https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.109.039
УДК 539.3

М.М. Діхтярук

Хмельницький національний університет
E-mail: mega-dihtyaruk@ukr.net

Плоска періодична контактна задача для двох пружних смуг з початковими напруженнями

Представлено академіком НАН України О.М. Гузем

У роботі в рамках лінеаризованої теорії пружності розглядається плоска контактна задача про передачу навантаження від пружних періодично розташованих накладок скінченної довжини до двох однакових смуг з початковими (залишковими) напруженнями. Дослідження проведені в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій і різних варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу. Вивчається вплив наявності початкових (залишкових) напружень в смугах на закон розподілу контактних напружень по лінії контакту з пружними періодично розташованими накладами кінцевої довжини. Виходячи з припущення про те, що накладки одночасно навантажуються вертикальними і горизонтальними силами, потрібно зауважити, що пружна накладка в вертикальному напрямку згинається як звичайна балка, а в горизонтальному напрямку стискається або розтягується, як звичайний стрижень з скінченною жорсткістю, який знаходиться в одноосьовому напружено-деформованому стані, задача математично формулюється як система інтегро-диференціальних рівнянь відносно невідомих контактних напружень. Використовуючи перетворення Фур'є, система розв'язується в замкнутому вигляді. В кінцевому результаті вирази для контактних напружень представлені у вигляді інтегралів Фур'є.

Ключові слова: *лінеаризована теорія пружності, пружна накладка, початкові (залишкові) напруження, початкові деформації*

Закономірності закону розподілу контактних напружень вздовж лінії контакту періодично розміщених пружних накладок з пружними ізотропними і анізотропними півплощинами без початкових напружень були досліджені в роботах [1, 2]. У випадку присутності в півплощинах початкових напружень такі задачі розглянуто в [3] Періодична контактна задача для пружної смуги з початковими напруженнями розв'язувалась в [4].

У даній роботі в рамках лінеаризованої теорії пружності [6] досліджується вплив початкових (залишкових) напружень на розподіл контактних напружень в двох однакових пружних смугах товщиною t з початковими (залишковими) напруженнями, з'єднаних між собою по вільних від затиснення гранях $y_2 = 0$ і $y_2 = h$ періодично розміщеними пружними накладками з періодом $2l$ $(l > a)$ і завантаженими зовнішніми горизонтальними силами інтенсивністю $q_0(y_1)$.

Будемо вважати, що смуги виготовлені з однакового стисливого, або нестисливого матеріалу з пружним потенціалом довільної структури і в них діють однакові початкові (залишкові) напруження.

Смуги з'єднані між собою на скінченних відрізках періодично розміщеними пружними накладками малої товщини h, а іншими гранями вони жорстко защемлені. Необхідно визначити закон розподілу нормальних і тангенціальних контактних напружень вздовж лінії з'єднання. На відрізках контакту накладок з попередньо напруженими смугами виконуються умови

$$u(y_1)=u_1(y_1) \quad \frac{du}{dy_1}=\frac{du_1}{y_1} \quad (-a \prec y_1 \prec a) \quad \text{при} \quad y_2=0 \quad \text{і} \quad y_2=h, \tag{1}$$

$$\begin{gathered} u_1(y_1, y_2)\,|_{y_2=-t}=u_2(y_1, y_2)\,|_{y_2=-t}=0 \\ \text{і} \quad u_1(y_1, y_2)\,|_{y_2=h+t}=u_2(y_1, y_2)\,|_{y_2=h+t}=0 \end{gathered} \tag{2}$$

Тут u — горизонтальні переміщення точок накладок; $u_1(i=1,2)$ — переміщення в початкових смугах з початковими напруженнями.

