

АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ МЕХАНІКИ ДИСКРЕТНОГО
СЕРЕДОВИЩА ЧИСЕЛЬНИМ МЕТОДОМ

Розглядається обґрунтування ітераційного алгоритму чисельного розв'язання плоскої фізично нелінійної граничної задачі механіки дискретного середовища. Особливістю задачі є врахування впливу на деформування середовища внутрішнього кулонового тертя та дилатансії.

Ключові слова: ітераційний алгоритм, дискретне середовище, внутрішнє тертя, дилатансія.

O.V. BAGRIY, V.V. KOVTUN
Khmelnytsky National University

ALGORITHMS FOR THE SOLUTION OF THE PLANE PROBLEM OF THE MECHANICS OF A DISCRETE
ENVIRONMENT BY NUMERICAL METHOD

Abstract – The purpose of research is to develop an algorithm for solving of a flat nonlinear problem of mechanics of discrete environment, which laws of deformation of take into account the effect of the internal friction and dilatancy.

Described the explanation of the iterative algorithm for the numerical solution of the plane physically nonlinear boundary value problems of mechanics of discrete environment. Feature of the problem is the consideration of the effect of internal Coulomb friction and dilatancy on the deformation of the environment.

Described in the article iterative algorithm for solving of a flat boundary value problems of mechanics of a discrete environment allows to take into account the influence on the process of deformation of two specific factors: internal friction and dilatancy. It can also be used to solve problems in the mechanics of solid deformable body with a most influence of internal friction, thermo-elasticity problems, etc.

Keywords: iterative algorithm, discrete environment, internal friction, dilatancy.

Вступ

Математичне формулювання плоскої задачі механіки дискретного середовища наведено у статті [1]. Система рівнянь, що формулюють задачу, записана аналогічно рівнянням теорії пластичності деформаційного типу. Визначальні співвідношення „напруження – деформації”, що включені в систему рівнянь, відрізняються від аналогічних співвідношень теорії пластичності тим, що враховують принципи відмінності деформування дискретного середовища від твердого тіла: вплив на опір зсуву внутрішнього кулонового тертя і прояв дилатансії [2]. Вказаний підхід дозволяє використати добре апробований апарат механіки деформівного твердого тіла для описання напружено-деформованого стану фізично дискретного масиву.

Як відмічалось в [1], плоску крайову задачу механіки дискретного середовища формулюють три групи рівнянь: рівняння статички (диференціальні рівняння рівноваги); рівняння нерозривності деформацій (лінійні диференціальні співвідношення Коші) і нелінійні фізичні рівняння – співвідношення „напруження – деформації”, що описують специфічні закони деформування дискретного середовища. Рішення задачі буде єдиним, якщо задовольняються умови рівноваги, нерозривності деформацій, прийняті фізичні співвідношення і граничні умови на межі розрахункової області. Усі рівняння, що відповідають вказаним вимогам, зручно представляти у формалізованій матричній або тензорній формі

1) Рівняння рівноваги

$$[A]\{\sigma\} = \{V\}, \quad (1)$$

де $[A] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$ – матриця диференціального оператора;

$\{\sigma\}, \{V\}$ – вектори напружень та об'ємних сил, $\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$, $\{V\} = \begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix}$.

2) Лінійні диференціальні залежності Коші, які описують умову нерозривності деформацій

$$\{\epsilon\} = [B]\{u\}, \quad (2)$$

де $[B] = [A]^T$ – матриця диференціального оператора;

$\{\epsilon\}, \{u\}$ – вектори деформацій і переміщень, $\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$, $\{u\} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix}$.

3) Фізичні співвідношення плоскої задачі механіки дискретного середовища записуються у формі

рівнянь узагальненого закону Гука, але зі змінними деформаційними параметрами – модулем зсуву G_{zm} і модулем об'ємної деформації K_{zm} , величини яких залежать від досягнутого в точці масиву напружено-деформованого стану.

