

ВИЗНАЧЕННЯ В'ЯЗКОПРУЖНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ ПОЛІМЕРНОГО МАТЕРІАЛУ

В статті розглядається метод, який дає можливість визначити в'язкопружну деформацію полімерного матеріалу, в якому створюється складний напружено-деформований стан. Вирази для визначення деформацій полімерного матеріалу можна використовувати для розрахунку дотичних і нормальних навантажень, які мають забезпечуватися зусиллям, що створюватиме обладнання для переробки полімерних відходів, під дією яких буде відбуватися руйнування полімерного матеріалу.

Ключові слова: полімерний матеріал, напружено-деформований стан, експонентні ядра, трансверсально ізотропний матеріал.

O.M. SYNYUK, O.A. KRAVCHUK, A.Y. KRAVCHUK

Khmelnytsky National University

DETERMINATION OF VOLUNTEER STRESS DEFORMATION OF POLYMERNAL MATERIAL

The article deals with the method that makes it possible to determine the viscoelastic deformation of a polymeric material in which a complex stress-strain state is created. Expressions for determining the deformations of a polymeric material can be used to calculate the tangential and normal loads to be provided by the effort that will create the equipment for the processing of polymeric waste, under the influence of which the destruction of the polymeric material will occur. In the first stage, the polymer waste is processed on the toothed rollers, where they are stretched and compressed; At the second stage, polymeric wastes with a relaxed structure are treated on devices with rolls of the Relo profile, where they undergo compression and shear deformations; in the third stage, the polymer waste with a partially destroyed structure is treated with a needle-cutter device where they are finally destroyed in the places that were most weakened in the previous stages. For determination of rational structural parameters of processing devices and technological modes of their work the processes of deformation of polymer material in these devices are considered. The specificity of polymers limits the use of resistance to materials to determine the strength and therefore it is necessary to make significant adjustments to them. The basis of the theory of strength and deformation of polymeric materials should be based on the lawfulness of the studies on the influence of the time, temperature, humidity, anisotropy and other factors.

Key words: polymer material, stress-deformed state, exponential nuclei, transversally isotropic material.

Постановка проблеми: знайти та представити метод, який би надавав можливість визначити в'язкопружну деформацію полімерного матеріалу, в якому створюється складний напружено-деформований стан.

Вступ. Згідно з розробленою в роботі [1, 2] концепцією проектування обладнання для переробки полімерних відходів, що враховує зміну надмолекулярної структури полімерного матеріалу та анізотропію його властивостей при створенні у ньому складного напружено-деформованого стану, визначимо схему переробки полімерних відходів (рис. 1).

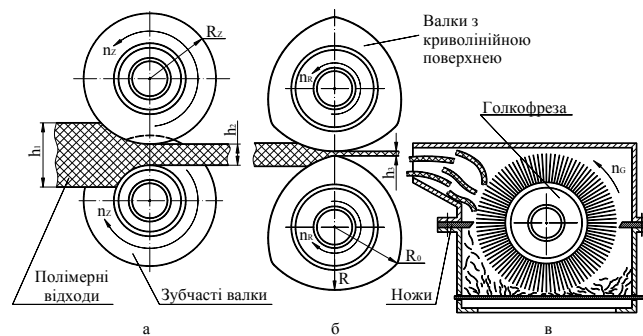


Рис. 1. Схема перетворення полімерних відходів на частинки: а – вузол зубчастих валків; б – вузол валків з криволінійною поверхнею; в – вузол голкофрези

Як видно з рис. 1 на першому етапі полімерні відходи оброблюються на зубчастих валках, де вони розтягуються і стискаються; на другому етапі полімерні відходи з послабленою структурою оброблюються на пристрої із валками профілю Рело, де вони піддаються деформаціям стиску та зсуву; на третьому етапі полімерні відходи із частково зруйнованою структурою оброблюються на голкофрезовому пристрої, де вони остаточно руйнуються в місцях, які були найбільш послаблені на попередніх етапах.

Для визначення раціональних конструкційних параметрів перероблювальних пристроїв та технологічних режимів їх роботи розглянемо процеси деформації полімерного матеріалу в цих пристроях (рис. 2). В пристрої із зубчастими валками матеріал спочатку витягується, а потім стискається, що дозволяє створити і зафіксувати в матеріалі орієнтовану надмолекулярну структуру. Після чого орієнтований полімерний матеріал подається в пристрій із валками Рело, де він піддається деформаціям стиску і зсуву.

Специфіка полімерів обмежує застосування методів з опору матеріалів для визначення міцності і тому постає необхідність внесення до них суттєвих корективів. В основу теорії міцності і деформування полімерних матеріалів повинно бути покладено отримані з дослідів закономірності щодо впливу фактора часу, температури, вологості, анізотропії та інші.

Полімери, що є пружно-в'язко-пластичними матеріалами, властива нестабільність структури в часі і при змінні температури. Їхня міцність і деформація змінюються в часі при постійно діючих, ступінчатих та змінних навантаженнях. Під впливом навантаження в полімерних матеріалах виникають миттєві пружні деформації і деформації, що розвиваються в часі, – в'язкопружні та пластичні. Розглядається два типи деформації, що створюються перероблювальним обладнанням в полімерному матеріалі: в'язкопружний та пластичний (руйнуючий). За зовнішнім результатом вони ідентичні, в обох випадках відбувається зміщення надмолекулярних структур, макромолекул або їх ланцюгів, але за сутністю ці деформації різні. В процесі в'язкопружного деформування зміщення зумовлюється тепловими флуктаціями і здійснюються поступово, по мірі вивільнення місця, тому в'язкопружна деформація не пов'язана з порушенням цілісності та початкової структури полімеру і для її розвитку вимагається лише час. В'язкопружні деформації незворотні як і пластичні, але вони не руйнують структуру полімеру, тому пружні властивості полімеру після в'язкої деформації не змінюються, а при зміні знака зусилля або підвищення температури в'язкопружна деформація може бути зведена до нуля.

