

## ВИЗНАЧЕННЯ ПРУЖНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ПОЛІМЕРНОГО МАТЕРІАЛУ ПІД ЧАС ВПЛИВУ НА НЬОГО НАПРУЖЕНЬ ЗСУВУ

Отримано залежності, які дозволяють для заданого полімерного матеріалу визначити мінімальну деформацію зсуву в повздовжньому та поперечному до попередньої орієнтації витягнутих сферолітів напрямків, яку необхідно створити перероблюючим обладнанням для остаточного руйнування зв'язків між сферолітами або їх конгломератами, тобто для остаточного подрібнення полімерів.

Отримані аналітичні вирази дозволяють перейти до проектування технологічного устаткування і визначення конструктивно-технологічних параметрів пристроїв і процесів переробки полімерних матеріалів з урахуванням їх структури.

**Ключові слова:** переробка, полімер, структура, напруження, деформація, зсув.

O.M. SYNYUK, N. K. MEDVEDCHUK

Khmelnitskyi National University

## DETERMINATION OF ELASTIC PROPERTIES OF POLYMERIC MATERIAL DURING THE INFLUENCE OF THE SHEAR STRESS

The dependences that allow to determine the minimum shear deformation for a given polymeric material in the longitudinal direction transverse to the previous orientation of the elongated direction of the spherulites are obtained. The deformation is necessary to be created in the recycling equipment for the final destruction of the bonds between the spherulites and their conglomerates, and the totals for the final grinding of the polymers.

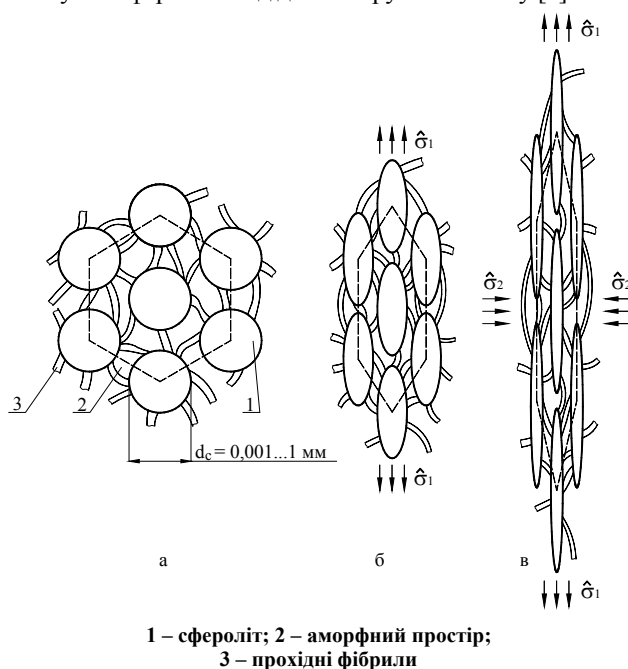
The obtained analytical expressions allow to proceed to the design of technological equipment and to determine the structural and technological parameters of devices and processes for the recycling of polymeric materials, taking into account their structure.

**Keywords:** recycling, polymer, structure, stress, deformation, shear.

### ЗАВДАННЯ ДОСЛІДЖЕННЯ І АКТУАЛЬНІСТЬ

В рамках запропонованої в [1, 2] концепції сферолітної будови полімерних матеріалів розглянемо процес руйнування зв'язків між попередньо орієнтованими конгломератами витягнутих сферолітів при дії на полімер напружень зсуву в повздовжньому та поперечному до попередньої орієнтації напрямках.

В роботах [3, 4] розглядається процес витягнення і орієнтації сферолітів під дією напружень розтягу в повздовжньому напрямку [3, 4] та часткового руйнування зв'язків між орієнтованими конгломератами витягнутих сферолітів під дією напружень стиску [5] в поперечному до попередньої орієнтації напрямку (рис. 1).



1 – сфероліт; 2 – аморфний простір;  
3 – прохідні фібрили

Рис. 1. Модель сферолітної структури полімеру в неорієнтованому (а), орієнтованому (б, в) стани

полімерний матеріал після дії на нього напружень розтягу і стиску піддається впливу напружень зсуву.

Вплив напружень зсуву на орієнтовані конгломерати сферолітів приводить не тільки до їх відносного зсуву, але й до їх повороту, що сприяє руйнуванню тих зв'язків між конгломератами сферолітів, що не були зруйновані їх взаємним зсувом.

В результаті впливу на полімерний матеріал напруженнями розтягу, стиску та зсуву сферолітна

Напруження розтягу та стиску можна створити в полімерному матеріалі, пропускаючи його між зубчастими валками [5]. Для остаточного руйнування зв'язків між орієнтованими конгломератами сферолітів необхідно після пропускання полімерного матеріалу між зубчастими валками піддати його такому впливу, що призведе до виникнення в матеріалі напружень зсуву в повздовжньому та поперечному до орієнтації витягнутих сферолітів напрямках.

Здійснення процесу переробки полімерних відходів в два етапи дозволяє суттєво скоротити енергоємність даного процесу і зберігати у переробленому полімері механічні властивості, що близькі до оригінального.

Переробка полімерних відходів здійснюється шляхом руйнування зв'язків між орієнтованими конгломератами витягнутих сферолітів, що забезпечується за рахунок зменшення напружень однорідної взаємодії між витягнутими сферолітами. Для інтенсифікації процесу руйнування вказаних зв'язків