Систему фізичних рівнянь можна записати одним нелінійним матричним рівнянням

$$\{\sigma\} = [D_{zm}] \{\varepsilon\}, \quad (3)$$

у якому $[D_{zm}]$ – матриця змінних деформаційних параметрів

$$[D_{zm}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} K_{zm} + 2G_{zm} & K_{zm} - 2G_{zm} & 0 \\ K_{zm} - 2G_{zm} & K_{zm} + 2G_{zm} & 0 \\ 0 & 0 & G_{zm} \end{bmatrix}; \quad (4)$$

$\{\sigma\}, \{\varepsilon\}$ – вектори напружень і деформацій;

G_{zm}, K_{zm} – змінні модуль зсуву та модуль об'ємної деформації.

Змінні модулі деформацій G_{zm}, K_{zm} визначаються з експериментально одержаної поверхні в умовному просторі інваріантів тензорів напружень і деформацій. Рівняння поверхні записується аналогічно рівнянням нелінійної теорії пружності як сума двох співвідношень

$$S = G_{zm} \Gamma; \quad (5)$$

$$\sigma_m = K_{zm} \varepsilon_m. \quad (6)$$

За інваріанти тензора напружень для умов плоскої деформації прийняті:

$\sigma_m = 0.5(\sigma_1 + \sigma_2)$ – середнє стискаюче напруження;

$S = 0.5(\sigma_1 - \sigma_2)$ – максимальне напруження зсуву.

Відповідні їм інваріанти тензора деформацій:

$\varepsilon_m = 0.5(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ – об'ємна деформація;

$\Gamma = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ – максимальна деформація зсуву.

Рівняння (5) описує закон формозміни дискретного середовища і, на відміну від аналогічного співвідношення нелінійної теорії пружності, враховує вплив внутрішнього (кулонового) тертя на опір зсуву дискретного середовища. Тому змінний модуль зсуву G_{zm} залежить не тільки від величини деформації Γ , але й від середнього напруження σ_m

$$G_{zm} = f(\Gamma, \sigma_m). \quad (7)$$

Рівняння (6) описує закон зміни об'єму дискретного матеріалу і, на відміну від нелінійної теорії пружності, враховує прояв дилатансії – залежність об'ємних деформацій від зсувів, тобто

$$K_{zm} = F(\sigma_m, \Gamma). \quad (8)$$

Принципові відмінності фізичних рівнянь механіки дискретного середовища від рівнянь нелінійної теорії пружності полягають в тому, що вони відображають вплив на деформування дискретного середовища двох взаємопов'язаних факторів: внутрішнього тертя та дилатансії.

Ці особливості фізичних рівнянь механіки дискретного середовища суттєво ускладнюють розв'язання граничної задачі, оскільки величини змінних деформативних параметрів G_{zm}, K_{zm} , які залежать від досягнутого рівня напружено-деформованого стану в кожній точці середовища, доводиться визначати не з кривих $S = f(\Gamma)$ та $\sigma_m = F(\varepsilon_m)$, як це робиться в теорії пластичності, а з уявної багатомірної поверхні деформування $\{\sigma\} = \Phi(\{\varepsilon\})$.

Метою описаних у статті досліджень є розробка алгоритму розв'язання плоскої нелінійної задачі механіки дискретного середовища, закони деформування якого враховують вплив внутрішнього тертя та дилатансії.

Для розробки алгоритму розв'язання навіть спрощеної плоскої задачі механіки дискретного середовища загальна поверхня деформування представляється двома поверхнями, що описують закони формозміни і зміни об'єму. Експериментальна поверхня формозміни дискретного матеріалу нагадує коноід і може бути апроксимована дробово-лінійною функцією. В цьому разі величина січного модуля зсуву визначається як

$$G_{zm} = \frac{S}{\Gamma} = \frac{n}{m + \Gamma} \sigma_m. \quad (9)$$

Вираз для модуля об'ємної деформації, одержаний за умови сталості коефіцієнта Пуассона, $\nu = const$, має вигляд

$$K_{zm} = 2G_{zm} \frac{1 + \nu}{1 - \nu} = 2 \frac{n}{m + \Gamma} \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \sigma_m. \quad (10)$$

У наведених співвідношеннях n, m, ν – експериментальні параметри.

Математичне формулювання плоскої фізично нелінійної задачі механіки дискретного середовища може бути представлено наступним чином.

Для плоскої області, на межі якої задані силові чи кінематичні крайові умови визначити напруження $\{\sigma\} = \{\sigma\}(x, y)$, деформації $\{\epsilon\} = \{\epsilon\}(x, y)$ та переміщення $\{u\} = \{u\}(x, y)$, що відповідають розрахунковій схемі та прийнятими специфічними законами деформування дискретного матеріалу області.