Пластичні деформації не зникають після повного розвантаження протягом необмеженого великого періоду часу. Величина і швидкість розвитку в часі пластичної деформації залежать від величини і часу дії навантаження. Зростання цих деформацій пояснюється прогресуючим в часі виникненням і розвитком місцевих руйнувань.

Виклад основного матеріалу дослідження. Результати досліджень механічних релаксаційних явищ в полімерах в широкому температурно-часовому інтервалі кількісно співставляються один з другим на підставі двох основних методів опису їх поведінки. Ці методи інтерпретації в'язкопружного напружено-деформаційного стану полімерного матеріалу основані на двох підходах, що визначаються співвідношеннями між напруженнями і деформаціями. Перший підхід полягає у використанні функцій повзучості та релаксації у вигляді інтегралів Стілтєса [1, 2]:

$$\sigma(t) = \int_0^t E(t-\tau) \cdot \left[\frac{d\varepsilon_{kl}(\tau)}{d\tau} \right] \cdot d\tau, \quad (1)$$

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t-\tau) \cdot \left[\frac{d\sigma_{kl}(\tau)}{d\tau} \right] \cdot d\tau,$$

де τ – час релаксації; E, J – відповідно, функції релаксації і повзучості.

Другий підхід полягає у використанні в співвідношеннях між напруженнями і деформаціями ядер повзучості і релаксації у вигляді інтегралів Рімана [3]:

$$\sigma(t) = E \left[\varepsilon(t) - \int_0^t R(t-\tau) \cdot \varepsilon(\tau) \cdot d\tau \right], \quad (2)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left[\sigma(t) + \int_0^t K(t-\tau) \cdot \sigma(\tau) \cdot d\tau \right],$$

де $R(t-\tau) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \exp[-b_i(t-\tau)]$ – експонентне ядро релаксації;

$K(t-\tau) = \sum_{i=1}^n c_i \exp[-a_i(t-\tau)]$ – експонентне ядро повзучості.

Методики визначення параметрів експонентних ядер у рівняннях (2) засновані на різних наближених методах [3]. Недоліками експонентних ядер є те, що вони дають кінцеву швидкість деформації в початковий період навантаження. Крім того, для опису деформації реальних полімерів необхідна величезна кількість параметрів полімерного матеріалу. Тому, в математичній моделі деформації полімеру будемо використовувати рівняння (1).

Представимо інтегралі Стілтєса (1) в тензорній формі:

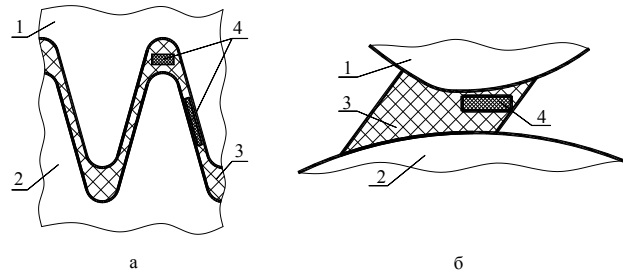


Рис. 2. Схема деформації полімеру між зубчастими валками (а) і валками профілю Рело (б): 1, 2 – верхній і нижній валки; 3 – полімерні відходи; 4 – нескінченно малий об'єм полімер

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^t E_{ijkl}(t-\tau) \cdot \left[\frac{d\varepsilon_{kl}(\tau)}{d\tau} \right] \cdot d\tau; \quad \varepsilon_{ij}(t) = \int_0^t J_{ijkl}(t-\tau) \cdot \left[\frac{d\sigma_{kl}(\tau)}{d\tau} \right] \cdot d\tau, \quad (3)$$

де τ – час релаксації; E_{ijkl}, J_{ijkl} – відповідно функції релаксації і повзучості, які утворюють тензори четвертого порядку.

При $-\infty < t < 0$ тензори E_{ijkl}, J_{ijkl} дорівнюють нулю, тобто $E_{ijkl}(t) = J_{ijkl}(t) = 0$, і кожен елемент цих тензорів має обмежену варіацію в будь-якому замкнутому підінтервалі з області $-\infty < t < \infty$.

Напруження, що виникають у полімерному матеріалі в процесі його обробки (рис. 3), визначимо з виразу узагальненого закону Гука [3, 4, 5] таким чином:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, \quad (4)$$

де σ_{ij} і ε_{kl} – відповідно тензори напруження і деформацій другого рангу відповідно; C_{ijkl} – тензор коефіцієнтів четвертого рангу, що описують пружні властивості полімерних матеріалів.

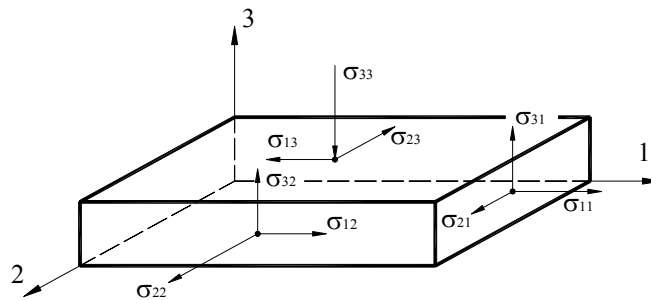


Рис. 3. В'язкопружна деформація нескінченно малого об'єму полімеру

Два однакові індекси позначатимуть нормальні напруження, а два різні індекси позначатимуть дотичні напруження. Причому цифра 1 позначає вісь x або повернену вісь x' , цифра 2 – вісь y або повернену вісь y' , цифра 3 – вісь z або повернену вісь z' :

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Якщо $k = 1$, то ε_{kl} представляють відносні деформації (подовження бо укорочення), а якщо $k \neq 1$, то ε_{kl} представляють відносні деформації зсуву. При цьому слід мати на увазі, що у формулі (4) підсумовування проводиться по індексах, що зустрічаються двічі в правій частині формули, тобто за індексами k і l . Для обчислення всього напруженого стану анізотропного тіла в загальному випадку буде потрібно $34 = 81$ значення релаксаційних постійних. Проте симетричність тензорів σ_{ij} і ε_{kl} дозволяє зменшити кількість незалежних компонент до 36.