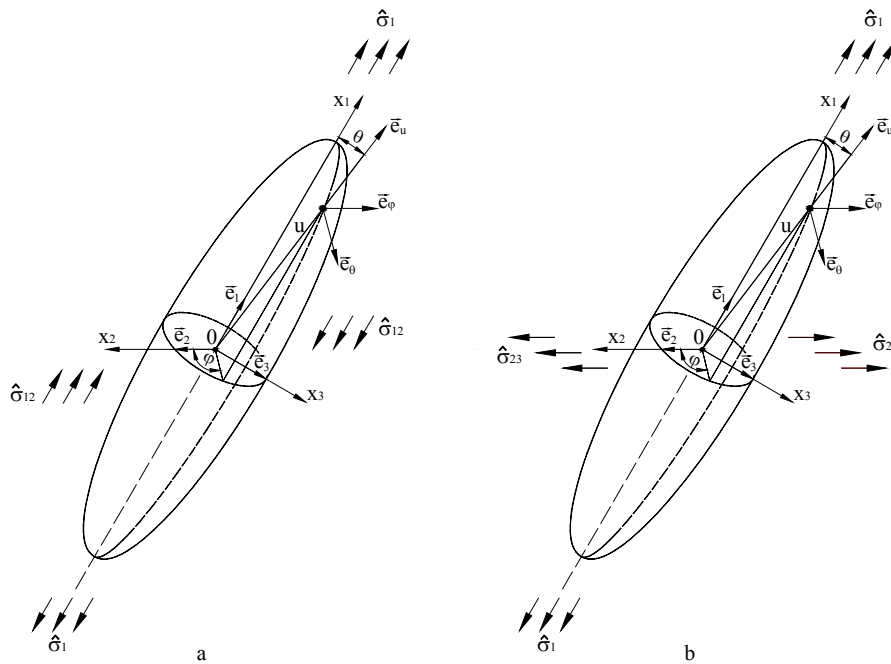
структура полімеру руйнується. При цьому полімерний матеріал структурується, тобто складається з майже не зв'язаних між собою конгломератів витягнутих сферолітів. Далі полімерний матеріал зі структурованою будовою потрапляє під вплив пристрою, що остаточно його руйнує, відокремлюючи згадані конгломерати один від другого. У зв'язку з тим, що міцність структурованого полімеру набагато менша від міцності самих сферолітів, то процес руйнування полімерних відходів відбувається з набагато меншими енерговитратами.

Таким чином, задачею даного дослідження є отримання аналітичних залежностей, що дозволять визначати ефективні пружні властивості полімерного матеріалу при повздовжньому та поперечному зсуві. За допомогою отриманих залежностей, знаючи властивості певного полімеру можна визначати мінімальну деформацію зсуву, яку необхідно створити перероблюючим обладнанням для остаточного руйнування зв'язків між конгломератами витягнутих сферолітів, тобто для остаточного подрібнення полімерів.

**ВИКЛАДЕННЯ МАТЕРІАЛУ ДОСЛІДЖЕНЬ**

**Ефективні пружні властивості полімерного матеріалу при повздовжньому зсуві**

Розгляд пружних властивостей полімерних матеріалів з орієнтованою структурою витягнутих сферолітів у випадку поперечного зсуву під дією напруження  $\sigma_{23}$  дозволяє визначити модуль зсуву  $G_{23}$  (рис. 2 а).



**а** – повздовжній зсув в площині первинного розтягу;  
**б** – поперечний зсув в площині, перпендикулярній до первинного розтягу

**Рис. 2.** Вплив напружень зсуву на попередньо витягнутий сфероліт

Для визначення пружних властивостей (модуля пружності) в поперечній до напрямку витягування площині розглянемо випадок поперечного зсуву під дією напруження  $\sigma_{23}$  попередньо орієнтованої сферолітної будови полімерного матеріалу.

Під час поперечного зсуву в сфероліті виникає напружений стан, що згідно з діадним представленням [1, 6, 7] можна записати в такому вигляді:

$$\mathbf{T} = \bar{e}_1 \bar{e}_1 \sigma_1 + \bar{e}_2 \bar{e}_2 \sigma_2 + \bar{e}_3 \bar{e}_3 \sigma_3 + (\bar{e}_1 \bar{e}_2 + \bar{e}_2 \bar{e}_1) \cdot \sigma_{12} + (\bar{e}_2 \bar{e}_3 + \bar{e}_3 \bar{e}_2) \cdot \sigma_{23} + (\bar{e}_3 \bar{e}_1 + \bar{e}_1 \bar{e}_3) \cdot \sigma_{31}, \tag{1}$$

де  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  – одиничні орти декартової системи координат;  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – нормальні напруження, що діють на площадках, перпендикулярних до відповідних осей системи координат;  $\sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}$  – тангенціальні (дотичні) напруження, що діють на тих же площадках.

Зорієтуємо осі координат таким чином, щоб на площадках елементарного об'єму, обмеженого еліпсоїдальною поверхнею, нормальні напруження були відсутні. Представимо кожне головне напруження як добуток середнього напруження  $\hat{\sigma}_{23}$ , що діє на сфероліт в площині  $x_2 0 x_3$ , та невідомих постійних  $\alpha_{23}^0$ , що характеризують рівень напружень однорідної взаємодії і рівень напружень на головних площадках. Тоді рівняння (1) перепишеться таким чином:

$$\mathbf{T}_c = (\bar{e}_2 \bar{e}_3 + \bar{e}_3 \bar{e}_2) \cdot \alpha_{23}^0 \cdot \hat{\sigma}_{23}, \tag{2}$$

де  $\hat{\sigma}_{23}$  – середнє напруження поперечного зсуву, що діє на витягнутий сфероліт в площині  $x_2 0 x_3$ ;  $\alpha_{23}^0$  – напруження однорідної взаємодії між витягнутими сферолітами, що виникають в результаті зміни напружено-деформованого стану сферолітів.

В сферичних координатах  $r, \theta, \phi$  тензор напружень (2) можна виразити таким чином [1]:

$$\mathbf{T}_c = \left( \bar{e}_u \bar{e}_u \alpha_u^c + \bar{e}_\theta \bar{e}_\theta \alpha_\theta^c + \bar{e}_\phi \bar{e}_\phi \alpha_\phi^c + (\bar{e}_u \bar{e}_\phi + \bar{e}_\phi \bar{e}_u) \cdot \alpha_{r\phi}^c + (\bar{e}_\theta \bar{e}_\phi + \bar{e}_\phi \bar{e}_\theta) \cdot \alpha_{\theta\phi}^c + (\bar{e}_u \bar{e}_\theta + \bar{e}_\theta \bar{e}_u) \cdot \alpha_{u\theta}^c \right) \hat{\sigma}_{23}, \quad (3)$$

де  $\alpha_i^c$  – невідома постійна, яка визначається з крайових умов, в якості яких використовуються умови ідеальності адгезійної взаємодії витягнутого сфероліта і аморфної фази (міжсферолітного простору), що дозволяє говорити про безперервність полів напружень та переміщень. Крайові умови розглядаються нижче.

