\max}^2} - b \right) = 0. \quad (12.41)$$

Швидкість зміни температури дорівнює нулю за таких умов:

а) при  $t = 0$ ;

б) при  $\tau = \infty$  (за повного вирівнювання);

в) при  $-\frac{1}{2\tau_{\max}} + \frac{y_0^2}{4a_T \tau_{\max}^2} - b = 0$ , тобто для

$$-\frac{y_0^2}{4a_T \tau_{\max}^2} = -\frac{1}{2\tau_{\max}} - b \quad \text{або} \quad \frac{y_0^2}{4a_T \tau_{\max}} = \frac{1}{2} + b\tau_{\max}. \quad (12.42)$$

Перші два випадки не представляють інтересу.

Підставивши отриманий час  $\tau_{\max}$  у рівняння:

$$t_{(y_0, \tau)} = \frac{q_e}{\omega_3 \sqrt{4\pi\lambda c\rho\tau}} e^{-\frac{y_0^2}{4a_T\tau} + b\tau}, \quad (12.43)$$

і врахувавши, що  $b\tau_{\max} < 0,5$  (що справедливо для точок, що близькі до осі переміщення теплоти), отримаємо вираз для максимальних температур точок  $y_0$ :

$$t_{\max(y_0)} = \frac{0,484q_e}{\omega_3 c\rho\delta y_0} \left( 1 - \frac{by_0^2}{2a_T} \right) = \frac{0,242q_e}{\omega_3 c\rho\delta y_0} \left( 1 - \frac{by_0^2}{2a_T} \right), \quad (12.44)$$

де  $0,484 = \sqrt{2/\pi}$  – числовий коефіцієнт;  $y_0$  – відстань точки від осі переміщення джерела теплоти.

Двочлен у дужках оцінює інтенсивність тепловіддачі – чим більше  $b$ , тим нижче температура точок на тій же відстані  $y_0$ . Максимальні температури згідно з рівнянням (12.44) прямопропорційні потужності джерела теплоти (нехтуючи тепловіддачею) і обернено пропорційні відстані заданої точки від осі переміщення джерела теплоти.

**Приклад 12.1.** Розрахувати, на якій максимальній відстані від шва сталюї пластини товщиною 4 мм буде досягнута температура  $300^\circ\text{C}$  при зварюванні на режимі  $I_{зв} = 400$  А,  $U_0 = 30$  В,

$\omega_3 = 1$  см/с. Об'ємна теплоємність пластини  $c_p = 4,18 \cdot 10^6$  Дж/м<sup>3</sup>·К. Поверхневою тепловіддачею знехтувати.

### Розв'язок

Визначаємо ефективну теплову потужність дуги  $q_e$ :

$$q_e = \eta_e \cdot U \cdot I = 0,8 \cdot 30 \cdot 400 = 9600 \text{ Вт.}$$

Розв'язуючи спрощене рівняння (12.48) без члена  $\frac{by_0^2}{2a_T}$

відносно  $y_0$ , знаходимо його значення. При цьому  $t_{\max}(y_0) = 300$  °С.

$$t_{\max(y_0)} = \frac{0,484q_e}{\omega_3 c_p 2y_0 \delta} = \frac{0,242q_e}{\omega_3 c_p y_0 \delta};$$

$$y_0 = \frac{0,242q_e}{\omega_3 c_p t_{\max} \delta} = \frac{0,242 \cdot 9600}{1 \cdot 10^{-2} \cdot 4,18 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot 300} = 0,0463 = 46,3 \text{ мм.}$$

### 12.5. Розрахунок миттєвої швидкості охолодження для заданої температури

Виведемо рівняння для визначення миттєвої швидкості охолодження виробу, що нагрівається при заданій температурі.

Оскільки швидкість охолодження є похідною від температури за часом  $\omega_{ox} = \frac{dt}{d\tau}$ , то для того, щоб розв'язати поставлену задачу, досить продиференціювати вираз для температури. Наприклад, швидкість охолодження при автоматичному дуговому наплавленні валика на масивну деталь з врахуванням початкової температури  $t_0$  знаходимо з рівняння:

$$t_{(r,\tau)} - t_0 = \frac{q_e}{2\pi\lambda\omega_3\tau} \cdot e^{-\frac{r^2}{4a_T\tau}}. \quad (12.45)$$

Оскільки швидкості охолодження для точок, розташованих поблизу шва ( $t = 800\text{--}900$  °С і вище), майже такі самі, як на його осі, де  $r = 0$ , розрахунок будемо вести при  $r = 0$ .

Продиференціювавши вираз:

$$t_{(0,\tau)} - t_0 = \frac{q_e}{2\pi\lambda\omega_3\tau}, \quad (12.46)$$

отримаємо:

$$\frac{dt_{(0,\tau)}}{d\tau} = -\frac{q_e}{2\pi\lambda\omega_s\tau^2} = \omega_{ox}. \quad (12.47)$$

Це рівняння можна розв'язати двома способами – алгебраїчним або графічним. Для алгебраїчного визначення швидкості охолодження через температуру необхідно разом розв'язати рівняння (12.46) і (12.47). Для цього виразимо  $1/\tau$  через величини, що входять в рівняння (12.46) і підставимо отримане значення в (12.47):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} &= \frac{2\pi\lambda\omega_s [t_{(0,\tau)} - t_0]}{q_e}; \\ \frac{dt_{(0,\tau)}}{d\tau} &= -\frac{q_e}{2\pi\lambda\omega_s} \cdot \frac{(2\pi\lambda\omega_s)^2 [t_{(0,\tau)} - t_0]^2}{q_e^2}; \\ \omega_{ox} &= \frac{dt_{(0,\tau)}}{d\tau} = -\frac{2\pi\lambda\omega_s [t_{(0,\tau)} - t_0]^2}{q_e}. \end{aligned} \quad (12.48)$$

Графічним шляхом визначаємо миттєву швидкість охолодження при заданій температурі в такій послідовності: будуємо температурну криву  $t_{(0,\tau)} = \frac{q_e}{2\pi\lambda\tau\omega_s}$  при  $t = 0$ , задаючи довільні значення  $\tau$  (рис. 12.11) і похідну від цього виразу  $\omega_{ox} = \frac{dt_{(0,\tau)}}{d\tau}$ .

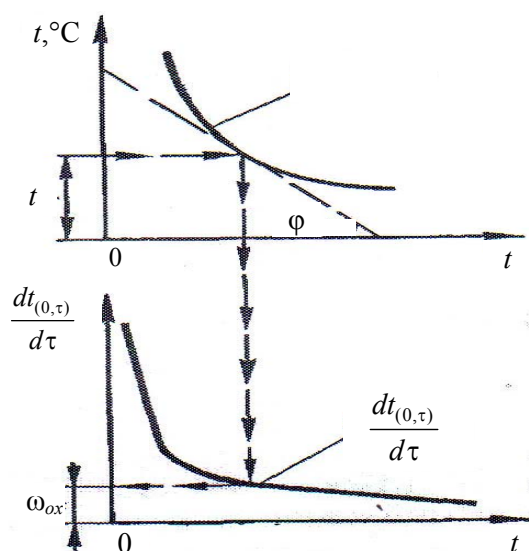


Рис. 12.11 – Схема графічного визначення миттєвої швидкості охолодження [2]

Графік для похідної можна будувати шляхом проведення дотичних в різних точках і вимірювання кутів  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ . З виразу

$\omega_{ox} = \frac{dt_{(0,\tau)}}{d\tau}$  для заданої температури  $t$  визначимо  $\omega_{ox}$  (рис. 12.11).

На основі аналогічних міркувань виведемо вираз для швидкості охолодження при автоматичному зварюванні листів заданої товщини з повним проплавленням.

Скориставшись рівнянням:

$$t_{(y,\tau)} = \frac{q_e}{\omega_3 \delta \cdot c\rho \sqrt{4\pi \cdot a_T \cdot \tau}} \cdot e^{-\frac{y^2}{4a_T\tau}}, \quad (12.49)$$

отримаємо:

$$t_{(y,\tau)} - t_0 = \frac{q_e}{\omega_3 \delta \sqrt{4\pi \lambda c\rho \tau}} \cdot e^{-\frac{y^2}{4a_T\tau}}$$

і

$$t_{(0,\tau)} - t_0 = \frac{q_e}{\omega_3 \delta \sqrt{4\pi \lambda c\rho \tau}}. \quad (12.50)$$

Звідси:

$$\frac{dt_{(0,\tau)}}{d\tau} = -\frac{q_e}{2\omega_3\delta\sqrt{4\pi\lambda\tau^3c\rho}}. \quad (12.51)$$

З формули (12.49) будемо мати:

$$\frac{1}{\sqrt{\tau}} = \frac{[t_{(0,\tau)} - t_0] \omega_3 \delta \sqrt{4\pi\lambda c\rho}}{q_e}.$$

Підставимо це значення у формулу (12.51):

$$\frac{dt_{(0,\tau)}}{d\tau} = -\frac{q_e}{2\delta\omega_3\sqrt{4\pi\lambda c\rho}} \cdot \frac{\delta^3\omega_3^3(4\pi\lambda c\rho)^{1,5}}{q_e^3} [t_{(0,\tau)} - t_0]^3$$

або в іншому вигляді:

$$\omega_{ox} = \frac{dt_{(0,\tau)}}{d\tau} = \frac{2\pi\lambda c\rho [t_{(0,\tau)} - t_0]^3}{\left(\frac{q_e}{\delta\omega_3}\right)^2}. \quad (12.52)$$

З формул (12.50) та (12.52) очевидно, що зниження швидкості охолодження шва навколошовної зони необхідно збільшувати температуру  $t_0$  за рахунок попереднього або попутного підігріву виробу і одночасно збільшити погонну потужність дуги. Вплив підігріву і погонної енергії на швидкість охолодження у більшій мірі проявляється в пластинах, ніж в масивних тілах. Це витікає зі значень показників степенів у формулах (12.48) і (12.52). При наплавленні валика на лист середньої товщини, який моделюється плоским шаром, швидкість охолодження визначається з рівняння:

$$\omega_{ox} = -\omega \frac{2\pi\lambda(t - t_{(0,\tau)})}{q_e / \omega_3}, \quad (12.53)$$

де  $\omega$  – безрозмірний критерій процесу охолодження, який залежить від властивостей зварюваного металу та умов охолодження.

Критерій  $\omega$  визначають за допомогою номограми (рис. 12.12) залежно від безрозмірної величини  $1/\theta$ , яка розраховується за формулою:

$$\frac{1}{\theta} = \frac{2 \cdot q_e / \omega_3}{\pi\delta^2 c\rho(t - t_{(0,\tau)})}. \quad (12.54)$$

Слід відмітити, що для значень критерію  $1/\theta$  більше 2,5, швидкість охолодження точок плоского шару, розташованих по осі руху джерела теплоти, майже співпадає зі швидкістю охолодження точок пластини, а для значень  $1/\theta < 0,4$  – співпадає зі швидкістю охолодження точок півнескінченного тіла.

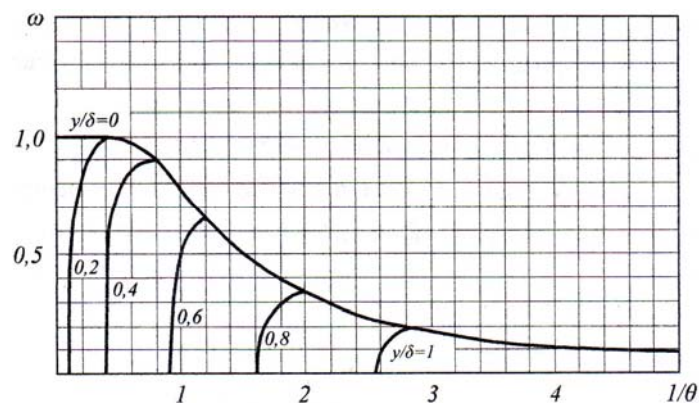


Рис 12.12 – Номограма для визначення безрозмірного критерію  $\omega$

**Приклад 12.1.** Розрахувати мінімальну температуру попереднього підігріву при наплавленні прокатних валків зі сталі 55X, яка дозволяє уникнути гартувальних структур, якщо режим наплавлення  $I = 650$  А,  $U = 380$  В,  $\omega_s = 16$  м/год. =  $0,445 \cdot 10^{-2}$  м/с.

Прийmemo  $\lambda = 42$  Вт/м·град.,  $\eta_e = 0,7$ . Для сталі 55X при  $t = 700$  °С критичною швидкістю охолодження, що дає гартування структури є  $\omega_{кр} = 20$  град./с. Знайдемо ефективну потужність дуги:

$$q_e = IU \eta_e = 650 \cdot 380 \cdot 0,7 = 13650 \text{ Вт.}$$

Використавши вираз (12.48), отримаємо:

$$\omega_{ox} = \frac{dt_{(0,\tau)}}{d\tau} = - \frac{2\pi\lambda\omega_s [t_{(0,\tau)} - t_0]^2}{q_e};$$

$$t_{(0,\tau)} - t_0 = \sqrt{\frac{q_e \omega_{ox}}{2\pi\lambda\omega_s}};$$

$$t_{(0,\tau)} - t_0 = \sqrt{\frac{13650 \cdot 20}{2 \cdot 3.14 \cdot 42 \cdot 0.445 \cdot 10^{-2}}} = 482 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

$$t_0 = 700 - 482 = 218 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Таким чином, гартувальний шар не буде виникати при підігріві валка до температури вище 218 °С.

**Приклад 12.2.** Визначити миттєву швидкість охолодження шва за наплавлення масивного сталюго валика для  $t_{кр} = 700 \text{ } ^\circ\text{C}$ , якщо наплавлення ведеться при режимі  $I = 600 \text{ А}$ ,  $U = 32 \text{ В}$ ,  $\omega_3 = 20 \text{ м/год} = 5,55 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}$ . Прийmemo  $\lambda = 42 \text{ Вт/м}\cdot\text{град.}$ ,  $\eta_e = 0,7$ .

У цьому випадку нас цікавить швидкість охолодження за температури  $t_0 = t_{кр}$ . Температуру навколишнього середовища  $t_0 = 20 \text{ } ^\circ\text{C}$ ; Знайдемо ефективну потужність дуги:

$$q_e = IU \eta_e = 600 \cdot 32 \cdot 0,7 = 13440 \text{ Вт.}$$

Підставивши значення у рівняння (12.48), отримаємо:

$$\omega_{ох} = \frac{2 \cdot 3.14 \cdot 42 \cdot 5.55 \cdot 10^{-3} (700 - 20)^2}{13440} = 50 \text{ м/с.}$$

#### 12.6. Тривалість нагрівання металу вище заданої температури

Тривалість нагріву вище заданої температури визначимо для двох найбільш важливих випадків:

- наплавлення валика на масивне тіло;
- однопровідного зварювання листів з наскрізним проплавленням.

Для тіла, термічний цикл точки якого зображено на рис. 12.13, тривалість перебування вище заданої температури  $t$  буде визначатись відрізком  $\tau_n$ .