Вирішуючи рівняння (4) відносно деформації ε_{kl} отримаємо вираз закону Гука у в'язкопружній постановці у вигляді:

$$\varepsilon_{kl} = S_{ijkl} \cdot \sigma_{ij}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, \quad (6)$$

де $S_{ijkl} = \frac{1}{C_{ijkl}} = C_{ijkl}^{-1}$ – тензор податливостей (або тензор коефіцієнтів, що описують в'язкопружні властивості полімерів).

При цьому згідно до [3, 5] величину в'язкопружного потенціалу можна представити у вигляді квадратичної функції напруження:

$$U = \frac{1}{2} \cdot S_{ijkl} \cdot \sigma_{ij} \cdot \sigma_{kl}. \quad (7)$$

У [3] показано, що величина в'язкопружного потенціалу U різна для різних напружених станів, але постійна (інваріантна) для кожного даного напруженого стану і не залежить від повороту осей координат. Умова інваріантності величини в'язкопружного потенціалу від повороту координатних осей для конкретного виду напруженого стану лежить в основі визначення релаксаційних властивостей полімерних матеріалів. При цьому в процесі формування полімерних матеріалів згідно до структурної моделі, можливе чергування кристалічних і аморфних областей, що мають різні фізико-механічні властивостями і різні типи симетрії їх релаксаційних властивостей. Для опису в'язкопружних властивостей полімерних матеріалів необхідно мати в своєму розпорядженні рівняння, що встановлюють взаємозв'язок їх релаксаційних властивостей з типами

їх анізотропії, тобто з типами їх структурної симетрії. Для отримання основних визначальних співвідношень, що зв'язують різні типи структурної анізотропії полімерних матеріалів розглянемо тензор пружних постійних C_{ijkl} в компактнішому вигляді, при умові введення таких скорочених позначень для напружень і деформацій:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \sigma_1, & \varepsilon_{11} &= \varepsilon_1; \\ \sigma_{22} &= \sigma_2, & \varepsilon_{22} &= \varepsilon_2; \\ \sigma_{33} &= \sigma_3, & \varepsilon_{33} &= \varepsilon_3; \\ \sigma_{23} &= \sigma_4, & \varepsilon_{23} &= \varepsilon_4; \\ \sigma_{13} &= \sigma_5, & \varepsilon_{13} &= \varepsilon_5; \\ \sigma_{12} &= \sigma_6, & \varepsilon_{12} &= \varepsilon_6.\end{aligned}\tag{8}$$

Виконуючи заміну компонентів тензорів напружень та деформацій в рівнянні (4), враховуючи їх симетричність, отримаємо:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} \quad \text{або}\tag{9}$$

$$\sigma_i = C_{ij} \cdot \varepsilon_j, \quad (i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

Згідно з [3] матриця C_{ij} є симетричною відносно головної діагоналі. Це означає, що в рівнянні (9) коефіцієнти, що розташовані над головною діагоналлю і під нею, будуть попарно рівними між собою. В результаті лишиться 21 коефіцієнт, які розрізняються між собою:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}.\tag{10}$$

Нехай полімер має по відношенню до своїх в'язкопружних властивостей вісню симетрії другого порядку [3, 4]. Це означає, що після кожного повороту системи координат на 180° навколо осі симетрії значення в'язкопружних постійних в нерухомій і рухомій системі координат мають співпадати. Це дає рівність нулю таких компонентів матриці C_{ij} :

$$C_{14} = C_{24} = C_{34} = C_{15} = C_{25} = C_{35} = C_{46} = C_{56} = 0.\tag{11}$$

Підставляючи рівняння (11) в рівняння (10) отримаємо матрицю C_{ij} , яка має 13 незалежних компонент:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ & & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}.\tag{12}$$

Для випадку ортотропної полімерного матеріалу по відношенню до трьох взаємно перпендикулярних площин матриця C_{ij} буде мати 9 незалежних компонент [1, 2]. Згідно з [5] ортотропне тіло можна представити як призму, що містить решітку з трьох взаємно перпендикулярних "стрижнів" різних розмірів та розташованих вздовж координатних осей x , y та z , як показано на рис. 4.

Подібне уявлення ортотропного континууму, звичайно, умовно; воно служить лише зручною формою для наочного представлення матеріалу, який має різні пружні властивості в різних напрямках. З рис. 4 видно, що ортотропне тіло буде по-різному реагувати на вплив нормальних і дотичних зусиль, прикладених до різних граней призми – до граней з нормальними уздовж координатних осей x, y, z . Наприклад, деформація e_{zz} , пов'язана з напруженням σ_{zz} , буде помітно меншою за деформацію e_{xx} , що пов'язана з напруженням σ_{xx} . Аналогічно деформації зсуву e_{yz} , викликані дотичними напруженнями σ_{yz} , будуть менші, ніж деформації зсуву e_{xy} , викликані дотичними напруженнями σ_{xy} .

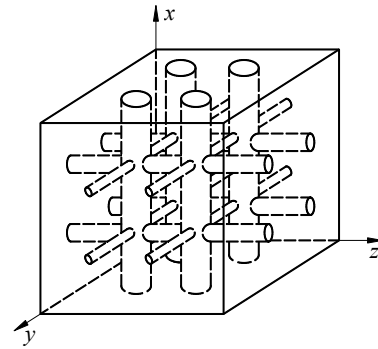


Рис. 4. Ортотропний матеріал

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Як видно з рівняння (13) система має більше невідомих, ніж рівнянь. Введемо ще одне припущення – представимо полімер як трансверсально ізотропний матеріал (рис. 5). Тобто таким же способом, що й ортотропний, за тим винятком, що взаємно перпендикулярна сітка стрижнів у двох координатних напрямках (y та z) має однакові розміри [5].