Вектор полів переміщень для витягнутих сферолітів згідно до [1, 3] можна представити в такий спосіб:

$$\mathbf{u}_c = \left( \frac{1+\nu_c}{E_c} \alpha_{23}^c + K \right) x_3 \bar{e}_2 \hat{\sigma}_{23} + \left( \frac{1+\nu_c}{E_c} \alpha_{23}^c - K \right) x_2 \bar{e}_3 \hat{\sigma}_{23}, \quad (4)$$

де  $E_c$  – модуль пружності сфероліту;  $\nu_c$  – коефіцієнт Пуассона сфероліту;  $K$  – постійна, що характеризує обертання витягнутого сфероліта навколо осі  $0x_1$  як твердого тіла;  $\alpha_{23}^c$  – невідома постійна.

Невідомі постійні  $K$  та  $\alpha_{23}^c$  визначаються із розв'язку крайових рівнянь, які відповідають крайовим умовам:

$$u_u^c = u_u^a, \quad u_\theta^c = u_\theta^a, \quad \sigma_u^c = \sigma_u^a, \quad \sigma_{u\theta}^c = \sigma_{u\theta}^a. \quad (5)$$

Поле напружень у просторі між витягнутими сферолітами можна виразити через суму полів напружень:

– поля напружень взаємодії між витягнутими сферолітами, що утворюють структуру полімерного матеріалу у вигляді гексагонального пакування;

– соленоїдальне і вихрове поля, які розсіюються на сферолітах.

Поле однорідної взаємодії між витягнутими сферолітами у випадку впливу на полімерний матеріал напружень поперечного зсуву, з урахуванням виразів, отриманих в роботах [1-4, 6] виразиться таким чином:

$$\mathbf{T}_a^o = \left( \bar{e}_u \bar{e}_u \alpha_u^o + \bar{e}_\theta \bar{e}_\theta \alpha_\theta^o + \bar{e}_\phi \bar{e}_\phi \alpha_\phi^o + (\bar{e}_u \bar{e}_\phi + \bar{e}_\phi \bar{e}_u) \cdot \alpha_{u\phi}^o + (\bar{e}_\theta \bar{e}_\phi + \bar{e}_\phi \bar{e}_\theta) \cdot \alpha_{\theta\phi}^o + (\bar{e}_u \bar{e}_\theta + \bar{e}_\theta \bar{e}_u) \cdot \alpha_{u\theta}^o \right) \hat{\sigma}_{23}, \quad (6)$$

Поле відносних переміщень витягнутих сферолітів або конгломератів витягнутих сферолітів у випадку однорідної взаємодії через аморфне середовище виразиться таким чином:

$$\mathbf{u}_a^o = \alpha_{23}^o \frac{1+\nu_a}{E_a} (x_3 \bar{e}_2 + x_2 \bar{e}_3) \hat{\sigma}_{23} \quad (7)$$

де  $E_a$  – модуль пружності аморфної фази (міжсферолітного простору);  $\nu_a$  – коефіцієнт Пуассона аморфної фази.

Компоненти вектора відносних переміщень витягнутих сферолітів  $\bar{u}^*$ , у випадку першого розсіяного поля (соленоїдального), можна записати таким чином:

$$\begin{aligned} u_1^* &= \hat{\sigma}_{23} \frac{r(\lambda^2 - \lambda^{-1})^{0,5} (1+\nu_a)}{E_a} \left( \frac{M}{3} + 4N \right) \left( \cos \theta - 2 \frac{1 - \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) \cdot Q_1^{(2)}(\text{ch } u) \cos 2\phi; \\ u_2^* + i u_3^* &= \hat{\sigma}_{23} \frac{r(\lambda^2 - \lambda^{-1})^{0,5} (1+\nu_a)}{E_a} \left( M \cdot P_1^{(1)}(\cos \theta) \cdot Q_1^{(1)}(\text{ch } u) e^{i\phi} + \right. \\ &\quad \left. + N \cdot Q_1^{(2)}(\text{ch } u) \frac{1 - 8 \cos \theta + 6 \cos^2 \theta - \cos^4 \theta}{\sin^2 \theta} e^{3i\phi} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

де  $P_1(\cos \theta)$  – поліноми Лежандра першого роду першого порядку;  $Q_1^{(1)}(\text{ch } u)$ ,  $Q_1^{(2)}(\text{ch } u)$  – приєднані функції Лежандра другого роду першого ступеня першого і другого порядку відповідно;  $r$  – радіус сфероліта до деформації;  $\lambda$  – ступінь попередньої витяжки полімерного матеріалу;  $M$ ,  $N$  – невідомі постійні, що визначаються із розв'язку крайових рівнянь, які відповідають крайовим умовам (5).

Компоненти вектора переміщення  $\bar{u}^{**}$ , у випадку другого розсіяного поля (вихрового) визначаються через функції Папковича-Нейбера у вигляді:

$$u^{**} = \hat{\sigma}_{23} \frac{(1+\nu_a)}{E_a} \left\{ (3 - 4\nu_a) \bar{e}_1 B_1 - x_1 \cdot \text{grad } B_1 - \text{grad } B_0 \right\}, \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned} B_1 &= r(\lambda^2 - \lambda^{-1})^{0,5} \left( 2 \frac{1 - \cos \theta}{\sin^2 \theta} - \cos \theta \right) P \cdot Q_1^{(1)}(\text{ch } u) \cos 2\phi, \\ B_0 &= - \frac{r^2 (\lambda^2 - \lambda^{-1})}{4} P \cdot \text{ch}^2 u_0 \cdot P_2^{(2)}(\cos \theta) Q_2^{(2)}(\text{ch } u) \cos 2\phi, \end{aligned} \quad (10)$$

де  $P$  – невідома постійна, що визначається із розв'язку крайових рівнянь, які відповідають крайовим умовам (5).