У зв'язку з періодичністю задачі вплив початкових напружень під кожною накладкою однаковий, тому обмежимось розглядом тільки однією з них. Наприклад, накладкою, розміщеною на відрізку $[-a,a]$. Враховуючи умови згину і розтягу накладки отримаємо

$$\frac{du(y_1)}{dy_1}=\frac{1}{E_1 h}\int_{-a}^{y_1}[2q(\xi)-q_0(\xi)]\,d\xi \quad (-a<y_1<a), \quad \frac{dv(y_1)}{dy_1}=0, \quad \forall y_1\in(-a<y_1<a). \tag{3}$$

Тут $u(y_1)$ і $v(y_1)$ — переміщення граничних точок накладок.

Якщо прийняти до уваги (1-2) і враховуючи [2,4], переміщення граничних точок смуги з початковими напруженнями в області контакту запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} u_1(y_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_{11}(|y_1-\tau|)\,p(\tau)\,d\tau+\int_{-\infty}^{\infty} h_{12}(y_1-\tau)\,q(\tau)\,d\tau, \\ u_2(y_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_{21}(y_1-\tau)\,p(\tau)\,d\tau+\int_{-\infty}^{\infty} h_{22}(|y_1-\tau|)\,q(\tau)\,d\tau. \end{aligned} \tag{4}$$

Тут $h_{ij}(y_1) \quad (i, j=1,2)$ — функції впливу [4].

Враховуючи те, що контактні напруження в області контакту є періодичними функціями з періодом $2l$, запишемо

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(y_1)\,|_{y_2=0} &= \tau^{(1)}(y_1)=\tau^{(1)}(y_1-2l)=\tau^{(1)}(y_1+2kl), \\ Q_{21}(y_1)\,|_{y_2=0} &= T(y_1)=T(\tau-2l)=T(\tau+2l). \end{aligned} \tag{5}$$

Задовільнивши умови (5), для визначення невідомих контактних напружень в області контакту з урахуванням (1), (2) з (3) отримаємо відому систему сингулярних інтегральних рівнянь [4].

Ввівши для цієї системи нову функцію і провівши заміну

$$X(\tau)=\tilde{p}(\tau)+i\tilde{q}(\tau)\ \ (\tau=\xi,\eta)\,,\ \delta=\frac{\pi a}{l}\,, \tag{6}$$

після деяких перетворень отримаємо сингулярне інтегральне рівняння з ядром Гільберта

$$\begin{gathered}i\beta_1 X(\xi)+\int_{-\delta}^{\delta}X(\eta)ctg\frac{\xi-\eta}{2}d\eta-\int_{-\delta}^{\delta}\tilde{L}_{11}(\xi-\eta)X(\eta)d\eta-\\ -i\int_{-\delta}^{\delta}\tilde{L}_{12}(\xi-\eta)X(\eta)d\eta-\int_{-\delta}^{\delta}\tilde{L}_{22}(\xi-\eta)\bar{X}(\eta)d\eta+\beta_2\int_{-\delta}^{\delta}[X(\eta)-\bar{X}(\eta)]d\eta=\\ =i[\beta_2\tilde{Q}_1(\xi)+\lambda_4]d\tau-\frac{\beta_1}{2\pi}\ (-\delta<\xi<\delta)\end{gathered} \tag{7}$$

і граничною умовою

$$\int_{-\delta}^{\delta}X(\eta)d\eta=\frac{i\pi}{l} \tag{8}$$

Розв'язок рівняння (7) шукаємо у вигляді ряду по функціях Якобі

$$X(\xi)=w(\xi)\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{X}_n P_n^{(\alpha,\beta)}\left(ctg\frac{\delta}{2}tg\frac{\xi}{2}\right)\quad |\xi|<\delta \tag{9}$$

де $\left\{P_n^{(\alpha,\beta)}(ctg\frac{\delta}{2}-tg\frac{\xi}{2})\right\}_{n=0}^{\infty}$ — многочлени Якобі, ортогональні на відрізку $[-\delta;\delta]$ відносно ваги

$$w(\xi)=\sec\frac{\xi}{2}\left(\sin\frac{\delta-\xi}{2}\right)^{\alpha}\left(\sin\frac{\delta+\xi}{2}\right)^{\beta},\ \alpha=-\frac{1}{2}-i\alpha_1;\quad \beta=-\frac{1}{2}+i\alpha_1;\quad \alpha_1=\frac{\ln(3-4c_{44})}{2\pi}, \tag{10}$$

де c_{44} — параметр, що визначає початковий напружений стан в смугах; $\tilde{X}_n$ — нескінченний ряд невідомих комплексних коефіцієнтів, які потрібно визначити.