З рис. 5 видно, що напрямки x і y еквівалентні. Така еквівалентність дозволяє описати трансверсально ізотропний матеріал за допомогою п'яти постійних замість дев'яти, необхідних для ортотропного.

Так як маємо ізотропність властивостей матеріалу по координатах y та z , то коефіцієнт, що стоїть перед $\varepsilon_2(\varepsilon_y)$ в другому рівнянні системи (12), дорівнює коефіцієнту, що стоїть перед $\varepsilon_3(\varepsilon_z)$ в третьому рівнянні даної системи, а коефіцієнт, що стоїть перед $\varepsilon_2(\varepsilon_y)$ в першому рівнянні системи (12), дорівнює коефіцієнту, що стоїть перед $\varepsilon_3(\varepsilon_z)$ в третьому рівнянні цієї системи, тобто $C_{22} = C_{33}$, а $C_{12} = C_{13}$.

Крім того, зсув в ізотропній площині y, z забезпечує певне співвідношення між постійними при $\varepsilon_2(\varepsilon_{yy}), \varepsilon_3(\varepsilon_{zz})$ в другому рівнянні системи (12) та постійною при $\varepsilon_4(\varepsilon_{yz})$ в четвертому рівнянні цієї ж системи. Для визначення цього співвідношення розглянемо зсув під дією напруження σ_2 на рис. 6.

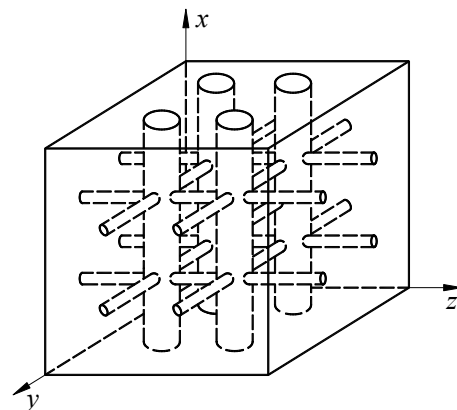


Рис. 5. Трансверсально ізотропний матеріал

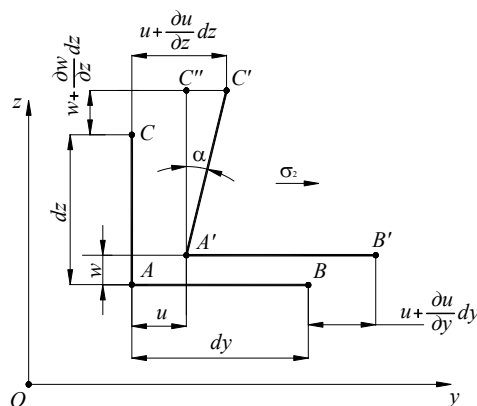


Рис. 6. Схема зсуву під дією напруження σ_2

Складові переміщення точки C будуть відрізнятися від складових переміщення точки A на

нескінченно малу величину за рахунок зміни координати z :

$$u + \frac{\partial u}{\partial z} dz; \quad w + \frac{\partial w}{\partial z} dz.$$

Довжина проекції ребра АВ на вісь y буде дорівнювати:

$$A'B' = dy - u + u + \frac{\partial u}{\partial y} dy = dy + \frac{\partial u}{\partial y} dy. \quad (14)$$

Отже проекція абсолютного подовження ребра АВ на вісь y :

$$\Delta AB = A'B' - AB = dy + \frac{\partial u}{\partial y} dy - dy = \frac{\partial u}{\partial y} dy,$$

а відносно подовження вздовж осі u становитиме:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_y = \frac{\Delta AB}{AB} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (15)$$

Розглянемо зміну кута між ребрами АС та АВ, що була викликана напруженням σ_2 . Тангенс кута повороту ребра АС в площині uOz .

Обмежуючись розглядом тільки малих деформацій, можна вважати, що $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$, і знехтувати лінійною деформацією ε_z через малість u порівнянні з одиницею. Тоді кутова деформація буде дорівнювати:

$$\varepsilon_4 = \gamma_{zy} = \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (16)$$

Враховуючи залежності між дотичними і нормальними напруженнями [4] можна записати:

$$\frac{\sigma_2 - 0}{2} = \sigma_4. \quad (17)$$

де σ_2 – нормальне напруження, σ_4 – тангенціальне напруження.

Виразимо σ_2 і σ_4 з системи $\sigma_i = C_{ij} \cdot \varepsilon_j$, де C_{ij} – матриця коефіцієнтів (13).

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \varepsilon_2 \cdot C_{22} - \varepsilon_3 \cdot C_{23}, \\ \sigma_4 &= \varepsilon_4 \cdot C_{44}. \end{aligned} \quad (18)$$

В першому рівнянні знак “–” означає протилежний напрям деформацій: по осі y – розтяг, а по осі z – стиск.

Підставивши вирази напружень σ_2 , σ_4 з (18) в рівняння (17), отримаємо:

$$C_{44} \cdot \varepsilon_4 = \frac{\varepsilon_2 \cdot (C_{22} - C_{23})}{2}. \quad (19)$$

Тут $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ за умови ізотропності властивостей матеріалу по координатах y та z . Враховуючи (16) формула (19) запишеться таким чином:

$$C_{44} = \frac{C_{22} - C_{23}}{2}. \quad (20)$$

Ізотропність властивостей матеріалу по координатах y та z задовольняє умові $C_{44} = C_{66}$. Враховуючи це перепишемо рівняння (20) в такому вигляді:

$$C_{44} = C_{66} = \frac{C_{22} - C_{23}}{2}. \quad (21)$$

Враховуючи вищевикладене отримаємо матрицю постійних в такому вигляді:

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} = C_{13} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} = C_{33} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Використання співвідношень (12), (13), (22) при практичних розрахунках пов'язане зі значними експериментальними труднощами в ході визначення компонент C_{ij} , з прямих фізико-механічних

експериментів. Через це в практичних розрахунках будемо використовувати такі постійні, методи визначення яких відомі і детально викладені у роботах [2, 5]. Для цього перепишемо рівняння (3.6) в такому вигляді:

$$\varepsilon_i = S_{ij} \cdot \sigma_j \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \quad (23)$$

Де матриця податливостей S_{ij} визначається таким чином:

$$S_{ij} = \frac{C_{ij}^T}{|C_{ij}|},$$

де C_{ij}^T – транспонована матриця, елементами якої є алгебраїчні доповнення матриці C_{ij} , $|C_{ij}|$ – визначник матриці.