Невідомі постійні  $\alpha_{23}^c$ ,  $K$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $P$  виражаються через невідомі напруження однорідної взаємодії між витягнутими сферолітами  $\alpha_{23}^o$ . Напруження однорідної взаємодії  $\alpha_{23}^o$  будемо визначати з першого представлення пружної енергії при поперечному зсуві:

$$\hat{\sigma}_{23} \cdot \hat{\gamma}_{23} = \frac{1}{\theta} \int_{(S_*)} (\sigma_u^a u_u^a + \sigma_{u\theta}^a u_\theta^a + \sigma_{u\phi}^a u_\phi^a) \cdot h \cdot h_\phi \cdot d\theta d\phi, \tag{11}$$

де  $S_*$  – приведена поверхня інтегрування, що прирівнюється до поверхні витягнутого сфероліта (до поверхні витягнутого еліпсоїда обертання, софокусного з сферолітом);  $u_u^a$ ,  $u_\theta^a$ ,  $u_\phi^a$  – функції зміщення, які виражаються з таких рівнянь:

$$\begin{aligned} u_u^a &= \hat{\gamma}_{23} \frac{\text{ch } u_* \cdot \text{sh } u_*}{2(\text{sh}^2 u_* + \sin^2 \theta)^{0,5}} \cdot r \cdot (\lambda^2 - \lambda^{-1})^{0,5} \sin^2 \theta \cdot \sin 2\phi, \\ u_\theta^a &= \hat{\gamma}_{23} \frac{r \cdot (\lambda^2 - \lambda^{-1})^{0,5}}{2(\text{sh}^2 u_* + \sin^2 \theta)^{0,5}} \cdot \text{sh}^2 u_* \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot \sin 2\phi, \\ u_\phi^a &= \hat{\gamma}_{23} \frac{r \cdot (\lambda^2 - \lambda^{-1})^{0,5}}{2} \cdot \text{sh } u_* \cdot \sin \theta \cdot \cos 2\phi, \end{aligned} \tag{12}$$

$\sigma_u^a$ ,  $\sigma_{u\theta}^a$ ,  $\sigma_{u\phi}^a$  – однорідні поля напружень, які можуть бути представлені такими виразами:

$$\begin{aligned} \sigma_u^a &= -\frac{\hat{\sigma}_{23}}{\text{sh}^2 u_* + \sin^2 \theta} \cdot \text{ch}^2 u_* \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos 2\phi, \\ \sigma_{u\theta}^a &= -\frac{\hat{\sigma}_{23}}{4(\text{sh}^2 u_* + \sin^2 \theta)} \cdot \text{sh } 2u_* \cdot \sin 2\theta \cdot \cos 2\phi, \\ \sigma_{u\phi}^a &= \frac{\hat{\sigma}_{23}}{\text{sh}^2 u_* + \sin^2 \theta} \cdot \text{ch } u_* \cdot \sin \theta \cdot \sin 2\phi, \end{aligned} \tag{13}$$

де  $u_*$  – зміщення на приведеній поверхні інтегрування  $S_*$ .

Ефективний модуль пружності (зсуву) при поперечному зсуві  $G_{23}$  будемо визначати з другого представлення пружної енергії:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\sigma}_{23}}{G_{23}} &= \frac{1}{\theta} \int_{(S_*)} \left[ \frac{\text{sh}^2 u_* + \sin^2 \theta}{\text{sh } u_* \cdot \sin \theta} (-u_u^a \cdot \text{ch}^2 u_* \cdot \sin \theta - u_\theta^a \text{ch } u_* \cdot \text{sh } u_* \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta) \cdot \cos 2\phi + \right. \\ &\quad \left. + u_\phi^a \cdot \text{sh } 2u_* \cdot \cos \phi \cdot \sin \phi \right] d\theta \cdot d\phi. \end{aligned} \tag{14}$$

Інтегруючи вираз (11) і (14) з врахуванням рівнянь (7)–(10), а також (12) і (13), опускаючи громіздкі викладки перетворення, отримаємо вираз ефективного модуля пружності при поперечному зсуві:

$$G_{23} = E_a \frac{G1}{G2}, \tag{15}$$

де

$$\begin{aligned} G1 &= \left\{ E_c (1 + \nu_a) + 2E_a (1 - 2\nu_c) + 2\chi^2 [E_c (1 - 2\nu_a) - E_a (1 - 2\nu_c)] \right\} \left\{ E_c [(1 + \nu_a)\beta_1^{**} + 2(1 - 3\nu_a)\beta_3^{**}] - \right. \\ &\quad \left. - 4E_a (1 - 2\nu_c)\beta_4^{**} + (1 + \nu_a)(7 - 5\nu_a) [E_c (1 + \nu_a)(\gamma_2^{**} - \gamma_1^{**}) + E_a (1 + \nu_c)(\gamma_4^{**} - \gamma_3^{**})] \right\}, \\ G2 &= 4 \left\{ E_c (1 + \nu_a) + 2E_a (1 - 2\nu_c) + 2\chi^2 [E_c (1 - 2\nu_a) - E_a (1 - 2\nu_c)] \right\} \left\{ E_c [(1 + \nu_a)\beta_1^{**} + 2(1 - 3\nu_a)\beta_3^{**}] - \right. \\ &\quad \left. - 4E_a (1 - 2\nu_c)\beta_4^{**} + (1 + \nu_a)(7 - 5\nu_a) [E_c (1 + \nu_a)(\gamma_2^{**} - \gamma_1^{**}) + E_a (1 + \nu_c)(\gamma_4^{**} - \gamma_3^{**})] \right\} - \\ &\quad - \left\{ E_c (1 - 2\nu_a)(1 + \nu_a) + 2E_a (1 - 2\nu_c)(1 - 2\nu_a) + \chi^2 [E_a (1 - 2\nu_c)(1 + \nu_a) - E_c (1 - 2\nu_a)(1 + \nu_a)] \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ E_c [(1 + \nu_a)\beta_1^{**} + 2(1 - 3\nu_a)\beta_3^{**}] + 2E_a (1 + \nu_c)\beta_4^{**} - (1 + \nu_a)(7 - 5\nu_a) [E_c (1 + \nu_a)(\gamma_2^{**} - \gamma_1^{**}) + \right. \\ &\quad \left. + E_a (1 + \nu_c)(\gamma_4^{**} - \gamma_3^{**})] \right\}, \end{aligned}$$