Задача зводиться до розв'язання системи матричних рівнянь:

- диференціальних рівнянь рівноваги (1);
- диференціальних геометричних рівнянь Коші (2);
- нелінійних фізичних рівнянь (3).

З урахуванням експериментально одержаних інваріантних нелінійних фізичних співвідношень (9), (10) для визначення змінних деформаційних параметрів G_{3M} , K_{3M} , та заданих крайових умов. При розробці алгоритму розв'язання задачі необхідно також обов'язково врахувати дію сил тяжіння, що унеможливило виникнення в дискретному середовищі розтягуючи напружень.

Сформульована гранична задача механіки дискретного середовища може бути класифікована як фізично нелінійна задача неоднорідної області, оскільки змінні параметри G_{3M} і K_{3M} залежать від досягнутого рівня напружень і деформацій, значення яких різне у кожній точці області і наперед є невідомим. Розв'язання таких складних задач можливе тільки чисельними методами з використанням спеціальних ітераційних процедур.

Існує багато ефективних чисельних методів, які могли б стати основою розробки ітераційних алгоритмів, необхідних для розв'язання поставленої задачі. Найбільш відомі з них: метод скінчених різниць (МСР), метод скінчених елементів (МСЕ), метод граничних елементів (МГЕ). Усі ці методи орієнтовані на розв'язання задач лінійної теорії пружності. У випадку нелінійних задач необхідно додатково розробити ітераційний алгоритм послідовного розв'язання лінійних задач з корекцією змінних параметрів на кожній ітерації. До таких алгоритмів відносять [3]: метод змінних жорсткостей, метод початкових напружень і метод початкових деформацій.

Проведений аналіз показав, що найбільш ефективною для розв'язання сформульованої фізично нелінійної задачі є ітераційна процедура змінних жорсткостей з використанням базового методу скінчених елементів.

За цією процедурою усі „нелінійності” рівнянь зводять в матрицю $[D]_{3M}$ змінних деформаційних параметрів (4), яка формує матрицю жорсткості елемента $[K_e]$.

$$[K_e] = \int [B]^T [D]_{3M} [B] dx dy. \quad (11)$$

Компоненти матриць, що входять в підінтегральну функцію, залежать від координат x, y точки розрахункової області. Це не дає можливості організувати ітераційний процес розв'язання нелінійної задачі плоскої розрахункової області, оскільки величини деформаційних параметрів G_{3M} , K_{3M} , що входять в матрицю $[D]_{3M}$, будуть різними у кожній точці області. Тому для розробки ефективного ітераційного алгоритму запропоновано при створенні дискретної скінчено-елементної моделі розрахункової області ввести спеціальні скінчені елементи, в межах кожного з яких напруження $\{\sigma\}$ і деформації $\{\epsilon\}$ не змінюються, а переміщення $\{u\}$ є лінійною функцією координат. Це відкриває можливість призначити на кожній ітерації нові значення змінних параметрів G_{3M} , K_{3M} не для точок суцільної розрахункової області, а для скінчених елементів. Якщо напруження $\{\sigma\}$ і деформації $\{\epsilon\}$ є сталими в межах елемента інтегральний вираз (11) матриці жорсткості скінченого елемента набуває вигляду

$$[K_e] = [B]^T [D_e]_{3M} [B] A, \quad (12)$$

де A – площа скінченого елемента;
 $[B]$ – наведена вище матриця диференціального оператора.

Напруження і деформації не будуть змінюватись в межах одного і того ж скінченого елемента, якщо за базовий прийняти симплекс-елемент трикутної форми, всередині якого переміщення $\{u\}$ кожної точки визначаються через переміщення вузлів $\{\delta_e\}$ елемента лінійним співвідношенням

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = [N] \{\delta_e\},$$

де функція форми N є лінійною функцією координат точки x, y

$$N = \frac{a + bx + cy}{2A}.$$

Розроблений для розв'язання плоскої нелінійної задачі механіки дискретного середовища ітераційний алгоритм передбачає поетапне розв'язання лінійної задачі з корекцією значень деформаційних параметрів G_{3M} , K_{3M} кожного скінченого елемента для наступного етапу ітерації за результатами досягнутого рівня напружень і деформацій в елементах на попередньому етапі.