З умови симетрії $C_{ij} = C_{ji}$ витікає симетрія $S_{ij} = S_{ji}$.

Розглянемо випадок, коли σ_1 – єдине діюче напруження, тоді ε_1 , згідно з (23) можна виразити таким чином

$$\varepsilon_1 = S_{11} \cdot \sigma_1 = \frac{\sigma_1}{E_{11}}. \quad (24)$$

Якщо діє тільки напруження σ_2 , то

$$\varepsilon_2 = S_{22} \cdot \sigma_2 = \frac{\sigma_2}{E_{22}}, \quad (25)$$

а якщо діє тільки напруження σ_3 , то

$$\varepsilon_3 = S_{33} \cdot \sigma_3 = \frac{\sigma_3}{E_{33}}. \quad (26)$$

Деформації в перпендикулярних напрямках можна зв'язати такою залежністю [4]

$$\varepsilon_1 = -\nu_{21} \cdot \varepsilon_2. \quad (27)$$

Підставляючи рівняння (25) в (27) можна отримати

$$\varepsilon_1 = -\nu_{21} \frac{\sigma_2}{E_{22}}, \quad (28)$$

де E_{ij} – в'язкопружні модулі; ν_{ij} – коефіцієнти Пуассона (перший індекс показує напрямок прикладеного навантаження, а другий – напрямок зміни поперечних розмірів).

Для загального випадку нормального навантаження маємо

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E_{11}} - \nu_{21} \frac{\sigma_2}{E_{22}} - \nu_{31} \frac{\sigma_3}{E_{33}}, \\ \varepsilon_2 &= -\nu_{12} \frac{\sigma_1}{E_{11}} + \frac{\sigma_2}{E_{22}} - \nu_{32} \frac{\sigma_3}{E_{33}}, \\ \varepsilon_3 &= -\nu_{13} \frac{\sigma_1}{E_{11}} - \nu_{23} \frac{\sigma_2}{E_{22}} + \frac{\sigma_3}{E_{33}}. \end{aligned} \quad (29)$$

Для загального випадку дотичного навантаження маємо

$$\varepsilon_4 = \frac{\sigma_4}{G_{23}}, \quad \varepsilon_5 = \frac{\sigma_5}{G_{13}}, \quad \varepsilon_6 = \frac{\sigma_6}{G_{12}}. \quad (30)$$

Отже, враховуючи рівняння (29) та (30) запишемо матрицю податливостей S_{ij} через в'язкопружні постійні в розгорненому вигляді для трансверсального ізотропного полімерного матеріалу

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & -\frac{\nu_{31}}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & -\frac{\nu_{32}}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Підставивши формулу (31) в (23) з врахуванням (22), отримаємо

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & -\frac{\nu_{31}}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & -\frac{\nu_{32}}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Отримана система з шести рівнянь встановлює взаємозв'язок між основними в'язкопружними параметрами полімерного матеріалу і може вважатися моделлю ізотропного орієнтованого полімеру.

Із властивості симетрії матеріалу $[S_{ij}] = [S_{ji}]$ та з рівняння (32) витікає співвідношення

$$\nu_{ij} E_j = \nu_{ji} E_i. \quad (33)$$

Тут підсумовування за індексами, що повторюються, не проводиться.

Деформація полімерних відходів у валкових пристроях відбувається в умовах, коли полімерний матеріал знаходиться в умовах плоского напруженого стану. В цьому випадку маємо $\sigma_3 = \sigma_{33} = 0$; $\sigma_4 = \sigma_{23} = 0$; $\sigma_5 = \sigma_{13} = 0$ [1, 3], і підставляючи ці умови в рівняння (33) отримаємо:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}. \quad (34)$$

З системи (34) видно, що для опису поведінки полімеру при створенні в ньому складного напружено-деформованого стану необхідно мати значення чотирьох незалежних в'язкопружних констант.

З рівняння (34) може бути отримане зворотнє співвідношення

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\nu_{21} & 0 \\ E_{11} & E_{22} & 0 \\ -\nu_{12} & 1 & 0 \\ E_{11} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Обернену матрицю визначимо, використовуючи відому формулу перетворення $C = S^{-1} = \frac{1}{|S|} \cdot S_*^T$,

де $|S|$ – визначник вихідної матриці S ; S_*^T – транспонована матриця алгебраїчних доповнень відповідних елементів матриці S . В результаті отримаємо:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E_{11}}{1-\nu_{21}\nu_{12}} & \frac{\nu_{21}E_{11}}{1-\nu_{21}\nu_{12}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_{22}}{1-\nu_{21}\nu_{12}} & \frac{E_{22}}{1-\nu_{21}\nu_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} \quad \text{або} \quad \sigma_i = C_{ij} \cdot \varepsilon_j, \quad (i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6). \quad (36)$$

Взаємозв'язок між в'язкопружними компонентами з рівняння (36) і константами C_{ij} [2] легко встановити, якщо покласти, що напруження σ_3 дорівнює нулю [Кристансен]. В результаті отримаємо таку систему рівнянь

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}} & C_{12} - \frac{C_{13} \cdot C_{23}}{C_{33}} & 0 \\ C_{12} - \frac{C_{13} \cdot C_{23}}{C_{33}} & C_{22} - \frac{C_{23}^2}{C_{33}} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Введемо такі позначення: $Q_{11} = C_{11} - C_{13}^2 / C_{33}$; $Q_{12} = Q_{21} = C_{12} - C_{13}C_{23} / C_{33}$; $Q_{22} = C_{22} - C_{23}^2 / C_{33}$; $Q_{66} = C_{66}$.