$t$

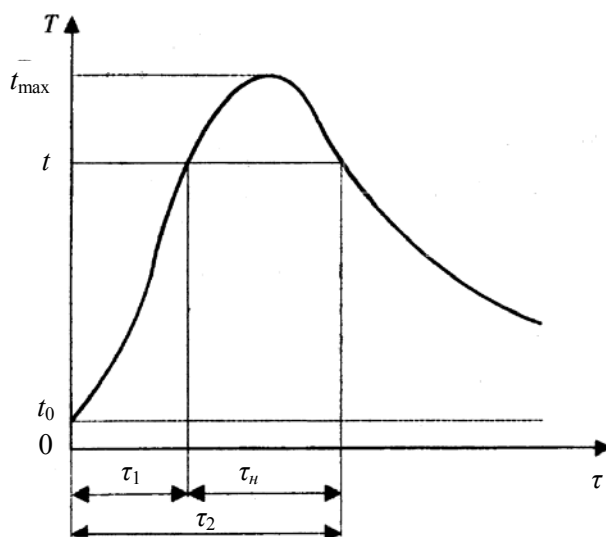


Рис. 12.13 – До розрахунку тривалості нагрівання вище заданої температури

Розрахункові формули для  $\tau_n$  отримаємо, використовуючи теорію потужних швидко рухомих джерел теплоти. Для швидко рухомого точкового джерела на поверхні напівнескінченного тіла виразимо тривалість нагрівання  $\tau_{3n}$  через безрозмірний критерій часу:

$$\tau_{3n} = \tau_{3\text{бкч}} \cdot \frac{r^2}{4a_T}, \quad (12.55)$$

$$\text{де } \tau_{3\text{бкч}} = \tau_{3n} \cdot \frac{4a_T}{r^2}.$$

Визначимо значення  $r^2$  з рівності:

$$t_{\max} = \frac{2q_e}{\pi e r \omega_3 r^2} + t_0, \quad (12.56)$$

і, підставивши його у рівняння 12.55, отримаємо:

$$\tau_{3n} = \frac{\tau_{3\text{бкч}}}{4\pi e} \cdot \frac{2q_e}{\omega_3 \lambda (t_{\max} - t_0)}. \quad (12.57)$$

Для того щоб зв'язати  $\tau_{3\text{бкч}}$  з режимними параметрами зварювання, поділимо рівність:

$$t_{(y,z,\tau)} = \frac{q_e}{2\pi\lambda\tau\omega_3} \exp\left(-\frac{y^2 + z^2}{4a_T\tau}\right) + t_0 \quad (12.58)$$

на рівність (12.44) отримаємо:

$$\frac{t - t_0}{t_{\text{max}} - t_0} = \frac{r^2}{4a_T\tau} \exp\left(1 - \frac{r^2}{4a_T\tau}\right). \quad (12.59)$$

Формула (12.47), яка виражає залежність між безрозмірними величинами  $\frac{t - t_0}{t_{\text{max}} - t_0}$  та  $\tau_{3\text{бкч}} = \tau_{3н} \cdot \frac{4a_T}{r^2}$  використовується для побудови номограми (рис. 12.14), за допомогою якої можна визначити величину  $\tau_{3\text{бкч}}/4\pi e$ , що входить у праву частину рівності (12.57).

Для цього необхідно обчислити величину  $\frac{t - t_0}{t_{\text{max}} - t_0}$  для вибраної точки тіла і відкласти її на горизонтальній осі номограми, а потім на відповідній кривій знайти на осі ординат значення  $\tau_{3\text{бкч}}/4\pi e$ . Підставляючи це значення в формулу (12.57), знаходимо чисельне значення  $\tau_{3н}$ .

Для випадку однопрохідного зварювання листів з наскрізним проплавленням тривалість нагрівання вище заданої температури виражається через безрозмірний критерій часу:

$$\tau_{2н} = \tau_{2\text{бкч}} \frac{y^2}{4a_T}. \quad (12.60)$$

$$\text{де } \tau_{2\text{бкч}} = \tau_{2н} \frac{4a_T}{y^2}.$$

$\tau_{3\text{бкч}}/4\pi e, \tau_{2\text{бкч}}/64\pi e$

$\tau_{3\text{бкч}}/4\pi e, \tau_{2\text{бкч}}/64\pi e$

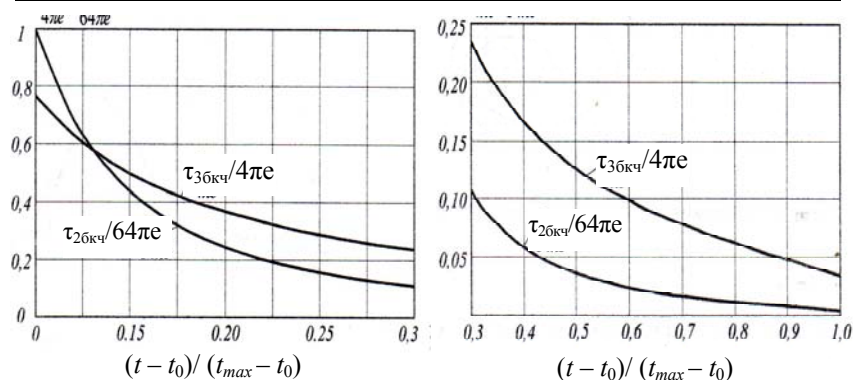


Рис. 12.14 – Номограми для визначення величин  $\tau_{3\delta_{кч}}/4\pi e$  та  $\tau_{2\delta_{кч}}/64\pi e$  в рівняннях (12.57) і (12.63)

Виконавши математичні перетворення і використовуючи рівність:

$$t_{\max} = \frac{q_e}{c\rho\delta\omega_3\sqrt{2\pi e}} \exp\left(-\frac{by^2}{2a_T}\right) + t_0, \quad (12.61)$$

а також рівняння (12.48), отримаємо розподіл температури в площині:

$$t_{(y,z,\tau)} = \frac{q_e}{2\lambda\delta\omega_3} \sqrt{\frac{a_T}{\pi\tau}} \exp\left(-\frac{y^2}{4a_T\tau} - b\tau\right) + t_0. \quad (12.62)$$

При використанні рівняння (12.62) тепловіддача не враховується і приймається  $b = 0$ .

Отримаємо формули для визначення шуканих величин:

$$\tau_{2n} = \frac{\tau_{2\delta_{кч}}}{64e} \cdot \frac{8}{c\rho\lambda} \left[ \frac{q_e}{\omega_3\delta(t_{\max} - t_0)} \right]^2, \quad (12.63)$$

$$\frac{t - t_0}{t_{\max} - t_0} = \sqrt{2e} \cdot \frac{y}{\sqrt{4a_T\tau}} \exp\left(\frac{y^2}{4a_T\tau}\right). \quad (12.64)$$

На номограмі (див. рис. 12.14) нанесено криву  $\tau_{2\delta_{кч}}/64\pi e$ , побудовану на основі співвідношення (12.64). Послідовність визначення тривалості нагрівання металу вище заданої температури при однопрохідному зварюванні листів з наскрізним проплавленням така ж, як і для наплавлення валика на масивне тіло.

## 12.7. Ширина зони нагріву

Для оцінки термічного впливу на зварюваний метал іноді доцільно визначити розмір  $2l$ , що нагрівається вище заданої температури  $t_1$  (рис. 12.15).

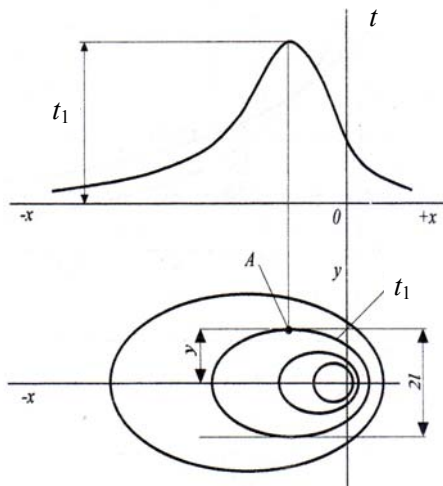


Рис 12.15 – Розрахунок ширини зони, нагрітої вище температури  $t_1$

Ширину  $2l$  зони нагрівання можна знайти, якщо визначити координату  $y$  точки  $A$ , яка розміщена на ізотермі  $t = t_1$  і в якій досягається максимальна температура  $t_1$  на відстані  $y = 1$ . Максимальну температуру  $t_1$  можна знайти за умови  $\frac{\partial t}{\partial x} = 0$ .

Отже, щоб визначити ширину  $2l$  зони нагрівання вище температури  $t_1$ , необхідно розв'язати систему рівнянь. Розглядаючи наплавлення валика на масивне тіло, можна скласти такі рівняння:

$$t_1 = \frac{q_e}{2\pi\lambda R} \exp\left[-\frac{\omega_3}{2a_T}(x+R)\right]; \quad (12.65)$$

$$\frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{q_e}{2\pi\lambda R} \exp\left[-\frac{\omega_3}{2a_T}(x+R)\right] \cdot \left[\frac{x}{R} + \frac{\omega_3}{2a_T}(x+R)\right] = 0. \quad (12.66)$$

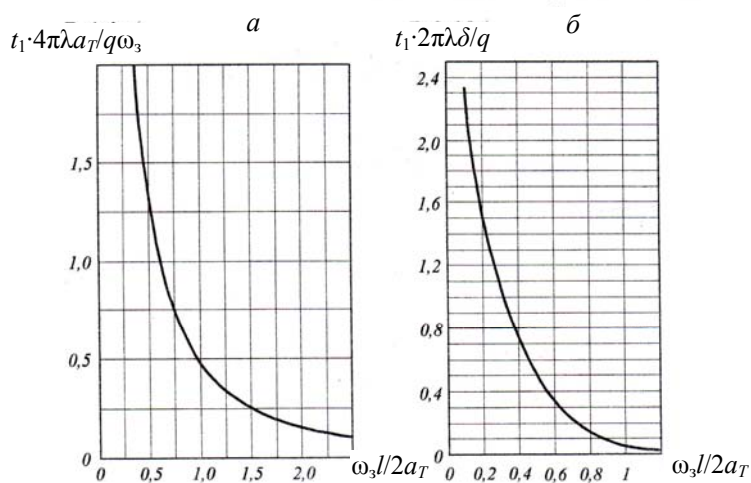
Далі, поклавши  $z = 0$  і враховуючи, що  $l^2 = y^2 = R^2 - x^2$ , виразимо (12.65) і (12.66) у параметричній формі:

$$\frac{\omega_3 l}{2a_T} = \pm \frac{\rho_3}{1 + \rho_3} \cdot \sqrt{1 + 2\rho_3}; \quad (12.67)$$

$$\frac{t_1 4\pi\lambda a_T}{q_D \omega_3} = \frac{1}{\rho_3} \exp\left(-\frac{\rho_3}{1 + \rho_3}\right), \quad (12.68)$$

де  $\rho_3 = \frac{\omega_3 R}{2a_T}$ .

Задаючи різні значення  $\rho_3$ , знаходимо значення  $\omega_3 l / 2a_T$ , а отже і відповідні їм значення  $t_1$ . На рис. 12.16, а наведено номограму для визначення ширини зони термічного впливу або її частини при наплавленні валика на масивне тіло. Для заданої температури за режимом зварювання знаходимо значення параметра  $t_1 \cdot 4\pi\lambda a_T / q \omega_3$  (по осі ординат), а вже потім відповідне значення параметра  $\omega_3 l / 2a_T$ .



**Рис. 12.16 – Номограми для визначення ширини зони  $2l$  нагрівання рухомим джерелом теплоти: а – точкове джерело, півнескінченне тіло; б – лінійне джерело, пластина**

Для визначення ширини зони нагрівання зварного з'єднання пластин використовують, як вихідне, рівняння (12.63) – без ураху-

вання тепловіддачі. Тоді система двох рівнянь запишеться у звичайній формі:

$$t_l = \frac{q_e}{2\pi\lambda\delta} \exp\left(-\frac{\omega_3 x}{2a_T}\right) K_0\left(r\sqrt{\frac{\omega_3^2}{4a_T^2}}\right); \quad (12.69)$$

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{q_e}{2\pi\lambda\delta}, \quad (12.70)$$

а також у параметричній формі:

$$\frac{\omega_3 l}{2a_T} = \pm \rho_2 \sqrt{1 - \left[\frac{K_0(\rho_2)}{K_1(\rho_2)}\right]^2}; \quad (12.71)$$

$$\frac{t_l 2\pi\lambda\delta}{q_e} = \exp\left[-\sqrt{\rho_2^2 - \left(\frac{\omega_3 l}{2a_T}\right)^2}\right] \cdot K_0(\rho_2); \quad (12.72)$$

$$\rho_2 = \frac{r\omega_3}{2a_T}.$$

Номограма для визначення ширини зони нагріву при зварюванні пластин наведена на рис. 12.16, б.

У формулі (12.71) використано формулу диференціювання функції Бесселя  $K_0'(x) = -K_1(x)$ , де  $K_1(x)$  – модифікована функція Бесселя другого роду першого порядку.

#### 12.8. Особливості нагріву і охолодження металу для деяких видів зварювання

**1. Нагрів і охолодження стрижнів при контактному зварюванні в стик.** Нагрів стержнів при такому зварюванні здійснюється струмом  $j$  за питомого опору металу  $\rho_r$  і контактного опору  $R$  на межі між стрижнями (рис. 12.17).

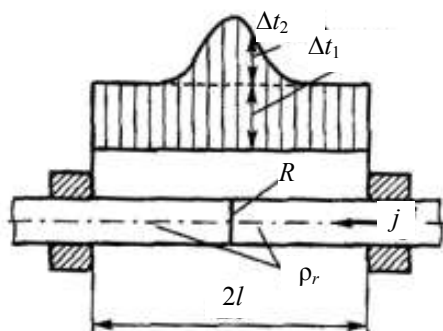


Рис. 12.17 – Розподіл температури по довжині стрижнів, що зварюються в процесі їх нагріву струмом

У загальному випадку через наявність контактного опору  $R$  розподіл температури по довжині стрижня нерівномірний. Температуру  $t$  можна формально визначити, як суму:

$$t = t_1 + t_2, \quad (12.73)$$

де  $t_1$  та  $t_2$  – рівномірна та нерівномірна складова температури, відповідно.

Приймаючи для розрахунку схему необмеженого стрижня без тепловіддачі в навколишнє середовище, температуру  $t$  можна розрахувати, використовуючи результати, отримані для випадку нагріву електродів струмом. Залежність  $\rho_r/c \cdot \rho$  від температури приймається згідно рівняння (12.2). Температура  $t_1$  знаходиться з рівняння (12.4), якщо в ньому прийняти  $b_0 = 0$  і  $t_0 = 0$ :

$$t =_1 \frac{e^{\beta \omega_0 \tau}}{\beta} - \frac{1}{\beta}, \quad (12.74)$$

$$\text{де } \omega_0 = \left( \frac{\rho_r}{c \rho} \right) \gamma^2.$$

Значення  $\left( \frac{\rho_r}{c \rho} \right)_0$  і коефіцієнта  $\beta$ , що використовуються для

розрахунку нагріву стрижнів при контактному зварюванні, наведені у таблиці 12.2.

Таблиця 12.2 – Коефіцієнти, що використовують для розрахунку нагріву стрижнів при контактному зварюванні

Матеріал	$(\rho_r / c\rho)_0 \cdot 10^{-6}$ , см <sup>4</sup> ·град./А <sup>2</sup> ·с	$\beta \cdot 10^{-3}$ , град. <sup>-1</sup>	$\gamma^2 \cdot \tau_n \cdot 10^6$ , А <sup>2</sup> ·с/см <sup>4</sup>	$\kappa \cdot 10^6$ , Дж/А·см <sup>4</sup>
Сталь 10	3,6	3,8	93–89	0,8–1,0
Сталь 45	5,25	3,0	75–72	0,7–0,9
Сталь інструментальна (0,1 % С; 0,58 % Мп; 12,2 % Сг)	8,4	1,36	67–65	0,85–0,95
Сталь Р18	12	0,64	124	0,75–0,9
Сталь нержавіюча	16,7	0,28	62	0,38–0,5
Алюміній	1,35	2,33	250	0,7–0,75
Мідь	0,53	2,8	880–850	0,5–0,55

Визначення щільності струму  $\gamma$  і температури  $t_2$  виконується залежно від способу контактного зварювання.

**Контактне зварювання опором.** При контактному зварюванні опором струм, щільністю  $\gamma$ , протікає безперервно, його середнє значення знаходиться розрахунковим шляхом або за допомогою вимірювальних приладів. Для зварювання опором маловуглецевої сталі щільність струму складає 20–60 А/мм<sup>2</sup>. Величина  $t_1$  знаходиться за формулою (12.61).

Визначення температури  $t_2$  виконується таким чином. Вважаємо, що контактний опір  $R$  виникає нетривало; при цьому в зоні контакту виділяється сумарна питома кількість теплоти:

$$Q_2 = \kappa / \gamma, \text{ Дж/см}^2, \quad (12.75)$$

де  $\kappa$  – розрахунковий коефіцієнт, що залежить від властивостей металу і питомого тиску. Більшому питомому тиску відповідає менше значення коефіцієнта.