На першому етапі ітераційного алгоритму розв'язується лінійна задача однорідної області. Для усіх

скінчених елементів задають однакові початкові значення модуля зсуву G_1 та модуля об'ємної деформації K_1 . Формують матриці жорсткості $[K_e]_1$ кожного елемента, а за правилом „збирання” [3] і глобальну матрицю жорсткості $[K]_1$ системи.

Розв'язують систему канонічних рівнянь методу переміщень $[K]_1\{\delta\}_1 = -\{R\}$ з урахуванням крайових умов, в результаті чого визначають вектор вузлових переміщень $\{\delta\}_1$

$$\{\delta\}_1 = -[K]_1^{-1}\{R\},$$

де $\{R\}$ – вектор вузлових сил.

За визначеними вузловими переміщеннями $\{\delta\}_1$ знаходять досягнуті на першій ітерації деформації $\{\epsilon\}_1$ і напруження $\{\sigma\}_1$, що описують напружено-деформований стан системи скінчених елементів після першої ітерації,

$$\begin{aligned} \{\epsilon\}_1 &= [B]\{\delta\}_1; \\ \{\sigma\}_1 &= [D]_1[B]\{\delta\}_1. \end{aligned}$$

За знайденими напруженнями $\{\sigma\}_1$ та деформаціями $\{\epsilon\}_1$ обчислюють інваріанти $\sigma_m^{(1)}$, $S^{(1)}$, $\Gamma^{(1)}$ та зі співвідношень (9), (10) визначають величини змінних модулів G^* і K^* для кожного скінченого елемента після першої ітерації. Результати розрахунку лінійної задачі на першому етапі задовольняють умовам рівноваги і суцільності, але не задовольняють фізичним нелінійним рівнянням, що описують поверхню деформування дискретного матеріалу. На рис. 1 показана поверхня деформування в просторі інваріантів S, Γ, σ_m .