Тоді система рівнянь (37) переписеться в такий спосіб:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}. \quad (38)$$

В процесі деформування полімерного матеріалу між зубчастими валками і валками профілю Рело полімерні відходи будуть повертатися на різні кути в площині обробки. У цьому випадку постає задача визначення релаксаційних характеристик полімерного матеріалу у напрямку дії визначеної системи сил [7].

При повороті системи координат, відносно якої прикладаються навантаження, на певний кут θ умова інваріантності в'язкопружного потенціалу (37) матиме такий вигляд [3].

Отже, для полімерного матеріалу, який повернений відносно осі системи координат, що є перпендикулярною площині симетрії, закон перетворення тензора C_{ijkl} в узагальненому законі Гука [2, 3] та у в'язкопружній постановці буде мати такий вигляд [Кристансен].

$$C'_{ijkl} = a_{im} a_{jn} a_{ko} a_{lp} C_{mnop} \quad (39)$$

Прийmemo $1', 2', 3'$ (або x', y', z') – нові осі системи координат 1, 2, 3 (або x, y, z), повернені відносно осі 3 (або z), тоді відповідно до [3] можна записати:

$$\begin{aligned}
C'_{11} &= m^4 C_{11} + 2m^2 n^2 \cdot (C_{12} + 2C_{66}) + 4mn \cdot (m^2 C_{16} + n^2 C_{26}) + n^4 C_{22}, \\
C'_{12} &= m^2 n^2 \cdot (C_{11} + C_{22} - 4C_{66}) - 2mn \cdot (m^2 - n^2) \cdot (C_{16} - C_{26}) + (m^4 + n^4) \cdot C_{12}, \\
C'_{13} &= m^2 C_{13} + n^2 C_{23} + 2mn C_{36}, \\
C'_{16} &= m^2 \cdot (m^2 - 3n^2) \cdot C_{16} - mn \cdot (m^2 C_{11} - n^2 C_{22} - (m^2 - n^2) \cdot (C_{12} + 2C_{66})) + n^2 \cdot (3m^2 - n^2) \cdot C_{26}, \\
C'_{22} &= n^4 C_{11} + 2m^2 n^2 \cdot (C_{12} + 2C_{66}) - 4mn \cdot (m^2 C_{26} + n^2 C_{16}) + m^4 C_{22}, \\
C'_{23} &= n^2 C_{13} + m^2 C_{23} - 2mn C_{36}, \\
C'_{26} &= m^2 \cdot (m^2 - 3n^2) \cdot C_{26} - mn \cdot (n^2 C_{11} - m^2 C_{22} + (m^2 - n^2) \cdot (C_{12} + 2C_{66})) + n^2 \cdot (3m^2 - n^2) \cdot C_{16}, \\
C'_{33} &= C_{33}, \\
C'_{36} &= (m^2 - n^2) \cdot C_{36} + mn \cdot (C_{23} - C_{13}), \\
C'_{44} &= m^2 C_{44} - 2mn C_{45} + n^2 C_{55}, \\
C'_{45} &= (m^2 - n^2) \cdot C_{45} + mn \cdot (C_{44} - C_{55}), \\
C'_{55} &= m^2 C_{55} + 2mn C_{45} + n^2 C_{44}, \\
C'_{66} &= m^2 n^2 \cdot (C_{11} + C_{22} - 2C_{12}) + 2mn \cdot (m^2 - n^2) \cdot (C_{22} - C_{16}) + (m^2 - n^2)^2 \cdot C_{66},
\end{aligned} \tag{40}$$

де $n = \sin \theta$, $m = \cos \theta$, θ – кут повороту.

Отримаємо формули перетворення для співвідношення напруження – деформація при тому ж таки плоскому напруженому стані. Для ортотропного полімерного матеріалу, що володіє тільки однією площиною симетрії, яка співпадає з площиною 1, 2 (або x , y) системи координат, співвідношення напруження – деформація (6) можна узагальнити таким чином:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}, \tag{41}$$

де

$$Q_{ij} = C_{ij} - \frac{C_{i3} C_{j3}}{C_{33}}. \tag{42}$$

Наявність компонент $Q_{16} = Q_{61}$, $Q_{26} = Q_{62}$ в (42) відображає взаємодію між нормальними та дотичними напруженнями і деформаціями. Компоненти Q_{ij} та C_{ij} при повороті системи координат підпорядковуються одному і тому ж закону перетворення (39) як компоненти тензора четвертого рангу. Відповідно до [3, 8] перетворення (40) можна записати в досить компактній формі.

Ввівши позначення

$$\begin{aligned}
m^4 &= \frac{1}{8}(3 + 4 \cos 2\theta + \cos 4\theta), \\
m^3 n &= \frac{1}{8}(2 \sin 2\theta + \sin 4\theta), \\
m^2 n^2 &= \frac{1}{8}(1 - \cos 4\theta), \\
mn^3 &= \frac{1}{8}(2 \sin 2\theta - \sin 4\theta), \\
n^4 &= \frac{1}{8}(3 - 4 \cos 2\theta + \cos 4\theta)
\end{aligned} \tag{43}$$

і підставляючи їх в (41) з врахуванням (40) компоненти Q_{ij} перетворюються до такого вигляду

$$\begin{pmatrix} Q'_{11} \\ Q'_{22} \\ Q'_{12} \\ Q'_{66} \\ 2Q'_{16} \\ 2Q'_{26} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 & 2U_6 & U_3 & U_7 \\ U_1 & -U_2 & -2U_6 & U_3 & U_7 \\ U_4 & 0 & 0 & -U_3 & -U_7 \\ U_5 & 0 & 0 & -U_3 & -U_7 \\ 0 & 2U_6 & -U_2 & 2U_7 & -2U_3 \\ 0 & 2U_6 & -U_2 & -2U_7 & 2U_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \\ \cos 4\theta \\ \sin 4\theta \end{pmatrix}, \tag{44}$$