Для їх визначення підставляємо значення (9) в рівняння (7), використавши властивості ортогональності многочленів Якобі [3, 7], для визначення невідомих величин $\tilde{X}_n$ отримуємо нескінченну квазірегулярну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$l_m\tilde{X}_m+\sum_{n=1}^{\infty}[D_{m,n}^{(1)}\tilde{X}_n+D_{m,n}^{(2)}\bar{\tilde{X}}_n]=-[D_m^{(0)}+D_m^{(1)}X_0+D_m^{(2)}\bar{X}_0],\quad (m=1,2,\ldots)\,, \tag{11}$$

де $l_m, D_{mn}^{(1)}, D_{mn}^{(2)}, D_m^{(0)}, D_m^{(1)} D_m^{(2)}\ (m = 1, 2, \dots)$ — відомі величини, які залежать від попередньо напруженого стану.

В результаті квазірегулярності коефіцієнти матриці системи швидко зменшуються із зростанням m і n від діагональних елементів, тому її можна розв'язати відомими чисельними методами.

За результатами досліджень даної роботи можна зробити узагальнюючі висновки, що до впливу початкових напружень на закон розподілу контактних зусиль під пружними накладками, які виникають при їхній взаємодії з попередньо напруженими смугами.

Розглянутий випадок підтверджує, що напруження під періодично розміщеними накладками, які підсилюють смуги з початковими напруженнями і без них при дії однакових зовнішніх зусиль будуть ідентичними.

В цьому легко переконатись, якщо порівнювати формули для переміщень в пружних смугах [2, 7] без початкових напружень і смугах [4] з початковими напруженнями при дії ідентичних зовнішніх зусиль.

Як відомо, відстань між накладками є важливим параметром впливу останніх однієї на іншу. Але стало зрозумілим, що на закон розподілу контактних напружень, крім відстані між накладками істотно впливає присутність в смугах початкових напружень. Цей вплив можна визначити для конкретного виду пружного потенціалу за допомогою відомих параметрів [5, 6].

Зазначимо, що сингулярні інтегро- диференційні рівняння які були отримані в результаті постановки цієї задачі за зовнішнім виглядом збігаються з відповідними задачами класичної лінійної теорії пружності. Таким чином, і структура їх розв'язків також повинна збігатися, але закони розподілу напружень і переміщень при цьому не збігаються, оскільки лінійні і лінеаризовані задачі мають різні представлення через комплексні потенціали [5].

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Арутюнян И.Х. , Мхитарян С.М. Периодическая контактная задача для полуплоскости с упругими накладками. *Прикл. механика*. 1968. **32**, № 4, С. 632—646.
2. Саркисян В.С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1983. 260 с.
3. Guz A.N., Babich S.Y., Rudnitskii V.B. Contact problems for elastic bodies with initial stresses: Focus on Ukrainian research. *Int. Appl. Mech. Rew*. 1998. **51**, № 5. P. 343—371.
4. Діхтярук М.М. Періодична контактна задача для пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями. *Допов. Нац. акад. наук Укр*. 2004. № 3. С. 46—49.
5. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Рудницький В.Б. Контактна взаємодія тіл з початковими напруженнями. Київ: Вища шк., 1995. 305 с.
6. Гузь А. Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. Киев: Наук. думка. 1983. 240с.
7. Штаерман И. Я. Контактные задачи теории упругости. Москва. 1949. 270 с.