Теплота  $Q_2$  для визначення температури в пізнішій стадії процесу вважається прикладеною миттєво при  $\tau = 0$ . Нагрів стрижня теплотою  $Q_2$  викликає додаткове підвищення температури і питомого опору. Залежність  $\rho_r / c\rho$  від температури  $t_2$  складе величину

$$\left( \frac{\rho_r}{c\rho} \right)_0 \beta \cdot t_2. \text{ Струм, що проходить за одиницю часу викличе додат-$$

кове тепловиділення в одиниці довжини стрижня:

$$q = c\rho \left[ \left( \frac{\rho_r}{c\rho} \right)_0 \cdot \beta \cdot t_2 \right] \gamma^2 F = \left[ c\rho \left( \frac{\rho_r}{c\rho} \right)_0 \beta \gamma^2 F \right] t_2. \quad (12.76)$$

Тепловиділення  $q$  пропорційно температурі  $t_2$ , тобто воно співпадає з тепловіддачею в навколишнє середовище  $q = -\alpha \Pi t_2$ , що пропорційна температурі, але має протилежний знак. Тут  $\Pi$  – периметр стрижня. Таким чином, сумісна дія джерела  $Q_2$  і струму, що проходить може бути представлена як процес поширення теплоти від миттєвого джерела  $Q_2$  з додатковим тепловиділенням, пропорційним температурі  $t_2$ . Додаткове тепловиділення можна представити як тепловіддачу з оберненим знаком. Прирівняємо рівняння (12.76) до величини  $-\alpha \Pi t_2$ :

$$c\rho \left( \frac{\rho_r}{c\rho} \right)_0 \cdot \beta \gamma^2 F t_2 = -\alpha \Pi t_2. \quad (12.77)$$

З рівняння (12.65) знаходимо:

$$\frac{\alpha \Pi}{c\rho F} = - \left( \frac{\rho_r}{c\rho} \right)_0 \beta \gamma^2 = -\omega_0 \beta. \quad (12.78)$$

Ліва частина рівняння (12.78) відповідає коефіцієнту температуровіддачі  $b$  для стрижня.

Використовуючи формули:

$$t = \frac{\frac{Q}{F}}{c\rho \sqrt{4\pi \cdot a_T \cdot \tau}} e^{-\frac{x^2}{4a_T \tau} - b\tau} \quad (12.79)$$

і (12.78), отримаємо:

$$t_2 = \frac{Q_2}{c\rho \sqrt{4\pi \cdot a_T \cdot \tau}} e^{-\frac{x^2}{4a_T \tau} + \beta \omega_0 \tau}. \quad (12.80)$$

Моменту досягнення в стику температури  $t_k$ , рівної температурі зварювання металу, для сталі, наприклад,  $1250^\circ\text{C} - 1350^\circ\text{C}$ , відповідає певне значення добутку  $\gamma^2 \tau_n$  (див. табл. 12.2), де  $\tau_n$  – тривалість нагріву стрижнів при зварюванні (с).

При цьому для здійснення зварювання необхідно також прогріти зону біля контакту зварювання довжиною  $2l_{oc}$  вище темпера-

тури  $t_0$  пластичного деформування (для сталі  $t_0 = 500\text{--}700\text{ }^\circ\text{C}$ ) для того щоб забезпечити достатнє пластичне осадження.

Визначення температури на стадії вирівнювання після закінчення нагріву при  $\tau > \tau_n$  виконуємо окремо для  $t_1$  та  $t_2$  за схемою нескінченного стрижня:

$$t_1 = \frac{t_{1n}}{2} \left\{ \Phi \left[ \frac{x+l}{\sqrt{4a_T(\tau-\tau_n)}} \right] - \Phi \left[ \frac{x-l}{\sqrt{4a_T(\tau-\tau_n)}} \right] \right\}, \quad (12.81)$$

де  $2l$  – довжина ділянки, що нагрівається;  $t_{1n}$  – температура  $t_1$  у момент закінчення нагріву;  $\tau$  – повний час процесу з моменту початку нагріву;

$$\Phi \left[ \frac{x+l}{\sqrt{4a_T(\tau-\tau_n)}} \right] \text{ і } \Phi \left[ \frac{x-l}{\sqrt{4a_T(\tau-\tau_n)}} \right] - \text{функціональні}$$

залежності, що знаходяться з графічних залежностей для нескінченного стрижня.

Після закінчення нагріву процес поширення теплоти, що описується рівнянням (12.64), продовжується, а процес додаткового тепловідділення, що виражається членом  $\beta\omega_0\tau$ , припиняється при  $\tau = \tau_n$ :

$$t_2 = \frac{Q_2}{c\rho\sqrt{4\pi \cdot a_T \cdot \tau}} e^{-\frac{x^2}{4a_T\tau} + \beta\omega_0\tau_n}. \quad (12.82)$$

**2. Розрахунок температур при зварюванні різномірних матеріалів.** Елементи конструкцій часто виготовляються з різномірних матеріалів, які можуть мати різну товщину. Розглянемо випадок зварювання пластин товщиною  $\delta_1$  та  $\delta_2$  із різними теплофізичними властивостями (рис. 12.18).

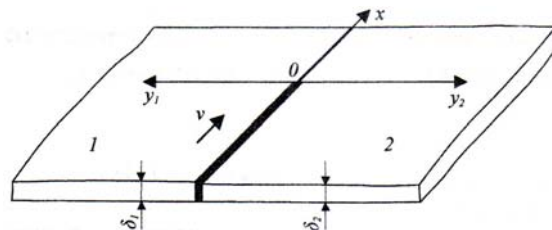


Рис. 12.18 – Розрахункова схема процесу зварювання різномірних матеріалів

У таких умовах теплові потоки від джерела в праву та ліву частини не будуть однакові, тому формулу, яка описує температурне поле граничного стану при зварюванні різнорідних пластин:

$$t_{(r,x,\infty)} = \frac{q_e}{2\pi\lambda\delta} \exp\left(\frac{\omega_3 x}{2a_T}\right) K_0\left(r \sqrt{\frac{\omega_3^2}{4a_T^2} + \frac{b}{a_T}}\right), \quad (12.83)$$

запишемо у вигляді:

$$t_{1(x,y_1,\infty)} = \frac{q_{1e}}{2\pi\lambda_1\delta_1} \exp\left(-\frac{\omega_3 x}{2a_{T1}}\right) K_0\left(\sqrt{x^2 + y_1^2} \sqrt{\frac{\omega_3^2}{4a_{T1}^2} + \frac{b_1}{a_{T1}}}\right), \quad (12.84)$$

$$t_{2(x,y_2,\infty)} = \frac{q_{2e}}{2\pi\lambda_2\delta_2} \exp\left(-\frac{\omega_3 x}{2a_{T2}}\right) K_0\left(\sqrt{x^2 + y_2^2} \sqrt{\frac{\omega_3^2}{4a_{T2}^2} + \frac{b_2}{a_{T2}}}\right). \quad (12.85)$$

Індексами 1 та 2 позначено параметри і теплофізичні характеристики різнорідних матеріалів.

При загальній тепловій потужності джерел  $q_D$  можна записати:

$$q_D = q_{1e} + q_{2e}, \quad (12.86)$$

де  $q_{1e}$  і  $q_{2e}$  – частки загальної теплової потужності джерела, які відводяться відповідно у першу та другу пластину.

Спільною умовою для різнорідних пластин є рівність температур по осі з'єднання пластин ( $y_1 = y_2 = 0$ ) протягом усього часу дії джерела теплоти, тобто:

$$t_{1(x,0,\infty)} = t_{2(x,0,\infty)}. \quad (12.87)$$

Розв'язавши систему рівнянь (12.86) і (12.87), отримаємо:

$$t_{1(x,y_1,\infty)} = \frac{q_e}{2\pi\lambda_1\delta_1} mK_0 \left[ \sqrt{(x^2 + y_1^2) \left( \frac{\omega_3^2}{4a_{T1}^2} + \frac{b_1}{a_{T1}} \right)} \right] \times \\ \times K_0 \left( |x| \sqrt{\frac{\omega_3^2}{4a_{T2}^2} + \frac{b_2}{a_{T2}}} \right) N(x), \quad (12.88)$$

$$t_{2(x,y_2,\infty)} = \frac{q_e}{2\pi\lambda_2\delta_2} K_0 \left[ \sqrt{(x^2 + y_2^2) \left( \frac{\omega_3^2}{4a_{T2}^2} + \frac{b_2}{a_{T2}} \right)} \right] \times \\ \times K_0 \left( |x| \sqrt{\frac{\omega_3^2}{4a_{T1}^2} + \frac{b_1}{a_{T1}}} \right) N(x), \quad (12.89)$$

де

$$m = \frac{\lambda_1\delta_1}{\lambda_2\delta_2};$$

$$N(x) = \frac{\exp \left[ -\frac{\omega_3 x}{2} \left( \frac{1}{a_{T1}} + \frac{1}{a_{T2}} \right) \right]}{\exp \left( \frac{\omega_3 x}{2a_{T1}} \right) K_0 \left( |x| \sqrt{\frac{\omega_3^2}{4a_{T1}^2} + \frac{b_1}{a_{T1}}} \right) + m \exp \left( \frac{\omega_3 x}{2a_{T2}} \right) K_0 \left( |x| \sqrt{\frac{\omega_3^2}{4a_{T2}^2} + \frac{b_2}{a_{T2}}} \right)}.$$

Розрахунки температурних полів за формулами (12.88) і (12.89) забезпечують достатню для інженерної практики точність при  $m \geq 0,5$  [4].

Для випадків коли зварюються пластини з однорідних матеріалів але різної товщини:

$$m = \frac{\delta_1}{\delta_2}. \quad (12.90)$$

При зварюванні пластин однакової товщини, але з різними теплофізичними характеристиками:

$$m = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \quad (12.91)$$

При  $\lambda_1 = \lambda_2$ ,  $a_{T1} = a_{T2}$ ,  $b_1 = b_2$  і  $\delta_1 = \delta_2$  формули (12.88) і (12.89) перетворюються в формулу (12.83).

На рис. 12.19 наведено розподіл температур у поперечних перерізах в різномірних металах (сталь-мідь) при однопрохідному зварюванні під флюсом [4].

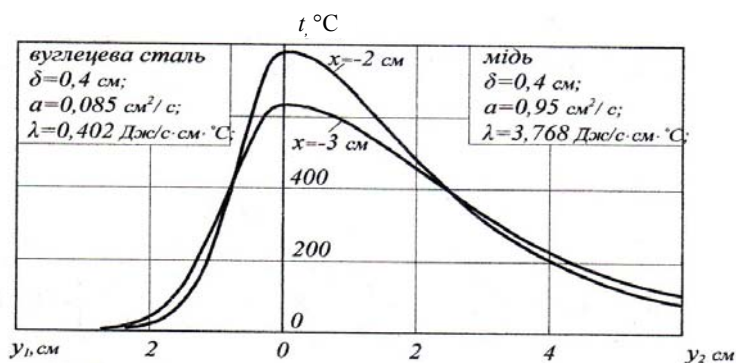


Рис. 12.19 – Розподіл температур у різномірних пластинах і поперечних перерізах, позаду джерела:  $q = 8000$  Вт,  $\omega_s = 0,7$  см/с,  $\alpha = 0,0167$  Вт/см<sup>2</sup>·°C

**3. Теплові процеси при точковому зварюванні.** Теплота при точковому зварюванні, що виділяється в зоні між електродами, витрачається на нагрів металу, що зварюється і ділянок електродів, що прилягають до зони зварювання.

Теплота, що витрачається на нагрів зварюваного металу складається з теплоти, яка затрачується на:

а) розплавлення стовпчика металу зварюваних листів товщиною  $2\delta$ , що знаходяться між електродами діаметром  $d_e$  (рис. 12.20):

$$Q_1 = \frac{\pi d_e^2}{4} \cdot 2\delta c \rho t_{пл}, \quad (12.92)$$

де  $c \cdot \rho \cdot t_{пл}$  – середній тепловміст одиниці об'єму розплавленого металу.

б) нагрів кільця металу шириною  $x$ , що оточує центральний стовпчик. Умовно приймається, що об'єм цього кільця  $\pi x(d_e + x)$ , а середня температура нагріву металу  $t_{пл}/4$ :

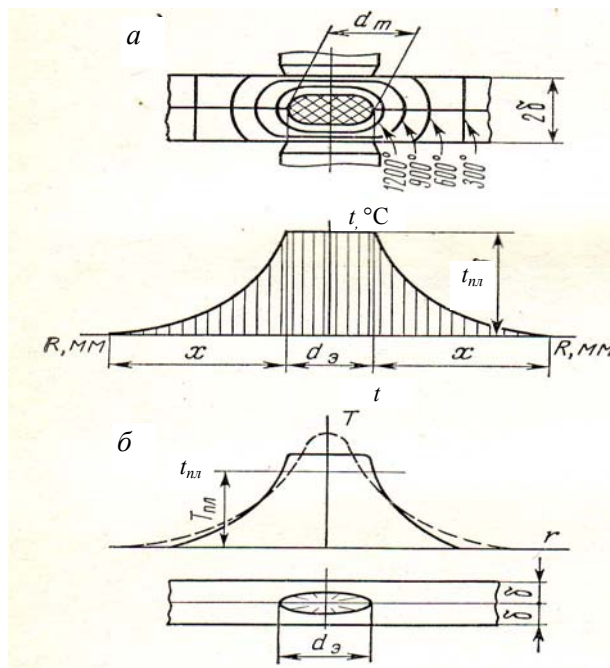
$$Q_2 = k_1 \pi x(d_e + x) 2\delta c \rho \frac{t_{пл}}{4}, \quad (12.93)$$

де  $k_1 = 0,8$  – коефіцієнт, що враховує нерівномірність нагріву кільця.

Розмір  $x$  залежить від температуропровідності металу і часу зварювання:

$$x = 4\sqrt{a_T \tau}. \quad (12.94)$$

Якщо діаметр електрода в зоні контакту невідомий, можна прийняти його рівним діаметру ядра точки.



**Рис. 12.20 – Розподіл температури при точковому зварюванні:**  
**а – дійсний і розрахунковий для визначення  $Q$ ;**  
**б – при вимкненні струму для визначення вирівнювання температур**

Введена в метал теплота  $Q = Q_1 + Q_2$  після закінчення зварювання поширюється в пластинках і віддається в навколишнє середовище. Температурне поле на цій стадії описується схемою миттєвого нормально кругового джерела теплоти в пластині з тепловіддачею (рис. 12.20, б, пунктир):

$$t = \frac{Q}{4\pi\lambda(\tau_0 + \tau)} \exp\left(-\frac{r^2}{(\tau_0 + \tau)4a_T} - \frac{\alpha\tau}{c\rho\delta}\right), \quad (12.95)$$

де  $\tau$  – час, що пройшов після вимкнення струму і розведення електродів;  $\tau_0$  – постійна часу, що характеризує розподіленість теплоти в пластині по радіусу в момент вимкнення струму (рис. 12.20, б).

У ряді випадків  $\tau_0$  може прийматись близьким до  $\tau_{3\theta}$ . У результаті наближеного опису початкового розподілу температур при  $\tau = 0$  рівняння (12.84) дає достовірні результати при температурах, у центрі пластини нижче  $0,5 t_{пл}$ , коли роль величини  $\tau_0$  невелика. На цій пізній стадії швидкість охолодження центральної зони точки:

$$\omega_{ох} = \frac{4\pi\lambda(t-t_0)^2}{\frac{Q}{2\delta}}, \quad (12.96)$$

де  $t_0$  – початкова температура листів, що зварюються.

Чим жорсткіші режими зварювання, тим менше  $Q$  і тим вище швидкість охолодження. Швидкість охолодження значно зростає при застосуванні зовнішнього водяного охолодження.

**4. Теплові процеси при роликівому зварюванні.** Режим підбирають і перевіряють експериментально. Кількість теплоти, яка вводитьься в метал на одиницю довжини шва можна наближено визначати за тепловмістом розплавленого металу, що знаходиться між роликівими, що зварюються і має об'єм  $V = k \cdot 2l \cdot 2\delta \cdot 1$  (рис. 12.21, а), де  $k$  – коефіцієнт, що враховує нагрів металу в зоні біля шва (визначається експериментально). Якщо накладення  $2L$  велике порівняно з  $2l$ , то процес вирівнювання температур можна розрахувати за схемою стрижня з тепловіддачею, приймаючи розрахункову товщину пластини  $2\delta$ , а початковий розподіл температур по довжині  $2l$ :

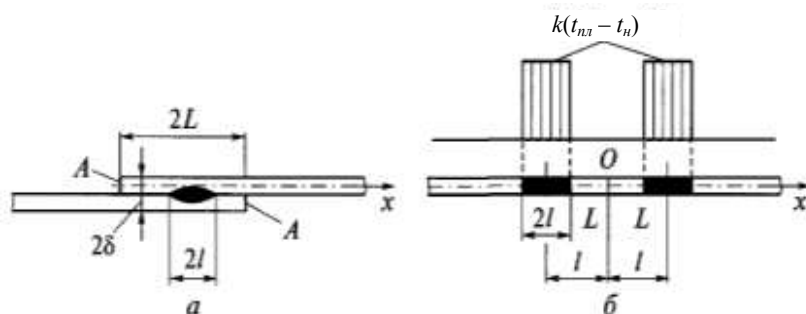
$$t = \frac{kt_{пл}}{2} \left[ \Phi\left(\frac{x+l}{\sqrt{4a_T\tau}}\right) - \Phi\left(\frac{x-l}{\sqrt{4a_T\tau}}\right) \right] e^{-b\tau}, \quad (12.97)$$

де  $b = \alpha/c \cdot \rho \cdot \delta$ ;  $t_{пл}$  – температура плавлення металу.