де

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \frac{1}{8}(3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}), \\
 U_2 &= \frac{1}{2}(Q_{11} - Q_{22}), \\
 U_3 &= \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66}), \\
 U_4 &= \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66}), \\
 U_5 &= \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 4Q_{66}), \\
 U_6 &= \frac{1}{2}(Q_{16} + Q_{26}), \\
 U_7 &= \frac{1}{2}(Q_{16} - Q_{26}).
 \end{aligned} \tag{45}$$

Безпосередньо з системи рівнянь (45) випливають такі інваріантні властивості:

$$\begin{aligned}
 Q'_{11} + Q'_{22} + 2Q'_{12} &= Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{12}, \\
 Q'_{66} - Q'_{12} &= Q_{66} - Q_{12}.
 \end{aligned} \tag{46}$$

Вище змодельований напружено-деформований стан, що створюється в полімерному матеріалі при впливі на нього зубчастими валками. В результаті структура полімерного матеріалу орієнтується і залежно від прикладеного навантаження може бути зруйнована на вершинах зубців.

Далі орієнтований полімерний матеріал потрапляє в між валками профілю Рело, де він піддається впливу напружень стиску та зсуву. Припустимо, що орієнтований полімерний матеріал під впливом напружень зсуву розшаровується вздовж площини зсуву. Уявимо, що полімерний матеріал з орієнтованою структурою представляє собою утворений регулярною послідовністю ортотропних шарів.

Для того, щоб відшарувати один шар від іншого необхідно створити такий напружений стан в полімерному матеріалі, в результаті якого під дією напруження зсуву один шар полімеру буде переміщатися відносно іншого, руйнуючи тим самим адгезійні зв'язки між шарами.

Розглянемо створення такого плоского напруженого стану, який призведе до зсуву одного шару відносно іншого. Рівнодіючі напружень для такого напруженого стану в полімерному матеріалі записується відповідно до [3] у такому вигляді

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}, \tag{47}$$

де

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k h_k, \tag{48}$$

де h_k – товщина k -го шару полімерного матеріалу.

Розглянемо для прикладу член B_{11} . Перепишемо рівняння (48) у такому вигляді

$$B'_{11} = \sum_{k=1}^n (Q'_{11})_k h_k, \tag{49}$$

і визначимо значення в'язкопружної константи B'_{11} в напрямку i . Прийmemo, що вісі координатної системи 1, 2 співпадають з головними напрямками ортотропії даного шару. Таким чином, з рівняння (44) випливає

$$(Q'_{11})_k = U_1 + U_2 \cos 2\alpha + U_3 \cos 4\alpha, \tag{50}$$

де α – кут між напрямком орієнтованої структури полімеру і напрямком його подачі в простір між валками профілю Рело. Позначимо загальну товщину полімерного матеріалу через h_2 . Припустимо, що всі шари полімеру будуть однакові за товщиною, яка визначається за такою формулою:

$$h_k = \frac{h_2}{n}. \tag{51}$$

З рівнянь (49) та (50) з урахуванням (51) отримаємо

$$B'_{11} = \frac{h_2}{n} \left(U_1 + U_2 \sum_{k=1}^n \cos 2\alpha + U_3 \sum_{k=1}^n \cos 4\alpha \right). \quad (52)$$

Нехай будь-який напрямок деформації полімерного матеріалу буде повернутий на кут ϕ відносно попередньої орієнтації. Тоді в'язкопружні та інші властивості полімерного матеріалу в напрямку, поверненому щодо напрямку орієнтації на кут ϕ , можна виразити з рівняння (52):

$$B''_{11} = \frac{h_2}{n} \left(U_1 + U_2 \sum_{k=1}^n \cos 2(\alpha - \phi) + U_3 \sum_{k=1}^n \cos 4(\alpha - \phi) \right). \quad (53)$$

Використовуючи тригонометричні тотожності, отримаємо

$$B''_{11} = \frac{h_2}{n} \left(U_1 + U_2 \cos 2\phi \sum_{k=1}^n \cos 2\alpha + U_3 \sin 2\phi \sum_{k=1}^n \sin 2\alpha + U_3 \left(\cos 4\phi \sum_{k=1}^n \cos 4\alpha + \sin 4\phi \sum_{k=1}^n \sin 4\alpha \right) \right). \quad (54)$$

Аналогічно можна отримати вирази для повного комплексу в'язкопружних постійних полімерного матеріалу, необхідних для визначення технологічної деформації, що призведе до його розшарування.

З рівняння (47) може бути отримане зворотнє співвідношення

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{16} \\ L_{21} & L_{22} & L_{26} \\ L_{61} & L_{62} & L_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}, \quad (55)$$

де $L_{11} \dots L_{66}$ – податливості полімерного матеріалу, $L = B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot B^T$, де $|B|$ – визначник вихідної

матриці B ; B^T – транспонована матриця алгебраїчних доповнень відповідних елементів матриці B .

Під час розв'язання задачі у разі зсуву полімерного матеріалу вздовж трьох паралельних площин можна використовуючи викладений вище метод визначити технологічні деформації зсуву, які необхідно створити технологічним обладнанням, для забезпечення розшарування орієнтованого полімерного матеріалу. Полімерним матеріалом, що піддається напруженням зсуву, будемо вважати такий матеріал, в якому шари, які відносно переміщуються, знаходиться в умовах плоского напруженого стану.

Для того, щоб забезпечити розшарування полімерного матеріалу, необхідно між шарами створити такі нормальні напруження σ_{2k} і напруження зсуву σ_{6k} , щоб вони перевищили допустимі напруження, що створюються силами в'язку між шарами.

З рівняння (34), враховуючі введені [1, 2] позначення, визначимо деформації в орієнтованому полімерному матеріалі, на який діють напруження стиску і зсуву:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E_1} - \sigma_2 \frac{\nu_{21}}{E_2}; \\ \varepsilon_2 &= -\sigma_1 \frac{\nu_{12}}{E_1} + \frac{\sigma_2}{E_2}; \\ \gamma_{12} &= \frac{\sigma_{12}}{G_{12}}, \end{aligned} \quad (56)$$

Так як зовнішнє навантаження, що призводить до відокремлення шарів, задане, нормальні напруження в напрямку 1: σ_1 та напрямку 2: σ_2 , напруження зсуву σ_{12} мають бути еквівалентними середньому нормальному або тангенціальному напруженню.