де  $\chi$  – ступінь об'ємної кристалічності полімерного матеріалу;  $\gamma_i^{**}$  і  $\beta_i^{**}$  – функції, що визначають зміну параметрів структури полімерного матеріалу від ступеня витяжки  $\lambda$  при поперечному зсуві.

$$\begin{aligned}
\gamma_1^{**} &= \frac{\lambda\sqrt{\lambda} \ln a + 2(1+\lambda^3)\sqrt{\lambda^3-1}}{2(\lambda\sqrt{\lambda} \ln a + 2\sqrt{\lambda^3-1})}, & \gamma_2^{**} &= \frac{3\lambda\sqrt{\lambda^3-1} - 2\lambda\sqrt{\lambda} \ln a}{2(\lambda\sqrt{\lambda} \ln a + 2\sqrt{\lambda^3-1})}, \\
\gamma_3^{**} &= \frac{3\lambda\sqrt{\lambda} \ln a + 2\sqrt{\lambda^3-1}(1+\lambda^3)}{2(\lambda\sqrt{\lambda} \ln a + 2\sqrt{\lambda^3-1})}, & \gamma_4^{**} &= \frac{3\lambda\sqrt{\lambda} \ln a - 2\sqrt{\lambda^3-1}(2-\lambda^3)}{2(\lambda\sqrt{\lambda} \ln a + 2\sqrt{\lambda^3-1})}, \\
\beta_1^{**} &= 3 - 4\nu_a - \frac{\lambda\sqrt{\lambda} \ln a + 2\sqrt{\lambda^3-1}(1+\lambda^3)}{\lambda\sqrt{\lambda} \ln a + 2\sqrt{\lambda^3-1}} + \gamma_1^{**}, & & (16) \\
\beta_2^{**} &= 3 - 4\nu_a - \frac{3\lambda\sqrt{\lambda} \ln a + 2\sqrt{\lambda^3-1}(2-\lambda^3)}{\lambda\sqrt{\lambda} \ln a + 2\sqrt{\lambda^3-1}} + \gamma_2^{**}, \\
\beta_3^{**} &= -(1-2\nu_a) \frac{3\lambda\sqrt{\lambda^3-1} + 2\lambda\sqrt{\lambda} \ln a}{\lambda\sqrt{\lambda} \ln a + 2\sqrt{\lambda^3-1}} + \frac{3\lambda^3 \ln a - 2\lambda\sqrt{\lambda^3-1}(2-\lambda^3)}{(\lambda^3-1)[\ln a + 2\lambda\sqrt{\lambda^3-1}]}, \\
\beta_4^{**} &= (1-2\nu_a) \frac{\lambda\sqrt{\lambda} \ln a - 2\sqrt{\lambda^3-1}(1+\lambda^3)}{\lambda\sqrt{\lambda} \ln a + 2\sqrt{\lambda^3-1}}.
\end{aligned}$$

Вираз (15) з урахуванням виразів (16) дозволяє прогнозувати модуль пружності при поперечному зсуві  $G_{23}$  полімерного матеріалу з попередньо орієнтованою структурою залежно від ступеня витяжки  $\lambda$  та пружних властивостей матеріалу.

#### Ефективні пружні властивості полімерного матеріалу при повздовжньому зсуві

Прийнятий в роботі [8] трансверсально-ізотропний тип симетрії одноосноорієнтованого полімерного матеріалу передбачає наявність п'яти незалежних пружних постійних. Для обчислення повного комплексу пружних постійних попередньо орієнтованого полімерного матеріалу визначимо модуль пружності  $G_{12}$  при повздовжньому зсуві (рис. 2 б).

Тензор напружень сфероліта аналогічно до рівнянь (2) та (3) визначимо за такою формулою:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_c &= (\bar{e}_1\bar{e}_2 + \bar{e}_2\bar{e}_1) \cdot \alpha_{12}^o \cdot \hat{\sigma}_{12} = (\bar{e}_u\bar{e}_u\alpha_u^c + \bar{e}_\theta\bar{e}_\theta\alpha_\theta^c + (\bar{e}_u\bar{e}_\theta + \bar{e}_\theta\bar{e}_u) \cdot \alpha_{u\theta}^c + \\
&+ (\bar{e}_u\bar{e}_\phi + \bar{e}_\phi\bar{e}_u) \cdot \alpha_{u\phi}^c + (\bar{e}_\theta\bar{e}_\phi + \bar{e}_\phi\bar{e}_\theta) \cdot \alpha_{\theta\phi}^c) \hat{\sigma}_{12},
\end{aligned} \quad (17)$$

де  $\alpha_u^c, \alpha_\theta^c, \alpha_{u\theta}^c, \alpha_{u\phi}^c, \alpha_{\theta\phi}^c$  – невідомі постійні, що визначаються в такий спосіб:

$$\begin{aligned}
\alpha_u^c &= \frac{\alpha_{12}^c}{2(\text{sh}^2 u + \sin^2 \theta)} \text{sh} 2u \cdot \sin 2\theta \cdot \cos \phi, \\
\alpha_\theta^c &= \frac{\alpha_{12}^c}{\text{sh}^2 u + \sin^2 \theta} \text{sh} 2u \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \cos \phi, \\
\alpha_{u\theta}^c &= \frac{\alpha_{12}^c}{\text{sh}^2 u + \sin^2 \theta} (\text{sh}^2 u \cdot \cos^2 \theta - \text{ch}^2 u \cdot \sin^2 \theta) \cdot \cos \phi, \\
\alpha_{u\phi}^c &= \frac{\alpha_{12}^c}{(\text{sh}^2 u + \sin^2 \theta)^{0,5}} \text{sh} u \cdot \cos 2\theta \cdot \sin \phi, \\
\alpha_{\theta\phi}^c &= \frac{\alpha_{12}^c}{(\text{sh}^2 u + \sin^2 \theta)^{0,5}} \text{ch} u \cdot \sin \theta \cdot \sin \phi.
\end{aligned} \quad (18)$$

Поле переміщень сфероліта вздовж попередньої орієнтації полімерного матеріалу визначимо таким чином:

$$\mathbf{u}_c = \left( \alpha_{12}^c \frac{1+\nu_c}{E_c} - L \right) x_1 \bar{e}_2 \hat{\sigma}_{12} + \left( \alpha_{12}^c \frac{1+\nu_c}{E_c} + L \right) x_2 \bar{e}_1 \hat{\sigma}_{12}, \quad (19)$$

де  $L$  – постійна, що визначає обертання витягнутого сфероліта як твердого тіла навколо осі  $Ox_3$  (рис. 2 б);  $\alpha_{12}^c$  – невідома постійна.