Швидкість охолодження точок пластини можна визначити диференціюванням рівняння (12.97) у часі. У деяких випадках вирази для швидкості охолодження виявляються громіздкими, тоді швидкість охолодження визначається в необхідному інтервалі температур чисельно. Для цього в результаті підбору визначають  $\tau_1$ , що відповідає температурі початку інтервалу  $t_1$  в розглядуваній точці тіла, після цього назначають  $\tau_2$  (відрізняється на декілька секунд від  $\tau_1$ ) і знаходять відповідне значення  $t_2$ . Швидкість охолодження визначають за формулою:

$$\omega_{ox} = \frac{t_1 - t_2}{\tau_1 - \tau_2}. \quad (12.98)$$

Якщо накладення сумісне з шириною шва, наприклад, складає 2–3 ширини, то необхідно враховувати, що торці  $A$  пластини (рис. 12.21) не пропускають теплоти. У цьому випадку розрахунок проводиться за схемою нескінченного стрижня з початковим розподілом температур за двома зонами (рис. 12.21, б). Торці  $A$  дотикаються у точці  $O$ .



**Рис. 12.21 – Контактне роликве зварювання внапуск:**  
 **$a$  – зварне з'єднання;  $b$  – розподіл температури**  
**на початку періоду її вирівнювання**

Процес вирівнювання температури визначається за формулою:

$$t = \frac{kt_{n1}}{2} \cdot \left[ \Phi\left(\frac{x+l+L}{\sqrt{4a_T\tau}}\right) - \Phi\left(\frac{x-l+L}{\sqrt{4a_T\tau}}\right) + \Phi\left(\frac{x+l-L}{\sqrt{4a_T\tau}}\right) - \Phi\left(\frac{x-l-L}{\sqrt{4a_T\tau}}\right) \right] e^{-b\tau},$$

де  $b = a/c \cdot \rho \cdot \delta$ .

Початок координат розташовується в точці  $O$  (рис. 12.21, б).

#### Контрольні питання

1. Під дією яких джерел теплоти відбувається нагрів електроду в процесі зварювання?
2. Запишіть рівняння теплового балансу нагріву стрижня в результаті проходження через нього струму для одиниці довжини стрижня.

3. Як розрахувати температуру нагріву струмом електрода з маловуглецевого сталюого дроту?
4. Зобразіть розрахункову схему процесу нагріву електрода дугою.
5. Запишіть рівняння процесу розплавлення електрода.
6. На які дві групи можна розділити зварні з'єднання?
7. Що називають термічним коефіцієнтом корисної дії (к.к.д.) процесу проплавлення?
8. Які Ви знаєте параметри зварювальної ванни?
9. Що називають повним тепловим коефіцієнтом корисної дії?
10. Як визначають термічний к.к.д. при зварюванні і наплавленні дугами, що рухаються з довільною швидкістю?
11. Що розуміють під поняттям термічний цикл зварювання?
12. Які є основні параметри термічного циклу?
13. Як здійснюється розрахунок миттєвої швидкості охолодження при заданій температурі?
14. Як розраховують тривалість нагріву вище заданої температури при наплавленні валика на масивне тіло?
15. Як розраховують тривалість нагріву вище заданої температури при однопрохідному зварюванні листів з наскрізним проплавленням?
16. Як розрахувати ширину зони нагріву, що нагрівається вище заданої температури  $t_1$ ?
17. Як розрахувати нагрів і охолодження стрижнів при контактному зварюванні в стик?
18. У чому особливість розрахунку теплових процесів при точковому зварюванні?
19. Як здійснюється розрахунок температур при зварюванні різнорідних матеріалів?
20. Як розраховують теплові процеси при роликовому зварюванні?

#### Тестові завдання

**1. Нагрів електрода в процесі зварювання відбувається під дією таких джерел теплоти:**

- а) електричної дуги, що діє на прилягаючу до торця ділянку довжиною 5–10 мм;
- б) що виникає в об'ємі електродного стрижня в результаті опору електрода при проходженні струму;

в) що виникає в об'ємі електродного стрижня в результаті опору електрода при проходженні струму і теплою електричної дуги, що діє на прилягаючу до торця ділянку довжиною 5–10 мм;

г) електричної дуги, що діє на прилягаючу до торця ділянку довжиною 10–20 мм.

**2. Рівняння теплового балансу нагріву стрижня в результаті проходження через нього струму для одиниці довжини стрижня має вигляд:**

$$\text{а) } c\rho \frac{dt}{d\tau} F = \rho_r \gamma^2 F - \beta(t - t_0) \Pi; \quad \text{в) } c\rho \frac{dt}{d\tau} F = \alpha_r \gamma^2 F - \alpha(t - t_0) \Pi;$$

$$\text{б) } c\rho \frac{dt}{d\tau} F = \rho_r \gamma^2 F - \alpha(t - t_0) \Pi; \quad \text{г) } c\beta \frac{dt}{d\tau} F = \rho_r \gamma^2 F - \omega(t - t_0) \Pi.$$

**3. Температуру нагріву струмом електрода з маловуглецевого сталюго дроту можна розрахувати за формулою:**

$$\text{а) } \frac{1 + \beta t}{\omega_0 + \omega(t_0 - t)} = \frac{1 + \beta t_0}{\omega_0} e^{[\beta\omega_0 + b_0(1 + \beta t_0)]\tau};$$

$$\text{б) } \frac{1 + \beta t}{\omega_0 + b_0(t_0 - t)} = \frac{1 + \beta t_0}{\omega_0} e^{[\beta\omega_0 + b_0(1 + \beta t_0)]\tau};$$

$$\text{в) } \frac{1 + \beta t}{\omega_0 + \omega(t_0 - t)} = \frac{1 + \alpha t_0}{\omega_0} e^{[\beta\omega_0 + b_0(1 + \beta t_0)]\tau};$$

$$\text{г) } \frac{1 + \beta t}{\omega_0 + b_0(t_0 - t)} = \frac{1 + \beta t_0}{\alpha} e^{[\beta\omega_0 + b_0(1 + \beta t_0)]\tau}.$$

**4. Рівняння процесу розплавлення електрода має вигляд:**

$$\text{а) } \eta_e UI = \omega F \rho (h_k - h_T); \quad \text{б) } \eta_e UR = \omega F \rho (h_k - h_T);$$

$$\text{в) } \eta_e UI = \omega F \alpha (h_k - h_T); \quad \text{г) } \eta_e UI = \omega V \rho (h_k - h_T).$$

**5. Зварні з'єднання можна розділити на такі групи з'єднання:**

а) в яких деталі зварюються без присадкового металу;

б) для здійснення яких необхідний присадковий метал;

в) для здійснення яких необхідний присадковий метал і з'єднання в яких деталі зварюються без присадкового металу;

г) в яких деталі зварюються в результаті тертя.

**6. Повний тепловий коефіцієнт корисної дії при зварюванні – це:**

$$\text{а) } \eta_{\Pi} = \frac{\eta_e}{\eta_t}; \quad \text{б) } \eta_{\Pi} = \eta_e \eta_t; \quad \text{в) } \eta_{\Pi} = \eta_e + \eta_t; \quad \text{г) } \eta_{\Pi} = \frac{q_{\Pi}}{q_D}.$$

**7. Термічний цикл зварювання – це зміна:**

- а) температури від закінчення нагрівання при зварюванні до повного охолодження, тобто зміна температури в точці зварювання в часі і просторі;
- б) температури від початку нагрівання при зварюванні до повного охолодження, тобто зміна температури в точці зварювання в часі;
- в) температури від початку нагрівання при зварюванні до певного охолодження, тобто зміна температури в точці зварювання в просторі;
- г) теплового потоку від початку нагрівання при зварюванні до повного охолодження, тобто зміна теплового потоку в точці зварювання в часі.

**8. Основними параметрами термічного циклу є:**

- а) максимальна температура нагрівання; швидкість охолодження; тривалість перебування металу вище заданої температури;
- б) тривалість перебування металу вище заданої температури;
- в) максимальна температура нагрівання;
- г) швидкість охолодження.

**9. Параметри зварювальної ванни – це її:**

- а) довжина  $L$ , ширина  $B$ , глибина  $H$ , глибина кратера  $H_k$ ;
- б) довжина  $L$ , ширина  $B$ ;
- в) глибина  $H$ , глибина кратера  $H_k$ ;
- г) ширина  $B$ , глибина  $H$ .

**10. Термічний коефіцієнт корисної дії при зварюванні – це:**

- а)  $\eta_t = \frac{q_n}{q_d}$ ;    б)  $\eta_t = \frac{q_e}{q_d}$ ;    в)  $\eta_t = \frac{q_n}{q_e}$ ;    г)  $\eta_t = \frac{q_e}{q_n}$ .

## ІНТЕНСИФІКАЦІЯ ПІЗНАВАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ ПРИ ВИВЧЕННІ КУРСУ

---

- Завдання алгоритмічної дії
- Завдання ретроспективно-варіативного типу
- Завдання частково-пошукової дії
- Задачі творчої дії

На сьогодні в Україні відбувається модернізація освітньої галузі, яка обрала шлях кардинальних реформ поліпшення якості освіти і входження до європейського освітянського простору. В умовах Болонської декларації, однією з центральних позицій європейської вищої освіти виступає контроль її якості відповідно до стандартів транснаціональної освіти [21]. Перед учасниками Болонської угоди, у т. ч. Україною, що підписала декларацію 19 травня 2005 р. у м. Бергені, постає завдання розробки спільної системи конвертування критеріїв оцінювання якості знань та сформованості професійних якостей спеціаліста, системи відносної вартості прийнятих залікових одиниць відповідно до вимог європейської системи зарахування.

За вимогами міжнародних стандартів, якість освіти можна тлумачити як сукупність властивостей та характеристик освітнього процесу або його результату, що дають змогу задовольняти освітні потреби усіх суб'єктів навчально-виховного процесу: особистості, яка навчається, держави, суспільства загалом [18, 20].

Сьогодні вимагається засвоєння знань, які опираються не тільки на сприймання студентами ідей, а й на їх генерування у процесі вивчення теплотехнічних дисциплін, тобто постає проблема напрацювання конкретних методик, творчого засвоєння наукового багажу. Необхідна перебудова свідомості і відношення до навчання в цілому. Студент повинен прикласти певні зусилля для того, щоб

набути знання, а його інтереси проявляються у процесі діяльності. До компонентів діяльності відносять: образ кінцевого продукту (задаються питання, що містяться у завданні); предмет перетворення (умови завдання); засоби діяльності (таблиці, карти, схеми, графічні залежності, програми ЕОМ); технологія роботи (послідовність, за якою повинне розв'язуватись завдання, виконуватись курсовий проект тощо) [28].

Ці компоненти існують у двох формах: об'єктивно поза студентом у розумінні викладача та об'єктивні (зовнішні) як елементи техніки. Діяльність студента складається з цих компонентів, але вони є вже суб'єктивними (внутрішня форма розумової діяльності студента). Цей вид діяльності називається орієнтаційною основою діяльності. Об'єктивні умови діяльності визначають орієнтаційні основи діяльності. Якість знань студентів визначається орієнтаційною основою діяльності. Якщо орієнтаційна основа повна, то якість визначається не тільки станом науки і техніки, але й методикою викладання. У зв'язку з цим доцільно практичні знання з курсу “Термодинаміка і теплові процеси зварювання” починати з розв'язання алгоритмічних завдань з переходом до ретроспективно-варіантних, далі частково-пошукових, закінчуючи завданнями творчого плану [10, 16].

### 13.1. Завдання алгоритмічної дії

Алгоритмічна діяльність може здійснюватись за зразком і ці завдання схожі між собою. Якщо ж завдання різняться між собою, то це задачі за поданням. У них є елемент самостійності.

Завдання цього типу мають за мету перевірити знання студентів з практичного застосування розділів “Термодинаміка”, “Теплопередача” і “Теплові процеси при зварюванні” (задачі 1–20).

**Задача 1.** Розрахувати термічний опір пакета, що складається з сталюї пластини товщиною  $\delta_1 = 15$  мм, з коефіцієнтом теплопровідності  $\lambda_1 = 41,8$  Вт/м·град. і шару флюсу товщиною  $\delta_2 = 12$  мм, з коефіцієнтом теплопровідності  $\lambda_2 = 0,3$  Вт/м·град. Коефіцієнт тепловіддачі від поверхні флюсу до повітря  $\alpha = 15$  Вт/м<sup>2</sup>·град.

#### Розв'язок

Стальну пластину з нанесеним шаром флюсу можна розглядати як двошарову стінку, термічний опір кожного шару якої  $R_i$  до-

рівнює  $\delta_i/\lambda_i$ , де  $\delta_i$  – товщина шару  $m$ ;  $\lambda_i$  – коефіцієнт теплопровідності шару, Вт/м·град. Термічний ж опір тепловіддачі від поверхні флюсу в навколишнє середовище  $R_3$  рівний  $1/\alpha$ . Повний термічний опір пакета можна визначити за формулою:

$$R = \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{1}{\alpha} = \frac{0,015}{41,8} + \frac{0,012}{0,3} + \frac{1}{15} = 0,107 \text{ м}^2\cdot\text{град./Вт.}$$

**Задача 2.** Визначити коефіцієнт теплопровідності матеріалу металевієї пластини товщиною  $\delta = 50$  мм якщо ефективна теплова потужність електричної дуги, що проходить через неї при зварюванні  $q_e = 2000$  Вт, площа поверхні  $F = 0,1$  м<sup>2</sup>, а різниця температур на поверхнях стінки  $\Delta t_{cm} = 21,5$  °С.

**Розв'язок**

Коефіцієнт теплопровідності визначаємо за формулою:

$$q = \frac{\lambda}{\delta}(t_{cm1} - t_{cm2}) = \frac{\lambda}{\delta}\Delta t_{cm};$$

$$\lambda = \frac{q\delta}{\Delta t_{cm}} = \frac{q_e\delta}{F\Delta t_{cm}} = \frac{2000 \cdot 0,05}{0,1 \cdot 21,5} = 46,5 \text{ Вт/м}\cdot\text{град.}$$

**Задача 3.** Визначити середню масову ізобарну теплоємність повітря в інтервалі температур 200–900 °С враховуючи, що залежність теплоємності від температури лінійна. Для розрахунку використати одну з інтерполяційних формул для теоретичного визначення середньої теплоємності повітря в інтервалі температур 0–1000 °С:

$$\bar{c}_{\mu p} = 28,8270 + 0,0027080(t_{ex} + t_{вих}), \text{ кДж/моль}\cdot\text{град.};$$

$$\bar{c}_v = 0,7084 + 0,00009349(t_{ex} + t_{вих}), \text{ кДж/кг}\cdot\text{град.};$$

$$\bar{c}_p = 0,9952 + 0,0027080(t_{ex} + t_{вих}), \text{ кДж/кг}\cdot\text{град.}$$

**Задача 4.** Визначити середню молярну ізобарну теплоємність повітря в інтервалі температур 140–260 °С враховуючи, що залежність теплоємності від температури лінійна. Для розрахунку використати одну з інтерполяційних формул для теоретичного визначення середньої теплоємності повітря в інтервалі температур 0–1000 °С:

$$\bar{c}_{\mu p} = 28,8270 + 0,0027080(t_{ex} + t_{вих}), \text{ кДж/моль}\cdot\text{град.};$$

$$\bar{c}_v = 0,7084 + 0,000009349(t_{ex} + t_{вих}), \text{ кДж/кг}\cdot\text{град.};$$

$$\bar{c}_p = 009952 + 000027080(t_{ex} + t_{vux}), \text{ кДж/кг}\cdot\text{град.}$$

**Задача 5.** Визначити густину теплового потоку та тепловий потік, який передається теплопровідністю через зовнішню стінку приміщення будинку. Стінка цегляна товщиною  $\delta_1 = 380$  мм, висотою  $H = 3,3$  м, довжиною  $l = 4,0$  м, потинькована з обох боків цементно-піщаним розчином товщиною  $\delta_2 = 20$  мм. Температура на поверхнях стінки  $t_{cm1} = 18$  °С,  $t_{cm2} = -16,8$  °С. Коефіцієнт теплопровідності цегляної кладки  $\lambda_1 = 0,7$  Вт/м·град. і цементно-піщаного тиньку  $\lambda_2 = 0,76$  Вт/м·град.