Надійшло до редакції 27.06.2019

REFERENCE

1. Arutyunyan, N. Kh. & Mhitaryan, S. M. (1968). Periodic contact problem for a half-plane with elastic straps. Prikl. Mekh. 32, No. 4. pp. 632-646.
2. Sarkisyan, V. S. (1983). Contact problems for the half-planes and strips with elastic straps. Yerevan: Yerevan Univ. Press.

3. Guz, A. N., Babich, S. Y. & Rudnitskii, V. B. (1998). Contact problems for elastic bodies with initial stresses: Focus on Ukrainian research. Int. Appl. Mech. Rew., 51, No. 5. pp. 343-371.
4. Dihtyaruk, N. N. (2004). Periodic contact problem for an elastic band with initial (residual) stresses. Dopov. Nac. acad. nauk Ukr., No. 3. pp. 46-49.
5. Guz, A. N., Babich, S. Y. & Rudnitskii, V. B. (1995). Contact interaction of bodies with initial stresses. Kyiv: Vysha Shkola. 305 p.
6. Guz, A. N. (1983). Mechanics of brittle fracture of materials with initial stresses. Kiev: Naukova Dumka.
7. Shtaerman, I. Ya. (1949). Contact problems of the theory of elasticity. Moscow. Gostehizdat.

Received 27.06.2019

Н.Н. Дихтярук
Хмельницкий национальный университет
E-mail: mega-dihtyaruk@ukr.net

ПЛОСКАЯ ПЕРИОДИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУХ УПРУГИХ ПОЛОС С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

В работе в рамках линеаризированной теории упругости рассматривается плоская контактная задача о передаче нагрузки от упругих периодически расположенных накладок конечной длины к двум одинаковым полосам с начальными (остаточными) напряжениями. Исследования проведены в общем виде для теории больших начальных деформаций и разных вариантов теории малых начальных деформаций при произвольной структуре упругого потенциала. Изучается влияние наличия начальных (остаточных) напряжений в полосах на закон распределения контактных напряжений по линии контакта с упругими периодически расположенными накладами конечной длины. Исходя из предположения о том, что накладки одновременно нагружаются вертикальными и горизонтальными силами, следует отметить, что упругая накладка в вертикальном направлении изгибается как обычная балка, а в горизонтальном направлении сжимается или растягивается, как обычный стержень с конечной жесткостью, который находится в одноосном напряженно-деформированном состоянии, задача математически формулируется как система интегро-дифференциальных уравнений относительно неизвестных контактных напряжений. Используя преобразования Фурье, система решается в замкнутом виде. В итоге выражения для контактных напряжений представлены в виде интегралов Фурье.

Ключевые слова: *линеаризованная теория упругости, упругая накладка, начальные* (*остаточные*) *напряжения, начальные деформации.*

N.N. Dikhtyaruk
Khmel'nyts'k National University
E-mail: mega-dihtyaruk@ukr.net

FLAT PERIODIC CONTACT PROBLEM FOR TWO ELASTIC STRIPS WITH INITIAL STRESSES

Within the framework of the theory of linearized elasticity, the formulation and solution of the plane load transfer problem from periodically located elastic stringers to two identical elastic bands with initial (residual) stresses are given. In general, the study is carried out within the theory of large (finite) initial deformations and various versions of the theory of small initial deformations for an arbitrary form of the elastic potential. The influence of initial stresses on the distribution of contact forces in elastic bands and stringers is studied. Proceeding from the assumption that stringers are simultaneously loaded by vertical and horizontal forces, the problem is formulated mathematically as a system of integro-differential equations for the unknown contact stresses. Using the Fourier transformation, the system is solved in a closed form. The stress expressions are represented by quite simple Fourier integrals.

Keywords: *contact problems, linearized elasticity theory, elastic stringer, initial* (*residual*) *tensions, initial deformations.*