Невідомі постійні  $L$  та  $\alpha_{12}^c$  визначаються із розв'язку крайових рівнянь, які відповідають крайовим умовам (5) і виражаються через напруження однорідної взаємодії  $\alpha_{12}^o$ .

Поля напружень і переміщень в міжсферолітному просторі розкладемо на однорідні і розсіянні складові. Однорідні поля напружень  $\mathbf{T}_a^o$  і переміщень  $\mathbf{u}_a^o$  можна представити в такому вигляді:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_a^o = & (\bar{e}_1 \bar{e}_2 + \bar{e}_2 \bar{e}_1) \cdot \alpha_{12}^o \cdot \hat{\sigma}_{12} = (\bar{e}_u \bar{e}_u \alpha_u^o + \bar{e}_\theta \bar{e}_\theta \alpha_\theta^o + (\bar{e}_u \bar{e}_\theta + \bar{e}_\theta \bar{e}_u) \cdot \alpha_{u\theta}^o + \\ & + (\bar{e}_u \bar{e}_\phi + \bar{e}_\phi \bar{e}_u) \cdot \alpha_{u\phi}^o + (\bar{e}_\theta \bar{e}_\phi + \bar{e}_\phi \bar{e}_\theta) \cdot \alpha_{\theta\phi}^o) \hat{\sigma}_{12} \end{aligned} \quad (20)$$

та

$$\mathbf{u}_a^o = \alpha_{12}^o \frac{1+\nu_a}{E_a} (x_1 \bar{e}_2 + x_2 \bar{e}_1) \hat{\sigma}_{12}. \quad (21)$$

Перше розсіяне (соленоїдалне) поле переміщень  $\mathbf{u}^*$  відповідно до [1, 3, 6] визначається такими функціями:

$$\begin{aligned} u_1^a = & -\hat{\sigma}_{12} \frac{1+\nu_a}{E_a} r (\lambda^2 - \lambda^{-1})^{0,5} R \cdot Q_1^{(2)}(\text{ch } u) \cdot P_1^{(2)}(\cos \theta) \cdot \cos \phi, \\ u_2^a = & \hat{\sigma}_{12} \frac{1+\nu_a}{E_a} r (\lambda^2 - \lambda^{-1})^{0,5} R \cdot Q_1^{(1)}(\text{ch } u) \cdot P_1^{(1)}(\cos \theta), \\ u_3^a = & 0, \end{aligned} \quad (22)$$

де  $R$  – довільна постійна, що визначає рівень соленоїдалного поля переміщень. Невідому постійну  $R$  будемо визначати із розв'язку крайових рівнянь, які відповідають крайовим умовам (5) і виражаються через напруження однорідної взаємодії  $\alpha_{12}^o$ .

Визначимо вектор напруження  $\mathbf{W}_u^*$  на площадці з нормаллю  $\bar{e}_u$  через переміщення (22), задовольняючі умові  $\text{div } \mathbf{u}^* = 0$ :

$$\mathbf{W}_u^* = \frac{E_a}{1+\nu_a} \left( \frac{1}{H_u} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial u} + \frac{1}{2} \mathbf{e}_u \times \text{rot } \mathbf{u}^* \right), \quad (23)$$

де  $H_u = \sqrt{r^2 (\lambda^2 - \lambda^{-1}) (\text{sh}^2 u + \sin^2 \theta)}$  – коефіцієнт Ламе.

Друге розсіяне (вихрове) поле переміщень визначається функціями Папковича-Нейбера у вигляді:

$$u_a^{**} = \hat{\sigma}_{12} \frac{(1+\nu_a)}{E_a} \{ (3 - 4\nu_a) \bar{e}_1 B_1 - x_1 \cdot \text{grad } B_1 - \text{grad } B_0 \}, \quad (24)$$

де

$$\begin{aligned} B_0 = & -\frac{r^2 (\lambda^2 - \lambda^{-1})}{3} \cdot Z \cdot \text{ch}^2 u \cdot Q_2^{(1)}(\text{ch } u) \cdot P_2^{(1)}(\cos \theta) \cos \phi, \\ B_1 = & r^2 (\lambda^2 - \lambda^{-1})^{0,5} \cdot Z \cdot Q_1^{(1)}(\text{ch } u) \cdot P_1^{(1)}(\cos \theta) \cos \phi, \\ B_2 = & B_3 = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

де  $Z$  – довільна постійна, що визначає рівень вихрового поля переміщень. Невідому постійну  $Z$  будемо визначати із розв'язку крайових рівнянь, які відповідають крайовим умовам (5) і виражаються через напруження однорідної взаємодії  $\alpha_{12}^o$ .

Поле однорідної взаємодії  $\alpha_{12}^o$  визначаємо з використанням першого представлення пружної енергії при повздовжньому зсуві:

$$\hat{\sigma}_{23} \cdot \hat{\gamma}_{12} = \frac{1}{\theta} \int_{(S_*)} (\sigma_u^a u_u^a + \sigma_{u\theta}^a u_\theta^a + \sigma_{u\phi}^a u_\phi^a) \cdot \mathbf{h} \cdot \mathbf{h}_\phi \cdot d\theta d\phi, \quad (26)$$