**Розв'язок**

Термічний опір багат шарової плоскої стінки визначаємо за формулою:

$$\sum R_{\lambda i} = \frac{\delta_1}{\lambda_1} + 2 \left( \frac{\delta_2}{\lambda_2} \right) = \frac{0,38}{0,7} + 2 \left( \frac{0,02}{0,76} \right) = 0,543 + 0,053 = 0,596 \text{ м}^2\cdot\text{град./Вт.}$$

Густину теплового потоку визначаємо за формулою:

$$q = \frac{t_{cm1} - t_{cm2}}{\sum R_{\lambda i}} = \frac{18 - (-16,8)}{0,596} = 58,39 \text{ Вт/м}^2.$$

Тепловий потік буде дорівнювати:

$$Q = qF = qHl = 58,39 \cdot 3,3 \cdot 4,0 = 770,74 \text{ Вт.}$$

**Задача 6.** Використовуючи вихідні дані задачі 5, визначити коефіцієнт тепловіддачі вільної конвекції зі сторони зовнішньої поверхні стіни до навколишнього повітря з температурою  $t_s = -18$  °С.

Критеріальні рівняння.

1. Ламінарний режим витікання:

$$Nu = 0,63(Gr Pr)^{0,25}; \quad (10^3 < Gr Pr < 10^{10}).$$

2. Турбулентний режим витікання:

$$Nu = 0,15(Gr Pr)^{0,33}; \quad (Gr Pr \geq 10^{10}).$$

У наведених формулах за визначаючий розмір приймається висота стіни  $H$ , а за визначаючу температуру – температура навколишнього середовища на віддалі від поверхні, що нагрівається.

Розрахунок виконати при висоті  $H = 3,3$  м, різниця температур  $\Delta t = t_3 - t_{cm2} = 1,2$  °С.

**Задача 7.** Визначити коефіцієнт тепловіддачі при вимушеній конвекції з сторони зовнішньої поверхні циліндричної металевої труби з зовнішнім діаметром  $d_3 = 200$  мм, що зварюється електричною дугою, при поперечному її обдуванні потоком повітря з швидкістю 1 м/с і температурою  $t_3 = 15$  °С. Для розрахунку використати критеріальне рівняння:

$$Nu = 0,026 Re^{0,8} Pr^{0,33}.$$

Ця залежність характеризує тепловіддачу при поперечному обтіканні одиничного циліндра. Визначаючою є температура потоку, що набігає, а за визначаючий розмір приймається еквівалентний діаметр –  $d_e$ . Умовно вважаємо, що  $d_e = d_3$ .

**Задача 8.** Визначити втрати теплоти випромінюванням з одного погонного метра паропроводу, якщо діаметр його 0,35 м, коефіцієнт поглинання 0,85, температура поверхні 700 К, температура навколишнього середовища 310 К.

**Задача 9.** Визначити потік променевого випромінювання між двома паралельно розташованими поверхнями з температурою  $T_1 = 1000$  град. і  $T_2 = 600$  град. Коефіцієнт випромінювання першої поверхні  $5,8$  Вт/м<sup>2</sup>·град.<sup>4</sup>, другої  $4,0$  Вт/м<sup>2</sup>·град.<sup>4</sup>. Коефіцієнт випромінювання абсолютно чорного тіла  $5,67$  Вт/м<sup>2</sup>·град.<sup>4</sup>.

**Задача 10.** Між двома поверхнями встановлено екран. Коефіцієнти випромінювання поверхонь  $C_1 = C_2 = 4,3$  Вт/м<sup>2</sup>·град.<sup>4</sup>, а температури  $T_1 = 620$  град. і  $T_2 = 280$  град., відповідно.

Визначити тепловий потік випромінювання до і після встановлення екрану, якщо  $C_{exp} = C_1 = C_2$ .

**Задача 11.** Визначити середню масову ізохорну теплоємність повітря в інтервалі температур 100–800 °С враховуючи, що залежність теплоємності від температури лінійна. Для розрахунку використати одну з інтерполяційних формул для теоретичного визначення середніх теплоємностей повітря в інтервалі температур 0–1000 °С:

$$\bar{c}_{up} = 28,8270 + 0,0027080(t_{ex} + t_{eux}), \text{ кДж/моль}\cdot\text{град.};$$

$$\bar{c}_v = 0,7084 + 0,00009349(t_{ex} + t_{eux}), \text{ кДж/кг}\cdot\text{град.};$$

$$\bar{c}_p = 0,9952 + 0,0027080(t_{ex} + t_{eux}), \text{ кДж/кг}\cdot\text{град.}$$

**Задача 12.** Плоску сталеву поверхню завтовшки  $\delta_1 = 20$  мм, температурою  $t_{c1} = 400$  °С потрібно ізолювати мінеральною ватою ( $\lambda = 0,05$  Вт/м·град.) так, щоб втрати теплоти не перевищували  $300$  Вт/м<sup>2</sup> за температури поверхні ізоляції  $t_{c3} = 30$  °С. Знайти товщину ізоляції.

**Задача 13.** Віконна рама розмірами: висота –  $1,5$  м, ширина –  $1,0$  м, складається з двох шарів скла завтовшки  $4$  мм кожний. Між шарами скла знаходиться шар сухого повітря завтовшки  $7$  мм, який не переміщується. Перепад температури між внутрішньою і зовнішньою поверхнями рамки  $25$  °С. Визначити втрату теплоти через скло.

**Задача 14.** Сталеву трубу ( $\frac{d_1}{d_2} = \frac{11}{110}$  мм і  $\lambda_1 = 50$  Вт/м·град.)

покрита двома шарами ізоляції  $\delta_2 = 20$  мм з  $\lambda_2 = 0,1$  Вт/м·град. і  $\delta_3 = 30$  мм з  $\lambda_3 = 0,05$  Вт/м·град. Температура внутрішньої поверхні труби  $t_{c1} = 400$  °С і зовнішньої поверхні ізоляції  $t_{c4} = 40$  °С. Визначити втрати теплоти через один погонний метр ізоляції і температури на межі дотику окремих шарів.

**Задача 15.** Площа цегляної стінки будівлі дорівнює  $60$  м<sup>2</sup>. Товщина стінки  $\delta = 380$  мм. Коефіцієнт теплопровідності цегли  $\lambda = 0,7$  Вт/м·град. Температура повітря в приміщенні  $t_{p1} = 20$  °С, температура зовнішнього повітря  $t_{p2} = -15$  °С. Коефіцієнт тепловіддачі від повітря до внутрішньої поверхні стінки  $\alpha_1 = 10$  Вт/м<sup>2</sup>·град., коефіцієнт тепловіддачі від зовнішньої поверхні стінки до повітря  $\alpha_2 = 22$  Вт/м<sup>2</sup>·град. Визначити добову втрату теплоти через стінку, температури внутрішньої і зовнішньої поверхонь стінки.

**Задача 16.** Площа вікон приміщень будинку  $800$  м<sup>2</sup>. Температура повітря в приміщенні  $t_{p1} = 20$  С, температура зовнішнього повітря  $t_{p2} = -7$  °С. Вікна мають два скла, завтовшки  $\delta_c = 3$  мм кожне, і між ними шар нерухомого сухого повітря завтовшки  $\delta_n = 7$  мм. Коефіцієнт тепловіддачі від повітря до скла всередині приміщення  $\alpha_1 = 10$  Вт/м<sup>2</sup>·град., а від скла до зовнішнього повітря  $\alpha_2 = 15$  Вт/м<sup>2</sup>·град. Визначити яку кількість теплоти треба ввести в приміщення для опалення за добу.

**Задача 17.** Визначити теплообмін випромінюванням між двома великими паралельно розташованими поверхнями з площею кожної  $F = 10 \text{ м}^2$  і температурами  $T_1 = 800 \text{ К}$  і  $T_2 = 300 \text{ К}$ . Коефіцієнт випромінювання першої поверхні  $C_1 = 5,1 \text{ Вт/м}^2\cdot\text{град.}^4$ , а другої  $C_2 = 4,3 \text{ Вт/м}^2\cdot\text{град.}^4$ . Втрати теплоти боковими поверхнями не враховувати.

**Задача 18.** Між двома поверхнями з площею кожної  $F = 20 \text{ м}^2$  встановлено екран такої ж площі поверхні, коефіцієнти випромінювання їх рівні  $C_1 = C_2 = 4,9 \text{ Вт/м}^2\cdot\text{град.}^4$ , а температури, відповідно,  $T_1 = 600 \text{ град.}$  і  $T_2 = 350 \text{ град.}$  Визначити теплообмін випромінюванням до і після встановлення екрану, а також температуру екрану, якщо  $C_{\text{екр}} = C_1 = C_2$ .

**Задача 19.** У скільки разів зменшиться теплообмін випромінюванням між двома поверхнями з коефіцієнтами випромінювання  $C_1 = C_2 = 5,3 \text{ Вт/м}^2\cdot\text{град.}^4$ , якщо між ними встановити екран з полірованого нікелю і коефіцієнтом випромінювання  $C_{\text{екр}} = 0,4 \text{ Вт/м}^2\cdot\text{град.}^4$ ?

**Задача 20.** Визначити повний термічний опір, еквівалентний коефіцієнт теплопровідності і густину теплового потоку, що проходить через пакет, який складається з трьох шарів товщиною  $\delta_i$  і коефіцієнтом теплопровідності  $\lambda_i$ .

Перший шар  $\delta_1 = 10 \text{ мм}$ ,  $\lambda_1 = 0,50 \text{ Вт/м}\cdot\text{град.}$ , другий шар  $\delta_2 = 20 \text{ мм}$ ,  $\lambda_2 = 50 \text{ Вт/м}\cdot\text{град.}$ , третій шар  $\delta_3 = 15 \text{ мм}$ ,  $\lambda_3 = 15 \text{ Вт/м}\cdot\text{град.}$  Температура внутрішньої поверхні пакета  $t_1 = 35 \text{ }^\circ\text{C}$ , температура зовнішньої поверхні пакета  $t_2 = 5 \text{ }^\circ\text{C}$ .

### 13.2. Завдання ретроспективно-варіативного типу

Завдання ретроспективно-варіативного типу будують на певній орієнтаційній основі. Щоб розв'язати завдання такого типу, коли невідома технологія роботи, використовують два шляхи: перший – студент шукає аналогію в розв'язку завдань і розв'язує їх за зразком як алгоритмічні, другий – розв'язує їх з використанням інтуїції.

Завдання з невідомими для розв'язку викликають певні труднощі і такі завдання на практиці майже не зустрічаються. Завдання, в яких відсутній образ кінцевого продукту, є завданнями професіо-

нального спрямування. Розв'язуючи їх, відповідають на питання: що можна сконструювати або яку графічну залежність можна отримати?

Прикладом таких задач є задачі 21–40.

**Задача 21.** Використовуючи першу і другу форми запису першого закону термодинаміки та формулу, яка визначає ентальпію і внутрішню енергію через теплоємність, знайти рівняння Клапейрона у формі  $p\nu = RT$ .

**Розв'язок**

Для розв'язання задачі такого типу, коли невідома технологія роботи необхідно спочатку записати:

а) першу аналітичну форму запису першого закону термодинаміки:

$$\delta q = du + p dv; \quad (13.1)$$

б) другу аналітичну форму запису першого закону термодинаміки:

$$\delta q = dh - v dp; \quad (13.2)$$

в) формулу, що визначає питому ентальпію через теплоємність:

$$dh = c_p dT; \quad (13.3)$$

г) формулу, що визначає питому внутрішню енергію через теплоємність:

$$du = c_v dt. \quad (13.4)$$

Після цього необхідно вирази для питомої внутрішньої енергії (13.4) і питомої ентальпії (13.3) через теплоємність підставити в першу (13.1) і другу (13.2) форми запису першого закону термодинаміки:

$$\delta q = c_v dT + p dv;$$

$$\delta q = c_p dT - v dp.$$

Прирівнюємо два останні вирази:

$$c_v dT + p dv = c_p dT - v dp. \quad (13.5)$$

Далі виконаємо такі перетворення:

$$(c_p - c_v) dT = p dv + v dp.$$

Оскільки згідно з рівнянням Майєра:

$$c_p - c_v = R, \quad (13.6)$$

то отримаємо:

$$RdT = dpv. \quad (13.7)$$

Проінтегруємо останній вираз:

$$\int RdT = \int dpv. \quad (13.8)$$

Отримаємо рівняння Клапейрона:

$$RT = pv. \quad (13.9)$$

**Задача 22.** Запишіть у диференціальній формі перший закон термодинаміки для політропного процесу при  $n = 1$ .

**Задача 23.** Знаючи середні теплоємності від  $0^\circ\text{C}$  до  $t^\circ\text{C}$ , як розрахувати середню теплоємність в інтервалі температур від  $t_1$  до  $t_2$ ? Яка з теплоємностей від  $0^\circ\text{C}$  до  $t_1$ , від  $0^\circ\text{C}$  до  $t_2$  чи від  $t_1$  до  $t_2$  буде мати найбільше чисельне значення і чому? Проілюструйте це на графічній залежності  $c = f(t)$ .

**Задача 24.** Використовуючи визначення ентропії, теплоємності, першу і другу форми запису першого закону термодинаміки встановити, що для оборотного ізобарного процесу  $ds = dh/T$ , оборотного ізохорного процесу  $ds = du/T$ , оборотного ізотермічного процесу  $ds = pdv/T$ , для ізоентальпного процесу  $ds = -vdp/T$ .

**Задача 25.** Записати вираз для знаходження площі теплообміну для циліндричного теплообмінника при теплопередачі від гарячої рідини до холодної через двошарову стінку.

**Задача 26.** Записати в диференціальній та інтегральній першій формі перший закон термодинаміки політропного процесу, для якого  $n = +\infty$ .

**Задача 27.** До 5 кг газу теплового двигуна підведено 3000 кДж теплоти. Разом з випускними газами втрачено 400 кДж/кг теплоти і 10 % теплоти втрачено на необоротність процесу. Знайти термічний коефіцієнт корисної дії оборотного і необоротного процесів.

**Задача 28.** Записати першу диференціальну та інтегральну форми запису першого закону термодинаміки для кінцевого ізодінамічного процесу.

**Задача 29.** Записати в диференціальній та інтегральній другій формі запису перший закон термодинаміки політропного процесу, для якого  $n = 0$ .

**Задача 30.** Записати формулу для визначення теплового потоку теплопередачі складним теплообміном від гарячого газу до холодного через двошарову циліндричну стінку.

**Задача 31.** Записати рівняння подібності для розрахунку коефіцієнта тепловіддачі при вимушеному турбулентному русі в трубі і пояснити які критерії подібності і чому входять до складу цього рівняння.

**Задача 32.** Записати першу інтегральну форму запису першого закону термодинаміки для кругового ізобарного процесу ідеального газу.

**Задача 33.** Записати вираз для коефіцієнта теплопередачі від продуктів згорання до підігрітої води через металеву циліндричну поверхню, покриту з одного боку іржею, а з другого боку відкладеннями вуглецю.

**Задача 34.** Навести формулу для розрахунку термічного опору теплопередачі від гарячої рідини до холодної через тришарову циліндричну стінку.

**Задача 35.** За допомогою рівняння ідеального газу (рівняння Клапейрона) визначити фізичний зміст і розмірність питомої газової сталості.

**Задача 36.** Як зміниться коефіцієнт теплопередачі через багатошарову плоску стінку, якщо збільшиться товщина і зменшиться теплопровідність кожного шару? Від яких величин залежить повний термічний опір багатошарової плоскої стінки?

**Задача 37.** Записати формулу для визначення лінійної густини теплового потоку, що передається від гарячої рідини до холодного газу через тришарову циліндричну стінку.

**Задача 38.** Записати в диференціальній і інтегральній другій формі перший закон термодинаміки для політропного процесу при  $n = k$ .

**Задача 39.** Зобразіть графік розподілу температур по товщині плоскої стінки, якщо товщина її зростає в 1,5 рази, а коефіцієнт теплопровідності у три рази. Відповідь обґрунтуйте аналітично.

**Задача 40.** Зобразіть графік розподілу температур по товщині тришарової плоскої стінки, якщо товщини шарів однакові, а коефіцієнти теплопровідності різні, причому  $\lambda_1 < \lambda_2 > \lambda_3$ . Відповідь обґрунтуйте аналітично.