В результаті деяких перетворень системи (56) з урахуванням рівності напружень і деформацій в шарах отримаємо:

$$\begin{aligned} A_{11}\sigma_1 &= \frac{2}{h_2} \left(\frac{\mathfrak{E}}{E_{11b}} \right), \\ A_{22}\sigma_2 &= -\frac{2}{h_2} \left(\nu_{12} \frac{\mathfrak{E}}{E_1} \right), \\ A_{33}\sigma_{12} &= \frac{4}{h_2} \left(\frac{\sigma_{12}}{G_{12}} \right). \end{aligned} \quad (57)$$

де $A_{11} = \frac{4}{E_1 h_2}$; $A_{22} = \frac{4}{E_2 h_2}$; $A_{33} = \frac{4}{G_{12} h_2}$; $A_{12} = A_{21} = -\frac{4\nu_{12a}}{E_1 h_2}$, де $\mathfrak{E} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ – еквівалентне напруження розтягу.

Розв'язуючи рівняння (57) відносно нормальних напружень σ_1 і σ_2 , отримаємо

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= -\frac{4\mathcal{E}}{E_1 h_2} \left(\frac{A_{22} + \nu_{12} A_{12}}{A_{11} A_{22} + A_{12}^2} \right), \\ \sigma_2 &= -\frac{4\mathcal{E}}{E_2 h_2} \left(\frac{A_{12} + \nu_{12} A_{11}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \right), \\ \sigma_{12} &= \frac{4\sigma_{12}}{h_2 G_{12} A_{33}}.\end{aligned}\quad (58)$$

У випадку дослідження плоского напруженого стану полімерного матеріалу при дії на нього зубчатих валків і валків профілю Рело, з рівняння (34), враховуючи рівняння (58) та (57), отримаємо вирази для визначення деформації всього матеріалу і окремих шарів в напрямках дії технологічного навантаження:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\mathcal{E}}{E_1^2 h_2} \cdot \frac{\frac{1}{E_2 h_2} - \frac{\nu_{12}^2}{E_1 h_2}}{\frac{1}{E_1 E_2 h_2^2} - \left(\frac{\nu_{12}}{E_1 h_2} \right)^2}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\mathcal{E}}{E_1^2 h_2} \cdot \frac{\frac{\nu_{12}^2}{E_1 h_2} - \frac{\nu_{12}^2}{E_2 h_2}}{\frac{1}{E_1 E_2 h_2^2} - \left(\frac{\nu_{12}}{E_1 h_2} \right)^2}, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{\sigma_{12}}{G_{12}}.\end{aligned}\quad (59)$$

Висновки. Отже, представлений вище метод дає можливість визначити в'язкопружну деформацію полімерного матеріалу, в якому створюється складний напружено-деформований стан. Вирази для визначення деформацій полімерного матеріалу можна використовувати для розрахунку дотичних і нормальних навантаження, які мають забезпечуватися зусиллям, що створюватиме обладнання для переробки полімерних відходів, під дією яких буде відбуватися руйнування полімерного матеріалу.

Література

1. Скиба М.Є. Структурно-механічна модель полімерних виробів, отриманих литтям під тиском / М.Є. Скиба, О.М. Синюк // Вісник Хмельницького національного університету. – 2014. – № 6 (219). – С. 27–33.
2. Синюк О.М. Математична модель анізотропних властивостей полімерних матеріалів / О.М. Синюк // Вісник Хмельницького національного університету. – 2015. – № 1 (221). – С. 12–19.
3. Кристенсен Р.М. Введение в механику композитов / Р.М. Кристенсен ; пер. с англ. А.И. Бейля, Н.П. Жмудя ; под ред. Ю.М. Тарнопольского. – М. : Мир, 1982. – 336 с.
4. Качанов Л.М. Основы теории пластичности / Л.М. Качанов – М. : Наука, 1969. – 420 с.
5. Ландау Л.Д. Теоретическая физика : в 10-и т. Т. VII. Теория упругости : учеб. пособие / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 248 с.
6. Блох В.И. Теория упругости / В.И. Блох.. – Харьков : Издательство Харьковского университета, 1964. – 484 с.
7. Tsai S.W., Pagano N.J. Invariant properties of composite materials.

References

1. Skyba M.E. Structural mechanical model of polymer products obtained by injection molding / M.E. Skyba, O.M. Syniuk // Herald of Khmelnytsky National University. – 2014. – № 6 (219). – P. 27–33.
2. Syniuk O.M. Mathematical model of anisotropic properties of polymer materials / O.M. Syniuk // Herald of the Khmelnytsky National University. – 2015. – No. 1 (221). – P. 12–19.
3. Christensen R.M. Introduction to the mechanics of composites / R.M. Christensen. Per. with ang. A.I. Beyle, N.P. Waving under ed. Yu.M. Tarnopolsky. – M.: World, 1982. – 336 p.
4. Kachanov L.M. Fundamentals of plasticity theory / L.M. Kachanov. – Moscow : Nauka, 1969. – 420 p.
5. Landau L.D. Theoretical physics. In 10 tons of T. VII. Theory of elasticity: Textbook. allowance / L.D. Landau, E.M. Lifshitz. – Moscow : Nauka. Gl Ed. phys.-mate Lit, 1987. – 248 p.
6. Bloch V.I. The theory of elasticity / V.I. Blokh. – Kharkiv : Publishing House of Kharkiv University, 1964. – 484 p.
7. Tsai S.W., Pagano N.J. Invariant properties of composite materials.

Рецензія/Peer review : 20.04.2018 р.

Надрукована/Printed : 15.05.2018 р.

Рецензент: канд. техн. наук, доц. Поліщук О.С.