де  $S_*$  – приведена поверхня інтегрування, що прирівнюється до поверхні витягнутого сфероліта (до поверхні витягнутого еліпсоїда обертання, софокусного з сферолітом);  $u_u^a$ ,  $u_\theta^a$ ,  $u_\phi^a$  – однорідні поля переміщень, які виражаються з таких рівнянь:

$$\begin{aligned} u_u^a = & \hat{\gamma}_{12} \frac{r \cdot (\lambda^2 - \lambda^{-1})^{0,5}}{4 (\text{sh}^2 u_* + \sin^2 \theta)^{0,5}} (\text{ch}^2 u_* + \text{sh}^2 u_*) \cdot \sin 2\theta \cdot \cos \phi, \\ u_\theta^a = & \hat{\gamma}_{12} \frac{r \cdot (\lambda^2 - \lambda^{-1})^{0,5}}{4 (\text{sh}^2 u_* + \sin^2 \theta)^{0,5}} \text{sh } 2u_* \cdot \cos 2\theta \cdot \cos \phi, \\ u_\phi^a = & -\hat{\gamma}_{12} \frac{r \cdot (\lambda^2 - \lambda^{-1})^{0,5}}{2} \cdot \text{ch } u_* \cdot \cos \theta \cdot \sin \phi, \end{aligned} \quad (27)$$

$\sigma_u^a$ ,  $\sigma_{u\theta}^a$ ,  $\sigma_{u\phi}^a$  – однорідні поля напружень, які визначаються з таких виразів:

$$\begin{aligned}\sigma_u^a &= \frac{\hat{\sigma}_{12}}{2(\operatorname{sh}^2 u_* + \sin^2 \theta)} \cdot \operatorname{sh} 2u_* \cdot \sin 2\theta \cdot \cos \phi, \\ \sigma_{u\theta}^a &= \frac{\hat{\sigma}_{12}}{\operatorname{sh}^2 u_* + \sin^2 \theta} \cdot (\operatorname{sh}^2 u_* \cdot \cos^2 \theta - \operatorname{ch}^2 u_* \cdot \sin^2 \theta) \cdot \cos \phi, \\ \sigma_{u\phi}^a &= -\frac{\hat{\sigma}_{12}}{\operatorname{sh}^2 u_* + \sin^2 \theta} \cdot \operatorname{sh} u_* \cdot \cos \theta \cdot \sin \phi,\end{aligned}\quad (28)$$

де  $u_*$  – зміщення на приведеній поверхні інтегрування  $S_*$ .

Ефективний модуль пружності при повздовжньому зсуві  $G_{12}$  визначаємо з другого представлення пружної енергії:

$$\frac{\hat{\sigma}_{12}}{G_{12}} = \frac{1}{\theta} \int_{(S_*)} (\sigma_u^a u_u^a + \sigma_{u\theta}^a u_{\theta}^a + \sigma_{u\phi}^a u_{\phi}^a) \cdot h \cdot h_{\phi} \cdot d\theta d\phi, \quad (29)$$

Інтегруючи вираз (26) і (29) з врахуванням рівнянь (21), (22), (24), (25), а також (27) і (28), опускаючи громіздкі викладки перетворення, отримуємо вираз ефективного модуля пружності при повздовжньому зсуві:

$$G_{12} = E_a \frac{G1}{G2}, \quad (30)$$

де

$$\begin{aligned}G1 &= \left\{ E_c(1+\nu_a) + 2E_a(1-2\nu_c) + 2\chi^2 [E_c(1-2\nu_a) - E_a(1-2\nu_c)] \right\} \left\{ [E_c(1+\nu_a) + 2E_a(1-2\nu_c)] \times \right. \\ &\times \left\{ 3[E_a(1+\nu_c)\beta_1^{**} + E_c(1+\nu_a)\beta_3^{**}] + 2\chi^2(1+\nu_a)[E_c(1+\nu_a) - E_a(1+\nu_c)](\beta_2^{**} - \beta_4^{**}) + \right. \\ &\left. \left. + 2\chi^2(1-2\nu_a)[E_c(1-2\nu_a) - E_a(1-2\nu_c)][E_a(1+\nu_c)\beta_1^{**} + E_c(1+\nu_a)\beta_3^{**}] \right\} \right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G2 &= 3 \left\{ E_c(1+\nu_a) + 2E_a(1-2\nu_c) + 2\chi^2 [E_c(1-2\nu_a) - E_a(1-2\nu_c)] \right\} \left\{ E_c [(1+\nu_a) + 2E_a(1-2\nu_c)] \times \right. \\ &\times \left\{ 3[E_a(1+\nu_c)\beta_1^{**} + E_c(1+\nu_a)\beta_3^{**}] + 4\chi^2(1+\nu_a)\beta_4^{**} [E_c(1+\nu_a) - E_a(1+\nu_c)] \right\} - \\ &- \chi^2(1+\nu_a)[E_c(1-2\nu_a) - E_a(1-2\nu_c)] [E_a(1+\nu_c)\beta_1^{**} + E_c(1+\nu_a)\beta_3^{**}] - \{ E_c(1-2\nu_a)(1+\nu_a) + \\ &+ 2E_a(1-2\nu_c)(1-2\nu_a) + \chi^2 [E_a(1-2\nu_c)(1+\nu_a) - E_c(1-2\nu_a)(1+\nu_c)] \} [E_c(1+\nu_a) + \\ &+ 2E_a(1-2\nu_c)] \left\{ 3[E_a(1+\nu_c)\beta_1^{**} + E_c(1+\nu_a)\beta_3^{**}] + 2\chi^2(1+\nu_a)(\beta_1^{**}\gamma_2^{**} - \beta_2^{**}\gamma_1^{**}) [E_c(1+\nu_a) - \right. \\ &\left. - E_a(1+\nu_c)] \right\} + 2\chi^2(1-2\nu_a)[E_c(1-2\nu_a) - E_a(1-2\nu_c)] [E_a(1+\nu_c)\beta_1^{**} + E_c(1+\nu_a)\beta_3^{**}] \left. \right\},\end{aligned}$$

де  $\chi$  – ступінь об'ємної кристалічності полімерного матеріалу;  $\gamma_i^{**}$  і  $\beta_i^{**}$  – функції, що визначають зміну параметрів структури полімерного матеріалу від ступеня витяжки  $\lambda$  при повздовжньому зсуві.