### 13.3. Завдання частково-пошукової дії

У завданнях частково-пошукової дії відсутні два з чотирьох компонентів діяльності. При розв'язанні завдань цього типу зростає свобода дій для студентів. Розв'язуючи завдання цього типу студенти використовують досвід та кмітливість (задачі 41–50).

**Задача 41.** У заводському приміщенні необхідно теплоізулювати горизонтальний паропровід діаметром 50 мм. Температура поверхні паропроводу 80 °С, а температура навколишнього повітря 20 °С. Обґрунтувати аналітично вибір теплоізоляційного матеріалу.

#### Розв'язок

Згідно критичного діаметра теплової ізоляції умовою вірного вибору теплоізоляційного матеріалу є:

$$\lambda_{iz} \leq \frac{\alpha_2 d_2}{2},$$

де  $\lambda_{iz}$  – коефіцієнт теплопровідності теплоізоляційного матеріалу, Вт/м·град.;  $\alpha_2$  – коефіцієнт тепловіддачі від поверхні паропроводу до навколишнього середовища, Вт/м<sup>2</sup>·град.;  $d_2$  – зовнішній діаметр паропроводу, м.

Коефіцієнт тепловіддачі  $\alpha_2$  знаходимо з рівняння подібності:

$$Nu = c(Gr Pr)^n (Pr_p / Pr_{cm})^{0,25},$$

де Nu – число Нусельта; Gr – число Грасгофа; Pr – число Прандтля.

Множник  $(Pr_p / Pr_{cm})^{0,25}$  враховує залежність фізичних властивостей середовища (в основному від в'язкості), температури і напрямку теплового потоку. Критерій  $Pr_p$  визначаємо при середній

температурі рідини, а критерій  $Pr_{cm}$  – при середній температурі стінки. Для газів  $Pr = \text{const}$  і  $(Pr_p/Pr_{ст.}) = 1$ , то приведена розрахункова формула спрощується;  $c$  і  $n$  – постійні коефіцієнти, значення яких залежить від режиму руху середовища і є функціями добутку  $GrPr$ .

Усі фізичні константи, що входять до складу критеріїв, вибираємо при температурі середовища. Як визначаючий розмір в критеріях для горизонтальних труб приймають їх діаметр.

Визначаємо число Грасгофа за формулою:

$$Gr = g\beta\Delta t d^3 / \nu^2,$$

де  $g$  – прискорення вільного падіння,  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ ;

$\beta$  –  $1/T_{нов}$  – коефіцієнт об'ємного розширення повітря,  $\text{К}^{-1}$ ;

$\nu$  – кінематичний коефіцієнт в'язкості повітря,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;

При температурі зовнішнього середовища  $20^\circ\text{C}$  фізичні параметри для повітря такі [7]:

$$\lambda_{нов} = 2,593 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/м}\cdot\text{град.};$$

$$\nu_{нов} = 1,506 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с};$$

$$\beta = 1/T_{нов} = 1/293 = 3,4 \cdot 10^{-3} \text{ град.}^{-1};$$

Число  $Pr = 0,703$ .

За цих умов визначаємо добуток  $GrPr$ :

$$GrPr = \frac{g\beta\Delta t d^3}{\nu^2} \cdot Pr = \frac{9,81 \cdot 3,4 \cdot 10^{-3} \cdot 60 \cdot 0,05^3 \cdot 0,703}{(1,506 \cdot 10^{-5})^2} = 7,75 \cdot 10^5.$$

Для горизонтальних труб при  $10^3 < GrPr < 10^8$ , згідно з [7],  $c = 0,5$ , а  $n = 0,25$ .

Визначаємо коефіцієнт тепловіддачі:

$$Nu = (0,5GrPr)^{0,25} = 0,5(7,75 \cdot 10^5)^{0,25} = 14,84;$$

$$\alpha_2 = \frac{Nu \cdot \lambda_{нов}}{d_2} = \frac{14,84 \cdot 2,593 \cdot 10^{-2}}{0,05} = 7,7 \text{ Вт/м}^2\cdot\text{град.}$$

Знаходимо коефіцієнт теплопровідності теплоізоляційного матеріалу:

$$\lambda_{із} \leq \frac{\alpha_2 d_2}{2} = \frac{7,7 \cdot 0,05}{2} = 0,19 \text{ Вт/м}\cdot\text{град.}$$

**Задача 42.** Як знайти коефіцієнти  $c$ ,  $n$ ,  $m$  у рівнянні подібності  $Nu = cRe^n(GrPr)^m$ ? Який процес конвективного теплообміну описує це рівняння? Поясніть, які критерії і чому входять до складу цього рівняння?

**Задача 43.** Зобразити розподіл температур в теплоносіях і розділяючій їх циліндричній стінці при стаціонарній теплопередачі. Як зміниться розподіл температур, якщо при незмінних коефіцієнтах тепловіддачі  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  зменшиться коефіцієнт теплопровідності циліндричної стінки та величина теплового потоку?

**Задача 44.** Як зміниться температурна крива теплопередачі від гарячого теплоносія до холодного через стінку труби рекуперативного теплообмінника, якщо на стінці з боку гарячої рідини утворюється шар накипу, а з боку холодної рідини – шар іржі? Запишіть рівняння теплопередачі для вихідного стану стінки і після утворення накипу та іржі?

**Задача 45.** Зобразіть розподіл температур при теплопередачі від гарячого газу до холодної рідини через тришарову плоску стінку, якщо  $\lambda_1 > \lambda_2 = \lambda_3$ . Відповідь обґрунтуйте аналітично.

**Задача 46.** Як зміниться температурна крива теплопередачі через циліндричну стінку від гарячого повітря (всередині труби) до холодної води (зовні труби), якщо збільшиться коефіцієнт тепловіддачі від повітря до внутрішньої поверхні труби і коефіцієнт теплопровідності стінки. Запишіть рівняння складного теплообміну для цього випадку.

**Задача 47.** Зобразіть в  $T$ - $s$ -координатах прямий цикл Карно. Як зміниться цей цикл і його термічний коефіцієнт корисної дії при зниженні температури тепловіддавача? Відповідь обґрунтуйте аналітично.

**Задача 48.** Як зміниться коефіцієнт теплопровідності матеріалу з підвищенням його вологості? Чим пояснюється, що теплопровідність вологої цегли дорівнює  $1,0$  Вт/м·град., в той час як теплопровідність сухої цегли дорівнює  $0,35$  Вт/м·град., а води  $0,6$  Вт/м·град.? Така ж закономірність має місце і для інших пористих матеріалів.

**Задача 49.** Як зміниться температурна лінія передачі теплоти від гарячого газу до холодної рідини через однорідну плоску стінку, якщо її товщину збільшити в 1,5 разів, а коефіцієнт теплопровідності у три рази. Відповідь обґрунтуйте аналітично.

**Задача 50.** Як зміниться цикл Карно для теплового насоса, якщо температура тепловіддавача збільшиться, а температура теплоприймача зменшиться? Відповідь ілюструйте на  $T-s$ -,  $h-s$ -,  $p-v$ -координатах. Як при цьому зміниться кількість теплоти і роботи циклу? Як зміниться коефіцієнт використання теплоти?

#### 13.4. Задачі творчої дії

Розв'язання задач ретроспективно-варіативної і частково-пошукової дії складає проблемне навчання. Найбільш складним є задачі творчої дії. У цих задачах відсутні три з чотирьох компонентів діяльності (задачі 51–60).

**Задача 51.** Дослідити термічні процеси нагріву металевого масивного тіла при наплавці валика дуговим зварюванням та для одного з режимів зварювання (табл. 13.1) розрахувати і побудувати термічний цикл точок, що лежать на осі  $x$  при  $y = 0, z = 0$ , а також при  $y = 1, z = 0$ ; ізохрони в перерізах, перпендикулярних осі  $x$  та ізотерми в плані. Виконати аналіз отриманих результатів. Дати відповіді на такі питання: а) який спосіб передачі теплової енергії в металі, б) що є основним носієм теплової енергії в зварювальній дузі, в) від яких факторів залежить температура стовпа дуги при ручному електродуговому зварюванні, г) який з способів передачі теплоти від електроду до зварювальної поверхні металу переважає?

Таблиця 13.1 – Режими зварювання

Номер варіанта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Сила струму $I$ , А	400	450	500	500	450	400	450	400	450	400
Напруга дуги $U$ , В	28	30	32	30	32	32	34	34	30	28
Швидкість зварювання $\omega$ , см/с	0,3	0,4	0,5	0,3	0,4	0,5	0,6	0,5	0,4	0,3

#### Методика розрахунку

1. Розрахувати теплову потужність зварювальної дуги за формулою:

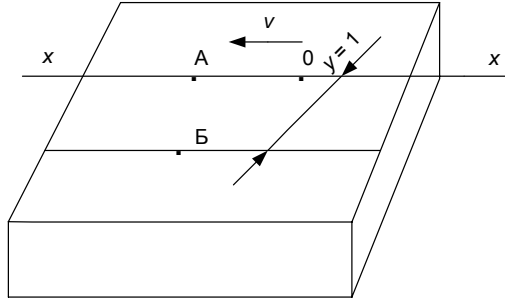
$$q_e = k \cdot q_d \cdot \eta_e = k \cdot I \cdot U_d \cdot \eta_e, \quad (13.10)$$

де  $q_d$  – теплова потужність дуги, Дж/с;

$k$  – коефіцієнт, що враховує вплив несинусоїдальності кривих напруги та струму на потужність дуги (для постійного струму  $k = 1$ , змінного –  $k = 0,7 \dots 0,97$ );

$\eta_e$  – коефіцієнт відношення ефективної потужності дуги до її повної потужності. При зварюванні електродом, що плавиться, з покриттям  $\eta_e = 0,7 \dots 0,85$ .

2. Розрахувати і побудувати термічний цикл точок, що лежать на осі  $x$  при  $y = 1$  та  $z = 0$ .



**Рис. 13.1 – Вибір точок для розрахунку характеру зміни температури в часі**

Термічний цикл – це зміна температури в часі заданих точок температурного поля, що утворюється при зварюванні.

Усі точки, однаково розташовані відносно осі  $x$  (шов зварювання), при квазістаціонарному полі будуть мати однаковий характер впливу теплової дії, тільки зміщені в часі. Так, той термічний цикл, що буде мати деяка точка  $A$ , буде таким і для будь-якої іншої точки, що лежить на осі руху джерела тепла. Цикл, що має точка  $B$ , буде також отриманий будь-якою іншою точкою, що лежить на прийнятій відстані,  $y = 1$  см від осі  $x$  (а також і точками з  $R = \sqrt{y^2 + z^2} = 1$  см).

Формула для визначення температури будь-якої точки тіла в будь-який момент часу в граничному стані має вигляд:

$$t(R, x) = \frac{q_e}{2\pi\lambda R} e^{-\frac{\omega_3}{2a_T}(x+R)}, \quad (13.11)$$

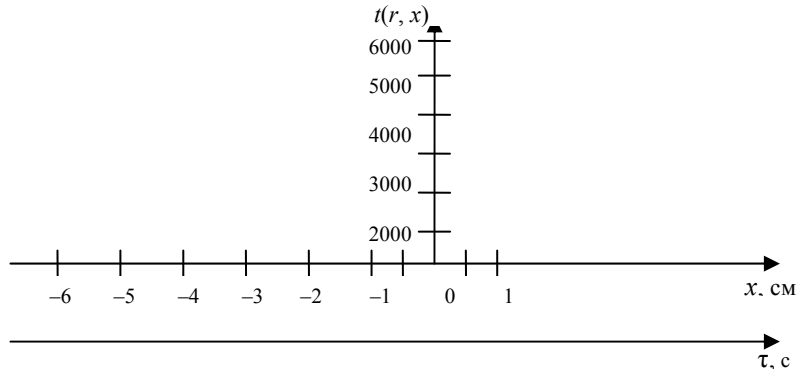
де  $R$  – відстань точки від джерела тепла, см ( $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ).

Для зручності розрахунків доцільно звести у таблицю 13.2.

**Таблиця 13.2 – Розрахункові значення температури  
характерних точок півнескінченного тіла**

$x$ , см	$y$ , см	$R$ , см	$(x + R)$ , см	$t(R, x)$	$e^{-\frac{\omega_3}{2a_T}(x+R)}$	$\frac{q_e}{2\pi\lambda R}$
1,0	0	1,0	2,0			
0,5	0	0,5	1,0			
0	0	0	0			
-0,5	0	0,5	0			
-1,0	0	1,0	0			
-2,0	0	2,0	0			
-4,0	0	4,0	0			
-6,0	0	6,0	0			
1,0	1,0	1,41	2,41			
0,5	1,0	1,12	1,62			
0	1,0	1,0	1,0			
-0,5	1,0	1,12	0,62			
-1,0	1,0	1,41	0,41			
-2,0	1,0	2,23	0,23			
-4,0	1,0	4,1	0,1			
-6,0	1,0	6,06	0,06			

Отриманні значення навести на рис. 13.2, причому на осі абсцис крім масштабу  $x$ , відкласти і масштаб часу  $\tau$ ,  $\tau = x/V$  с.



**Рис. 13.2 – Координатна сітка для побудови термічних циклів точок (для  $y = 0$  та  $y = 1$  см)**

3. Розрахувати і побудувати ізохрони в перетинах, перпендикулярних осі  $x$  при значеннях  $x = 1,0; -1,0; -2,0; -6,0$  см.

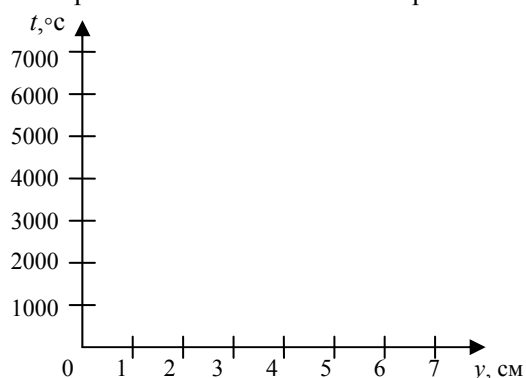
Ізохрони – це лінії температурного розподілення у визначеному поперечному перетині в різні проміжки часу. Для зручності побудови ізохрон результати розрахунків звести в таблицю 13.3.

**Таблиця 13.3 – Розрахунок температури різних точок для побудови ізохрон**

$x, \text{ см}$	$y, \text{ см}$	$R, \text{ см}$	$(x + R), \text{ см}$	$e^{-\frac{\omega_r}{2a_r}(x+R)}$	$\frac{q_e}{2\pi\lambda R}$	$T(R, x)$
1,0	0	1,0	2,0			
1,0	0,5	1,12	2,12			
1,0	1,0	1,41	2,41			
1,0	2,0	2,23	3,23			
-1,0	0	1,0	0			
-1,0	1,0	1,41	0,41			
-1,0	2,0	2,23	1,23			
-1,0	4,0	4,1	3,1			
-2,0	0	2,0	0			
-2,0	1,0	2,23	0,23			
-2,0	2,0	2,81	0,81			
-2,0	4,0	4,45	2,45			
-2,0	5,0	5,4	3,4			
-6,0	0	6,0	0			
-6,0	2,0	6,3	0,3			
-6,0	4,0	7,18	1,18			
-6,0	6,0	8,42	2,42			

-6,0	7,0	9,15	3,15			
------	-----	------	------	--	--	--

Отриманні значення навести на рис. 13.3 із побудовою ізохрон.



**Рис. 13.3 – Координатна сітка для побудови ізохрон при значеннях  $x = 1,0; -1,0; -2,0; -6,0$  см**

4. Розрахувати і побудувати ізотерми 300, 600 і 1500 °С у плані.

Графічно за отриманими ізохронами можна визначити координати у будь-якої температури при координатах  $x = 1,0; -1,0; -2,0; -6,0$  см в площині  $z = 0$ . У зв'язку з тим, що для площини на від'ємній півосі  $Ox$  (тобто для  $y$ ) в результаті перетворення формули (6.2) у вигляді:

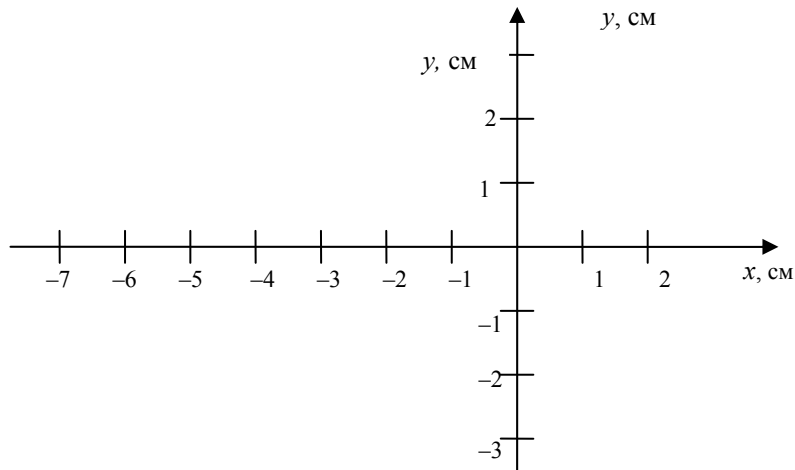
$$R = \frac{q_e}{2\pi\lambda \cdot t}, \quad (13.12)$$

(оскільки  $R = -x$ ) може бути отримана координата ( $-x$ ) для будь-якої температури, то в площині  $xOy$  можна побудувати температурне поле у вигляді ізоTERM.

Визначення координат точок, наприклад для побудови ізоТЕРМИ 300 °С можна виконати таким чином: з рис. 13.3 при температурі 300 °С, використовуючи ізохрони при  $x = 1,0; -1,0; -2,0; -6,0$ , знаходимо відповідні значення  $y_i$ .

З'єднавши на рис. 13.4 в координатній сітці ці точки плавною кривою, отримуємо вигляд ізоТЕРМИ 300 °С в розрахованому температурному полі, віднесеному до поверхні півнескінченного тіла, що нагрівається при наплавленні.

Так само слід побудувати ізоТЕРМИ 600 та 1500 °С у плані.



**Рис. 13.4 – Координатна сітка  
для побудови температурного поля в плані**

На температурному полі в плані, з'єднавши штриховою лінією точки ізотерм, при яких дотична до них паралельна осі  $x$ , отримаємо розташування кривої максимальних температур в площині  $xOy$ . Зона I перед цією кривою буде підвищувати температуру – нагріватися, а зона II – всередині кривої – охолоджуватися.

5. Короткі відповіді на теоретичні питання:

а) спосіб передачі теплоти в металі – теплопровідність;

б) основним носієм теплової енергії в зварювальній дузі є електричний розряд через газовий проміжок, що утворюється в результаті інтенсивної емісії електронів з катода і відповідної іонізації дугового проміжку;

в) температура стовпа дуги при ручному електродуговому зварюванні в основному визначається ступенем іонізації дугового проміжку і складом цього проміжку. Ця температура залежить також від сили струму, а також від поперечного перетину стовпа, що визначається зовнішнім тиском, дією зовнішнього магнітного поля;

г) при передачі теплоти від електрода зварювальної дуги до металу переважає спосіб передачі теплоти – випромінювання. Основне рівняння цього способу передачі теплоти – це рівняння Стефана–Больцмана:  $Q_{\tau} = \epsilon C_0 F [(T_{cm}/100)^4 - T_{нов}/100^4]$ .

**Задача 52.** Стальна швейна голка, що прошиває тришаровий пакет синтетичних матеріалів, охолоджується струменем води. Вказати, який з способів передачі теплоти: теплопровідність, конвекція чи теплове випромінювання переважає при різних режимах роботи швейної машини? Від яких факторів залежить температура нагріву голки швейної машини? Як при цьому розрахувати температуру нагріву голки?

**Задача 53.** Для охолодження блоку зварювального апарату використовується повітряна система охолодження. Який спосіб передачі теплоти від нагрітої зони до корпусу зварювального апарату буде переважати в процесі теплообміну? Відповідь обґрунтувати аналітично.

**Задача 54.** На поверхню масивного тіла наплавлено електродуговим зварюванням валик. Як розрахувати температуру в кінцевій точці валика через проміжок часу після закінчення наплавлення?

**Задача 55.** Для охолодження блоку зварювального апарату використовується рідинна система охолодження. Який спосіб передачі теплоти від нагрітої зони до корпусу зварювального апарату буде переважати в процесі теплообміну? Відповідь обґрунтуйте аналітично.

**Задача 56.** Розрахувати, на якій максимальній відстані від шва стальної пластини товщиною  $\delta$ , мм буде досягнута задана температура при зварюванні в заданому режимі (сила струму  $I$ , А, напруга дуги  $U_0$ , В, швидкість зварювання  $w_z$ , см/с). Для врахування поверхневої тепловіддачі розрахувати коефіцієнт тепловіддачі від поверхні нагрітої пластини після зварювання, якщо відомі температури поверхні і навколишнього середовища.

**Задача 57.** Виконати розрахунок теплового режиму горизонтально розташованої стальної труби після електродугового зварювання при охолодженні її водою. Який з способів теплообміну в цьому випадку переважає? Приведіть основне рівняння цього теплообміну.

**Задача 58.** На поверхню масивної плити з маловуглецевої сталі наплавляється валик. Відома ефективна теплова потужність зварювального джерела і швидкість наплавлення. Визначити ши-

рину зони нагріву вище заданої температури  $600\text{ }^{\circ}\text{C}$ , за якої сталь має дуже малу міцність.

**Задача 59.** Листи із маловуглецевої сталі товщиною  $\delta$  зварюють автоматичним способом під флюсом на режимі:  $I = 300\text{ A}$ ,  $U = 32\text{ B}$ ,  $\omega_s = 0,4\text{ см/с}$ . Визначити миттєву швидкість охолодження металу шва при  $t = 700\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

**Задача 60.** Листи зі сталі 40Х товщиною  $\delta$  зварюють під флюсом за один прохід з наскрізним проплавленням. Режим зварювання:  $I = 600\text{ A}$ ,  $U = 34\text{ B}$ ,  $\omega_s = 0,35\text{ см/с}$ . Визначити мінімальну температуру попереднього підігріву листів, яка буде забезпечувати швидкість охолодження металу при температурі  $600\text{ }^{\circ}\text{C}$ , що не перевищуватиме допустиму швидкість охолодження шовної зони  $\omega_{ох} = 3,5\text{ }^{\circ}\text{C/с}$ , вище якої метал гартується. Яку схему джерела при цьому необхідно використати?

Таким чином, застосування задач різних ступенів складності з поступовим переходом від задач алгоритмічної дії до задач ретроспективно-варіативної, частково-пошукової і на завершення творчої дії є одним з шляхів вдосконалення навчального процесу.

## ЛІТЕРАТУРА

---

1. Абрамова Б. Г. Цветные индикаторы температуры / Б. Г. Абрамова, В. Ф. Картавцева. – М. : Энергия, 1978. – 216 с.
2. Багрянский К. В. Теория сварочных процессов / К. В. Багрянский, З. А. Добротина, К. К. Хренов. – Х. : Вища школа, 1976. – 424 с.
3. Бруяка В. А. Инженерный анализ в ANSYS Workbench [Электронный ресурс] / В. А. Бруяка, В. Г. Фокин, Е. А. Солдусова. – Самара : Самарский гос. техн. университет, 2010. – 271 с. – Режим доступа: [http://mmm\\_sfvgu.ssu.samara.ru/polunkov/ansys\\_posob\\_ansys.pdf](http://mmm_sfvgu.ssu.samara.ru/polunkov/ansys_posob_ansys.pdf).
4. Василик А. В. Теплові розрахунки при зварюванні : навч. посібник / А. В. Василик, Я. М. Драгомирецький, Я. А. Криль. – Івано-Франківськ, 2004. – 209 с.
5. Волченко В. Н. О классификации процессов сварки / В. Н. Волченко // Автоматическая сварка. – К., 1970. – № 10. – С. 15–18.
6. Иванова Г. М. Теплотехнические измерения и приборы : учеб. для вузов / Г. М. Иванова, Н. Д. Кузнецов, В. С. Чистяков. – М. : Энергоатомиздат, 1984. – 232 с.
7. Исаченко В. П. Теплопередача : учебник / В. П. Исаченко, В. А. Осипова, А. С. Сукомел. – М. : Энергоиздат, 1981. – 416 с.
8. Калиткин Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – М. : Наука, 1978. – 512 с.
9. Кархин В. А. Основы теплопередачи при сварке и пайке [Электронный ресурс] / В. А. Кархин. – СПб., 2011. – 95 с. – Режим доступа: <http://dl.unilib.neva.ru/dl/2366.pdf>.
10. Колошина И. П. Проблемы формирования технического мышления / И. П. Колошина. – М. : Высшая школа, 1975. – 320 с.
11. Константинов С. М. Теплообмін : підручник / С. М. Константинов. – К. : ВПІ ВПК “Політехніка”: Інрес, 2005. – 304 с.
12. Коперсак В. М. Теорія процесів зварювання – 1. Джерела нагрівання та теплові процеси при зварюванні [Електронний ресурс] : текст лекцій / В. М. Коперсак. – К. : НТУУ “КПІ”, 2011. – 384 с. – Режим доступа: [http://weld.kpi.ua/files/lectures/tsp/tpz\\_lekc.pdf](http://weld.kpi.ua/files/lectures/tsp/tpz_lekc.pdf)

13. Королев Н. В. Расчеты тепловых процессов при сварке, наплавке и термической резке : учеб. пособие / Н. В. Королев. – Екатеринбург : Изд-во УГТУ, 1996. – 156 с.
14. Косенко А. А. Термодинамика и тепловые процессы при сварке : учеб. пособие / А. А. Косенко, А. Н. Кабанец. – Мариуполь : ПГТУ, 2009. – 258 с.
15. Краснощеков Е. А. Задачник по теплопередаче / Е. А. Краснощеков, А. С. Сукомел. – 2-е изд. перераб. и доп. – М. : Энергия, 1975. – 264 с.
16. Кудрявцев Т. В. Проблемы развития технического мышления / Т. В. Кудрявцев. – М. : Высшая школа, 1980. – 285 с.
17. Лабай В. Й. Тепломасообмін : підручник / В. Й. Лабай. – Л. : Тріада Плюс, 1998. – 260 с.
18. Моніторинг якості освіти: світові досягнення та українські перспективи / за заг. ред. О. І. Локшиної. – К. : К.І.С., 2004. – 128 с.
19. Недосека А. Я. Основы расчета и диагностики сварных конструкций / А. Я. Недосека. – К. : ИНДПРОМ, 1998. – 640 с.
20. Ніколаєнко С. М. Вища освіта – джерело соціально-економічного і культурного розвитку суспільства / С. М. Ніколаєнко. – К. : Знання, 2005. – 319 с.
21. Основні засади розвитку вищої освіти України в контексті Болонського процесу (документи і матеріали 2003–2004 рр.) / за ред. В. Г. Кременя. – Тернопіль : Вид-во ТДПУ ім. В. Гнатюка, 2004. – 147 с.
22. Петров Г. Л. Теория сварочных процессов / Г. Л. Петров, А. С. Тумарев. – М. : Высшая школа, 1977. – 392 с.
23. Расчет температурных полей в пластинах при электро-сварке плавлением : справочник / А. А. Казимиров, А. Я. Недосека, А. И. Лобанов [и др.]. – К. : Наукова думка, 1968. – 848 с.
24. Резников А. Н. Тепловые процессы в технологических системах / А. Н. Резников. – М. : Высшая школа, 1990. – 260 с.
25. Рыкалин Н. Н. Расчеты тепловых процессов при сварке / Н. Н. Рыкалин. – М. : Машгиз, 1951. – 296 с.
26. Сегерленд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерленд. – М. : Мир, 1979. – 392 с.
27. Сливінський О. А. Подвійна еліпсоїдна модель зварювального джерела нагрівання / О. А. Сливінський, А. О. Препіяло // Зварювання та споріднені процеси і технології : матер. п'ятої

- міжгалузевої наук.-техніч. конф. студ., аспірантів та наук. співробітників. – К. : НТУУ “КПІ” ; “МП Леся”, 2012. – С. 45–49.
28. Талызина Н. Ф. Проблемы управления процессами обучения / Н. Ф. Талызина. – М. : Высшая школа, 1976. – 290 с.
29. Теоретические основы сварки / В. В. Фролов, В. А. Винокуров, В. Н. Волченко [и др.]. – М. : Высшая школа, 1970. – 592 с.
30. Теория сварочных процессов : учебник / А. В. Коновалов, А. С. Куркин, Э. Л. Макаров [и др.] ; под ред. В. М. Неровного. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2007. – 752 с.
31. Теплотехника : учебник / В. Н. Луканин, М. Г. Шатров, Г. М. Камфер [и др.] ; под ред. В. Н. Луканина. – М. : Высшая школа, 1999. – 671 с.
32. Юдаев Б. Н. Техническая термодинамика и теплопередача / Б. Н. Юдаев. – М. : Высшая школа, 1988. – 479 с.
33. Goldak J. A new finite element model for welding heat source / J. Goldak, A. Chakravarti, M. Bibby // Metallurgical Trans. B. – 1984. – V. 15 B. – P. 299–305.
34. Krutz G. W. Finite element analysis of welded structures / G. W. Krutz, L. J. Segerlind // Welding J., Res. Suppl. – 1978. – V. 57. – P. 211–216.
35. Paley Z. Computation of temperatures in actual weld designs / Z. Paley, P. D. Hibbert // Welding J., Res. Suppl. – 1975. – V. 54. – P. 385–392.
36. Pavelic V. Experimental and computed temperature histories in gas tungsten arc welding of thin plates / V. Pavelic, R. Tanbakuchi, A. Uyehara, P. S. Myers // Welding J., Res. Suppl. – 1969. – V. 48. – P. 295–305.

## ДОДАТОК А

### Короткий довідник теплофізичних величин

**Таблиця А.1 – Теплофізичні характеристики матеріалів**

Матеріал	Коефіцієнт теплопровідності $\lambda$ , Вт/м·К	Об'ємна теплоємність $c \cdot \rho$ , МДж/м <sup>3</sup> ·К	Коефіцієнт температуропровідності $a_T, \cdot 10^{-6}$ , м <sup>2</sup> /с
Сталь:			
– маловуглецева	40,19	4,77	8,5
– вуглецева	37,68–46,05	4,77	7,9–9,6
– низьколегована	33,49–37,68	4,77	7,0–7,9
– хромиста	25,12	4,77	5,3
– хромонікелева	16,75–25,12	4,77	3,5–5,3
Алюміній	263,75	2,72	100
Алюмінієві сплави АМг-5, АМг-6	138,16–163,97	2,72	50–51
Мідь червона	376,81	3,98	95
Титан ВТ-1	17,58	3,55	5
Титанові сплави ОТ-4, ВТ5-8	14,24	3,55	4

**Таблиця А.2 – Орієнтовні значення коефіцієнта тепловіддачі, Вт/м<sup>2</sup>·К**

Тепловідвідні водоохолоджувані притискачі			Стальна неохолоджувана плита (поверхні плити очищені та знежирені)		Тепловіддача в повітря
мідні	алюмінієві	сталі	Тепловіддача		
Поверхня пластини травлена	Поверхня пластини травлена	Поверхня пластини знежирена	з однієї сторони	з двох сторін	12–25
3600–5600	3350–4200	300–2100	83–167	83–167	

Таблиця А.3 – Коефіцієнт теплопровідності газів, Вт/м·К ( $p = 101,3$  кПа)

Газ	Температура, °С			
	0	50	100	200
Азот	0,0233	0,0267	0,0314	0,0384
Аміак	0,0209	0,0256	0,0314	–
Водень	0,1628	0,1861	0,2210	0,2559
Водяна пара	0,0163	0,0198	0,0244	0,0326
Двоокис вуглецю	0,0140	0,0186	0,0233	0,0314
Кисень	0,0244	0,0291	0,0326	0,0407
Метан	0,0302	0,0361	0,0465	–
Окис вуглецю	0,0221	0,0244	–	–
Повітря	0,0244	0,0279	0,0326	0,0395

Таблиця А.4 – Фізичні параметри сухого повітря ( $p = 101,3$  кПа)

$t$ , °С	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$c_p$ , кДж/кг·К	$\lambda \cdot 10^{-2}$ , Вт/м·К	$a_T \cdot 10^{-6}$ , м <sup>2</sup> /с	$\mu \cdot 10^{-6}$ , Па·с	$\nu \cdot 10^{-6}$ , м <sup>2</sup> /с	Pr
0	1,293	1,005	2,44	18,8	17,5	13,53	0,720
10	1,247	1,005	2,51	20,1	18,0	14,43	0,718
20	1,205	1,005	2,51	21,4	18,5	15,06	0,717
30	1,165	1,005	2,67	22,9	19,0	16,31	0,712
40	1,128	1,005	2,76	24,3	19,5	17,29	0,712
50	1,093	1,005	2,83	25,7	20,0	18,30	0,712
60	1,060	1,005	2,90	27,2	20,5	19,34	0,712
70	1,029	1,009	2,97	28,7	21,0	20,41	0,711
80	1,000	1,009	3,05	30,2	21,5	21,5	0,711
90	0,972	1,009	3,13	31,9	21,9	22,53	0,706
100	0,946	1,009	3,21	33,6	22,3	23,57	0,701