$$\begin{aligned}\gamma_1^{**} &= \frac{\lambda\sqrt{\lambda} \ln a + 2\lambda^3\sqrt{\lambda^3-1}}{2(\lambda\sqrt{\lambda} \ln a + 2\sqrt{\lambda^3-1})}, & \gamma_2^{**} &= \frac{3\lambda\sqrt{\lambda^3-1} - 2(\lambda+1)\sqrt{\lambda} \ln a}{2(\lambda\sqrt{\lambda} \ln a + 2\sqrt{\lambda^3-1})}, \\ \beta_1^{**} &= 3 - 4\nu_a - \frac{\lambda\sqrt{\lambda} \ln a + 2\lambda^3\sqrt{\lambda^3-1}}{2(\lambda\sqrt{\lambda} \ln a + 2\sqrt{\lambda^3-1})}, \\ \beta_2^{**} &= 3 - 4\nu_a - \frac{3\lambda\sqrt{\lambda^3-1} - 2(\lambda+1)\sqrt{\lambda} \ln a}{\lambda\sqrt{\lambda} \ln a + 2\sqrt{\lambda^3-1}}, \\ \beta_3^{**} &= -(1-2\nu_a) \frac{3\lambda\sqrt{\lambda^3-1} + 2(\lambda+1)\sqrt{\lambda} \ln a}{\lambda\sqrt{\lambda} \ln a + 2\sqrt{\lambda^3-1}} + \frac{3\lambda\sqrt{\lambda} \ln a + 2\lambda(1+\lambda^3)}{(\lambda^3-1)[\ln a + 2\lambda\sqrt{\lambda^3-1}]}, \\ \beta_4^{**} &= (1-2\nu_a) \frac{\lambda\sqrt{\lambda} \ln a - 2\lambda^3\sqrt{\lambda^3-1}}{\lambda\sqrt{\lambda} \ln a + 2\sqrt{\lambda^3-1}}.\end{aligned}\quad (31)$$

Рівняння (30) та (31) визначають поведінку повздовжнього модуля зсуву  $G_{12}$  попередньо

орієнтованої надмолекулярної структури полімерного матеріалу сферолітної будови залежно від ступеня витяжки матеріалу  $\lambda$  та його пружних властивостей.

### ВИСНОВКИ

Отримано аналітичні вирази, що дозволяють для заданого полімерного матеріалу визначити мінімальну деформацію зсуву в повздовжньому та поперечному до попередньої орієнтації витягнутих сферолітів напрямку, яку необхідно створити перероблюючим обладнанням для остаточного руйнування зв'язків між сферолітами або їх конгломератами, тобто для остаточного руйнування полімерів.

Отримані аналітичні залежності дозволяють перейти до проектування технологічного устаткування і визначення конструктивно-технологічних параметрів пристроїв і процесів переробки полімерних матеріалів з урахуванням їх структури.

Напруження зсуву в полімерному матеріалі можна створити, пропускаючи його між валками, виготовленими за профілем Рело, що забезпечить поперечну та повздовжню до попередньої орієнтації сферолітів деформацію зсуву. Тому в майбутньому буде розглянута схема навантаження полімерного матеріалу, на основі якої будуть отримані аналітичні залежності, що пов'язують основні технологічні та конструкційні параметри перероблюючого пристрою з валками, виготовленими за профілем Рело, з напружено-деформованим станом у полімерному матеріалі.

### Література

1. Синюк О. М. Модель будови недеформованих полімерів сферолітної структури / О. М. Синюк // Вісник Хмельницького національного університету. – 2016. – № 3. – С. 181–188.
2. Синюк О. М. Визначення пружних властивостей аморфно-кристалічних полімерів сферолітної структури / О. М. Синюк // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2016. – № 6. – С. 77–86.
3. Синюк О. М. Моделювання зміни надмолекулярної структури полімерних матеріалів при орієнтаційній витяжці / О. М. Синюк, М. Є. Скиба // Вісник Хмельницького національного університету. – 2016. – № 6. – С. 45–51.
4. Синюк О. М. Метод розрахунку ефективних пружних властивостей полімерів з орієнтованою структурою / О. М. Синюк // Технічні науки і технології: науковий журнал. – Чернігів : Чернігів. нац. технол. ун-т, 2016. – № 4. – С. 16–25.
5. Синюк О. М. Визначення раціональних конструкційних параметрів пристроїв для переробки полімерів / О. М. Синюк // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – 2017. – № 1. – С. 53–61.
6. Ванін Г. А. Микро-механика композиционных материалов / Г. А. Ванін. – Киев : Накова думка, 1985. – 304 с.
7. Лурье А. И. Теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1970. – 940 с.
8. Синюк О. М. Математична модель анізотропних властивостей полімерних матеріалів / О. М. Синюк // Вісник Хмельницького національного університету. – 2015. – № 1. – С. 12–19.

### References

1. Synyuk O. M. Model of the structure of undeformed polymers with spherulitic structure, Herald of Khmelnytskyi National University, 2016, no. 3, pp. 181–188.
2. Synyuk O. M. Vyznachennya pruzhnykh vlastyvostryy amorfno-krystalichnykh polimeriv sferolitnoyi struktury, Visnyk Vinnytskoho politekhnichnoho instytutu, 2016, no. 6, pp. 77–86.
3. Synyuk O. M., Skyba M. YE. Modelyuvannya zminy nadmolekulyarnoyi struktury polimernykh materialiv pry oriyentatsiyniy vytyazhtsi, Herald of Khmelnytskyi National University, 2016, no. 6, pp. 45–51.
4. Synyuk O. M. Metod rozrakhunku efektyvnykh pruzhnykh vlastyvostryy polimeriv z oriyentovanoyu strukturoyu, Tekhnichni nauky i tekhnolohiyi: naukovyy zhurnal, Chernihiv : ChNTU, 2016, no. 4, pp. 16–25.
5. Synyuk O. M. Vyznachennya ratsionalnykh konstruksiynykh parametriv prystroyiv dlya pererobky polimeriv, Visnyk Ternopil'skoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu, 2017, no. 1, pp. 53–61.
6. Vanin G. A. Mikro-mekhanika kompozitsionnykh materialov, Kiev : Nakova dumka, 1985, 304 p.
7. Lur'ye A. I. Teoriya uprugosti, M. : Nauka, 1970, 940 p.
8. Synyuk O. M. Matematychna model anizotropnykh vlastyvostryy polimernykh materialiv, Herald of Khmelnytskyi National University, 2015, no. 1, pp. 12–19.

Отримана/Received : 2.9.2017 р. Надрукована/Printed : 17.9.2017 р.

Рецензент: д.т.н., проф. Скиба М.Є.