Таблиця А.5 – Середня масова теплосмність твердих матеріалів\*

Алюміній	0,92	Мідь	0,385
Азбест	0,84	Пісок сухий	0,80
Бронза	0,385	Свинець	0,13
Залізо	0,50	Сталь	0,50
Каолін	0,92	Цинк	0,38
Кокс	0,84	Чавун	0,50
Латунь	0,394	Шлак	0,75
Кварц	0,80	Текстоліт	1,47

\*кДж/кг·К, для діапазону температур  $t = 0-100$  °С

Таблиця А.6 – Коефіцієнт теплового випромінювання різних матеріалів

Матеріал і характер поверхні	$t, ^\circ\text{C}$	$\varepsilon$
Алюміній:		
– полірований	225–575	0,039–0,057
– шорсткий	26	0,055
– окислений при 600 °С	200–600	0,11–0,19
Вольфрам	230–2230	0,053–0,31
Вольфрамова нитка	3300	0,39
Залізо:		
– електролітичне, поліроване	175–225	0,052–0,064
– зварювальне, поліроване	40–250	0,28
– поліроване	425–1020	0,14–0,377
– оброблене наждаком	20	0,242
– лите, необроблене	925–1115	0,87–0,95
Стальне литво поліроване	770–1040	0,52–0,56
Сталь:		
– листова шліфована	940–1100	0,52–0,61
– окислена при 600 °С	200–600	0,79
– окислена, шорстка	40–370	0,94–0,97
Чавун:		
– полірований	200	0,21
– після токарної обробки	830–990	0,60–0,70
– окислений при 600 °С	20–600	0,64–0,78
– шорсткий, дуже окислений	40–250	0,96
Золото поліроване	225–625	0,018–0,035
Латунь:		
– полірована з складом в мас. %: 73,2 Сu, 26,7 Zn	245–355	0,028–0,031
– після прокатування	22	0,06
– окислена при 600 °С	200–600	0,61–0,59
Мідь:		
– електролітична, полірована	80	0,018
– полірована	115	0,023
– окислена при 600 °С	200–600	0,57–0,55
Платина полірована	225–625	0,054–0,105
Платинові:		
– стрічка	925–1115	0,12–0,17
– нитка	25–1230	0,036–0,192
– дріт	225–1375	0,073–0,182
Хром	35–538	0,08–0,26

Таблиця А.7 – Мольна теплосмість газів\*, кДж/кмоль·К

Газ	Молекулярна маса, кг/кмоль	Температура, °С			
		0	100	300	600
Азот	28,0	29,0	29,3	30,0	31,0
Аміак	17,0	35,3	37,9	43,2	50,1
Водень	2,02	29,1	29,3	29,7	30,4
Водяна пара	18,0	35,0	35,5	36,7	39,3
Двоокис вуглецю	44,0	38,6	41,1	45,7	54,3
Двоокис сірки	64,1	38,6	41,1	45,7	54,3
Кисень	32,0	29,0	29,3	30,0	31,0
Метан	16,0	35,7	39,7	47,8	59,8
Окис вуглецю	28,0	29,0	29,3	30,0	31,0
Повітря	29,0	29,0	29,3	30,0	31,0
Сірководень	34,1	34,3	35,8	38,8	43,3
Хлор	70,9	36,3	36,4	36,7	37,0

\* для тиску  $p_{абс} = 101,3$  кПаТаблиця А.8 – Множники, префікси та їх позначення  
для кратних і частинних одиниць

Префікс	Позначення (укр.)	Множник
<b>Кратні одиниці</b>		
гіга	Г	$1000000000 = 10^9$
мега	М	$1000000 = 10^6$
кіло	к	$1000 = 10^3$
гекто	г	$100 = 10^2$
дека	да	$10 = 10^1$
<b>Частинні одиниці</b>		
деци	д	$0,1 = 10^{-1}$
санти	с	$0,01 = 10^{-2}$
мілі	м	$0,001 = 10^{-3}$
мікро	мк	$0,000001 = 10^{-6}$
нано	н	$0,000000001 = 10^{-9}$

# ЗМІСТ

---

Вступ .....	3
-------------	---

## Частина 1

### Розділ 1. Основні поняття і визначення технічної термодинаміки

1.1. Термодинаміка, предмет і метод, термодинамічні системи, їх види .....	5
1.2. Основні поняття: кількість субстанції, термодинамічний стан, робоче тіло, його параметри, ідеальний і реальний газ .....	9
1.3. Нульовий закон термодинаміки. Рівновага у термодинамічній системі ..	19
1.4. Поверхня і діаграми станів. Рівняння стану ідеального та реального газів.....	20
Контрольні питання .....	24
Тестові завдання .....	25

### Розділ 2. Перший закон термодинаміки

2.1. Закони збереження матерії та енергії. Повна і внутрішня енергія системи, робота, теплота, ентальпія .....	27
2.2. Перший закон термодинаміки, його суть, формулювання, аналітичні вирази .....	37
2.3. Дві форми рівняння енергобалансу, диференціальні та інтегральні варіанти запису .....	40
2.4. Перший закон термодинаміки у аналізі термодинамічних процесів.....	41
2.5. Перший закон термодинаміки для необоротних процесів .....	44
Контрольні питання .....	47
Тестові завдання .....	48

### Розділ 3. Теплоємність ідеальних і реальних газів та тіл

3.1. Теплоємність газів і тіл: визначення, класифікація, одиниці, фізичний зміст, співвідношення .....	51
3.2. Теплоємність при постійному тиску і постійному об'ємі. Рівняння Майєра.....	53
3.3. Молекулярно-кінетична теорія теплоємності .....	57
3.4. Залежність теплоємності від температури. Істинна та середня теплоємність.....	60
3.5. Теплоємність суміші ідеальних газів .....	65
3.6. Основи термодинаміки. Закон Гесса .....	66
Контрольні питання .....	71
Тестові завдання .....	72

#### **Розділ 4. Другий та третій закони термодинаміки**

4.1. Коловий процес або цикл, основні визначення та характеристики .....	75
4.2. Загальні положення і формулювання другого закону термодинаміки .....	79
4.3. Цикли Карно: прямий, зворотний, еквівалентний, їх к.к.д. Середньоінтегральна термодинамічна температура .....	82
4.4. Математичний вираз другого закону термодинаміки. Зміна ентропії: термодинамічний і фізичний зміст .....	91
4.5. Третій закон термодинаміки .....	104
Контрольні питання .....	105
Тестові завдання .....	106

### **Частина 2**

#### **Розділ 5. Загальна теорія теплообміну.**

##### **Поширення теплоти теплопровідністю**

5.1. Предмет і основні задачі теорії. Види переносу теплоти, основні визначення .....	110
5.2. Теплопровідність. Основні поняття та терміни .....	112
5.3. Закон Фур'є. Коефіцієнт теплопровідності .....	115
5.4. Механізм передачі теплоти для основних видів робочих тіл .....	117
5.5. Диференціальне рівняння теплопровідності .....	121
5.6. Умови однозначності .....	125
Контрольні питання .....	128
Тестові завдання .....	129

##### **Розділ 6. Теплопровідність і теплопередача через різні тіла**

6.1. Моделі тіл у задачах теплопровідності .....	131
6.2. Стаціонарна теплопровідність при граничних умовах першого роду, часткові випадки .....	133
6.3. Стаціонарна теплопередача при граничних умовах третього роду, часткові випадки .....	142
Контрольні питання .....	149
Тестові завдання .....	150

##### **Розділ 7. Теплопровідність при нестационарному режимі**

7.1. Основні відомості про нестационарну теплопровідність .....	151
7.2. Теплопровідність термічно тонких та напівобмежених тіл .....	157
7.3. Нагрів і охолодження пластини та циліндра .....	160
7.4. Регулярний режим теплопровідності .....	166
Контрольні питання .....	173
Тестові завдання .....	173

## **Розділ 8. Фізичні основи конвективного теплообміну**

8.1. Основні поняття та визначення. Фізичні властивості рідини. Основний закон конвективного теплообміну .....	177
8.2. Теорія граничного шару Прандтля. Режими течії рідини .....	184
8.3. Диференціальні рівняння конвективного теплообміну .....	189
Контрольні питання .....	198
Тестові завдання .....	199

## **Розділ 9. Теплообмін випромінюванням**

9.1. Основні поняття теплообміну випромінюванням .....	201
9.2. Закони теплового випромінювання .....	209
Контрольні питання .....	216
Тестові завдання .....	216

## **Частина 3**

### **Розділ 10. Теорія теплообміну в аналізі теплових процесів технологічних систем**

10.1. Класифікація джерел і стоків теплоти. ....	219
10.2. Класифікаційний код та шифрування джерел .....	224
10.3. Схематизація тіл і джерел, що приймають участь у теплообміні при механічній обробці та зварюванні .....	226
10.4. Схематизація геометричної форми тіл .....	226
10.5. Граничні та початкові умови .....	227
10.6. Аналітичні методи розв'язання теплофізичних задач, при описі теплових явищ у процесах механічної обробки і зварювання .....	233
10.7. Метод джерел теплоти .....	234
10.8. Алгоритм і методика теплофізичного аналізу технологічних систем при обробці поверхонь .....	238
10.9. Чисельні методи розрахунку теплових процесів при зварюванні .....	242
Контрольні питання .....	254
Тестові завдання .....	255

### **Розділ 11. Розрахунки теплових процесів і експериментальне визначення температури зварювання**

11.1. Схеми нагріву металу зварювальними джерелами теплоти .....	257
11.2. Нагрів металу зварювальною дугою .....	260
11.3. Поширення теплоти при наплавленні валика на масивне тіло. Термічний цикл, ізохрони та ізотерми у плані .....	270
11.4. Періоди теплонасичення і вирівнювання температури .....	275
11.5. Температурне поле в пластині при її проплавленні на всю товщину ...	280

11.6. Вплив режиму зварювання і теплофізичних властивостей металу на температурне поле граничного стану .....	283
11.7. Нагрів потужними швидкорухомими джерелами теплоти .....	284
11.8. Автоматичне зварювання пластин за один прохід.....	287
11.9. Обмеженість розмірів тіла та процес поширення теплоти .....	289
11.10. Визначення температури зварювання .....	292
Контрольні питання.....	298
Тестові завдання .....	299

### **Розділ 12. Нагрів і плавлення металу при зварюванні**

12.1. Нагрів і плавлення електрода .....	301
12.2. Плавлення основного металу. Зварювальна ванна. Теплова ефективність процесу зварювання.....	308
12.3. Термічний цикл зварювання та його характеристики .....	317
12.4. Розрахунок максимальних температур .....	318
12.5. Розрахунок миттєвої швидкості охолодження для заданої температури.....	321
12.6. Тривалість нагрівання металу вище заданої температури .....	326
12.7. Ширина зони нагріву.....	329
12.8. Особливості нагріву і охолодження металу для деяких видів зварювання .....	331
Контрольні питання .....	341
Тестові завдання.....	342

### **Розділ 13.**

#### **Інтенсифікація пізнавальної діяльності при вивченні курсу**

13.1. Завдання алгоритмічної дії .....	346
13.2. Завдання ретроспективно-варіативного типу.....	351
13.3. Завдання частково-пошукової дії .....	355
13.4. Задачі творчої дії.....	358

<b>Література</b> .....	365
-------------------------	-----

<b>Додаток А</b> .....	368
------------------------	-----

## Відповідь

на рецензію навчального посібника  
**“Термодинаміка і теплові процеси зварювання”**  
(автори Свідерський В.П., Яремчук В.С.)

надану доцентом кафедри зварювального виробництва  
Національного технічного університету “КПІ” канд. техн. наук Сливінським О.А.

У рецензії викладений досить глибокий та детальний аналіз, а також наведені аргументи і положення із яких випливає, що підготовлена та розглянута робота в цілому відповідає головним вимогам, які висуваються до навчальних посібників, призначених для студентів вищих навчальних закладів, за що автори висловлюють свою щирю вдячність рецензенту.

Однак, свіжий та неупереджений погляд на рукопис зі сторони дозволив також і виявити деякі недоліки, які знижують якість запропонованого варіанта видання і ці зауваження дали змогу авторам більш критично підійти до окремих розділів навчального посібника та підготувати його суттєво змінену редакцію.

У навчальному посібнику викладений теоретичний матеріал згідно існуючої традиції умовно поділений на три окремих блоки: перший – основи термодинаміки, другий – основи теплопередачі та третій – основні положення теплових процесів при зварюванні. Оскільки теоретичного матеріалу в розвитку цієї науки накопичено достатньо, то автори не зуміли втримати бажану пропорційність у його викладі, що й було відмічено у рецензії.

Так, відповідно до першого зауваження рецензента, у якому вказувалось на суттєву непропорційність поданого навчального матеріалу, було скорочено першу частину “Термодинаміка”, а саме вилучено параграфи 4.3.3 “Регенеративний цикл Карно” та 4.4 “Цикл Стірлінга”, а в другій частині “Загальна теорія теплообміну” – вилучено параграф 6.4 “Теплова ізоляція. Критичний діаметр теплової ізоляції”, скорочено розділ 7 “Нестационарна теплопровідність”, вилучено розділ 9 “Основи теорії подібності у конвективному теплообміні” та параграф 10.3 “Теплове випромінювання між твердими тілами, які розділені прозорим середовищем”. Разом з тим суттєво розширена третя частина посібника “Аналіз теплових процесів зварювання”, а саме в розділі 11 додано параграф 11.9 “Чисельні методи розрахунку теплових процесів при зварюванні”, а розділ 12 розширено за рахунок аналізу більш досконалих моделей джерел нагрівання.

Все це дозволило певним чином збалансувати кількість поданого навчального матеріалу і при цьому зменшити загальний обсяг роботи із 423 до 375 сторінок без втрати внутрішньої логіки викладання навчальної дисципліни.

З точки зору авторів, самі розділи “Термодинаміка” та “Загальна теорія теплообміну” необхідні в зв’язку з тим, що в навчальних планах напряму підготовки “Зварювання” відсутня окрема дисципліна “Термодинаміка і теплопередача”, а без фундаментального вивчення основ термодинаміки і теорії теплообміну неможливо переходити до глибокого аналізу теплових процесів зварювання.

Стосовно другого зауваження про недостатність наведених методів розрахунку теплових процесів зварювання був перероблений розділ 12, в якому тепер описані більш досконалі об’ємні розподілені моделі джерел нагрівання: дискові та конічні за Павелічем, за Пелі і Гібертом, а також еліпсоїдні за Голдаком. Наведений аналіз цих моделей, оснований на теоретичних матеріалах, виконаних і викладених у літературі доц. Сливінським О.А. у спів-авторстві із Препіяло А.О. Крім цього, для аналізу теплових процесів зварювання у розділі 11 подані теоретичні відомості про чисельні методи розрахунку, а саме методи кінцевих різниць та кінцевих елементів.

Третє суттєве зауваження рецензента стосувалося недостатньої якості окремих рисунків рукопису. Це зауваження авторами майже повністю враховане. Так частину рисунків (рис. 4.2; 5.5; 5.6 і 7.5) вилучено як недостатньо інформативних для цього видання, так і при

необхідності присутніх в іншій літературі; а якість рисунків 12.6; 12.10; 13.1; 13.8; 13.9 і 13.11 (у старій редакції, в новій редакції – це рис. 11.6; 11.10; 12.1; 12.8; 12.9 і 12.11, відповідно) суттєво покращено шляхом їх переробки.

Також введено посилання на рисунки, які були запозичені з інших друкованих видань (рис. 11.2; 11.4; 11.5; 11.6; 11.8; 12.1; 12.8; 12.9 і 12.11).

Таким чином, автори максимально врахували зауваження рецензента канд. техн. наук Сливінського О.А. і підготували роботу на повторний розгляд.

На завершення, автори висловлюють глибоку вдячність та щиру подяку доц., канд. техн. наук Сливінському О.А. за висловлені критичні зауваження та побажання, які він зробив при рецензуванні рукопису і врахування яких однозначно дозволили покращити якість рукопису.

**Автори**

Доцент кафедри зносостійкості і надійності машин  
Хмельницького національного університету,  
канд. техн. наук

В.П. Свідерський

Ст. викладач кафедри зносостійкості і надійності машин  
Хмельницького національного університету

В.С. Яремчук