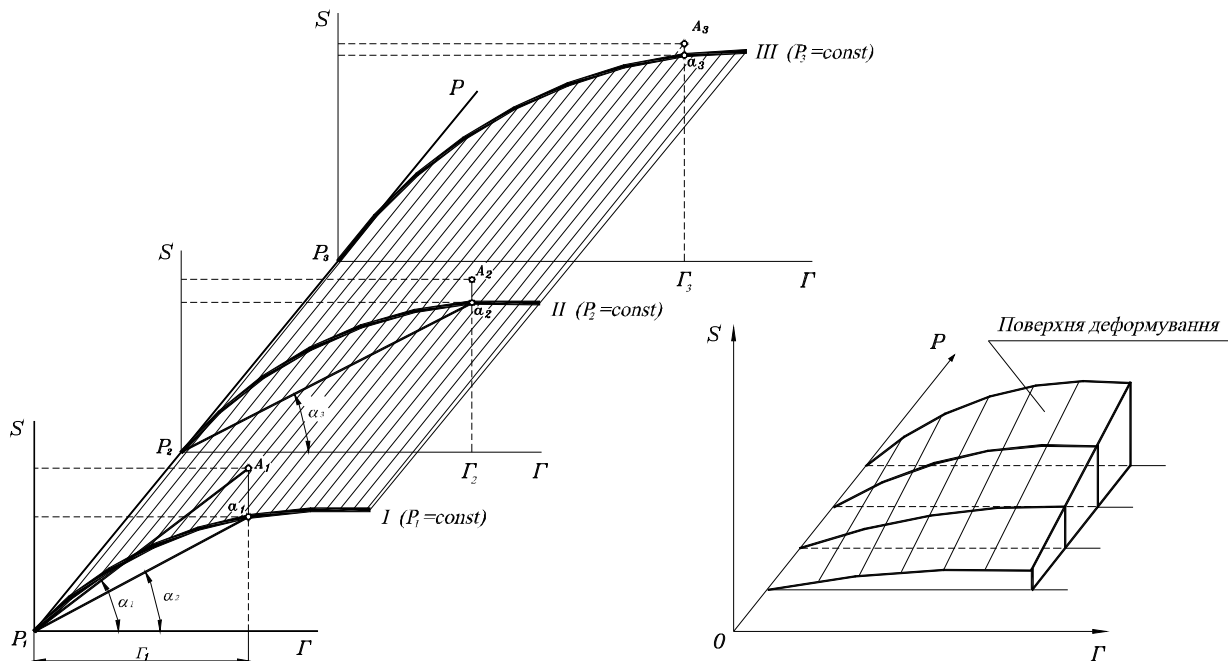


Рис. 1. Графічне представлення ітераційного процесу

Точка A_1 , що відповідає одержаному на першому етапі напружено-деформованому стану, в загальному випадку не лежить на поверхні деформування. Досягнутій деформації після першої ітерації на поверхні відповідає точка a_1 . Відрізок A_1a_1 відображає різницю між лінійним і нелінійним розв'язком (нев'язку).

Для зменшення невязки проводять наступні ітерації.

На другій ітерації призначають нові значення модулів деформації

$$G_2 = G^* = \frac{n}{m + \Gamma_1} \sigma_m^{(1)}, \quad K_2 = K^* = 2G_2 \frac{1 + \nu}{1 - \nu},$$

свої для кожного елемента, і розв'язують лінійну задачу вже для неоднорідної області, оскільки деформаційні параметри G_2 і K_2 будуть різними для кожного скінченого елемента. Далі формують матриці жорсткості $[K_e]_2$ елементів, глобальну матрицю жорсткості $[K]_2$ системи, знаходять вузлові

переміщення $\{\delta\}_2$, деформації $\{\epsilon\}_2$ і напруження $\{\sigma\}_2$ в усіх елементах. Підраховують $S_2, \sigma_m^2, \Gamma_2$ одержаних на другому етапі тензорів напружень і деформацій, визначають нев'язку $A_2 a_2$. Якщо нев'язка більша наперед заданої малої величини, продовжують ітераційний процес з модулями деформації $G_3 = \frac{S_2}{\Gamma_2}$,

$K_3 = 2G_3 \frac{1+\nu}{1-\nu}$ і т.д. поки нев'язка не стане меншою допустимого значення.

Рекурентні залежності, що описують запропонований алгоритм для k -го етапу, можна записати таким чином:

$$\left. \begin{aligned} G_{3M}^{(k)} &= \frac{S^{(k-1)}}{\Gamma^{(k-1)}}; \\ K_{3M}^{(k)} &= 2G_{3M}^{(k)} \frac{1+\nu}{1-2\nu}; \end{aligned} \right\} \text{ – корегування деформаційних параметрів;}$$

$$[D^{(k)}]_{3M} = [D] \left(G_{3M}^{(k)}, K_{3M}^{(k)} \right) \text{ – формулювання нової матриці деформаційних параметрів;}$$

$$[k_e^{(k)}] = [B]^T [D^{(k)}]_{3M} [B] A \rightarrow [K^{(k)}] \text{ – формування матриці жорсткості кожного скінченного елемента;}$$

$$[K^{(k)}] \{\delta^{(k)}\} = \{R\} \text{ – формування системи рівнянь методу переміщень;}$$

$$\{\delta^{(k)}\} = [K^{(k)}]^{-1} \{R\} \text{ – визначення вузлових переміщень лінійних алгебраїчних рівнянь (розв'язання системи лінійних рівнянь методу переміщень);}$$

$$\{\epsilon^{(k)}\} = [B^{(k)}] \{\delta^{(k)}\} \rightarrow \Gamma^{(k)} \text{ – обчислення деформацій;}$$

$$\{\sigma^{(k)}\} = [D^{(k)}] [B^{(k)}] \{\delta^{(k)}\} \rightarrow S^{(k)}, P^{(k)} \text{ – обчислення напружень;}$$

$$S_T^{(k)} = \frac{n\Gamma^{(k)}}{m + \Gamma^{(k)}} P^{(k)} \text{ – визначення величини інваріанту, що відповідає поверхні деформування;}$$

$$\xi = \left| \frac{S^{(k)} - S_T^{(k)}}{S_T^{(k)}} \right| \leftrightarrow [\xi] \text{ – перевірка розходження.}$$

Відмінність описаного алгоритму від відомих алгоритмів теорії пластичності полягає в тому, що „зближення” відбувається не в одній площині напружень-деформацій $(S - \Gamma)$, а в тривимірному просторі (S, Γ, σ_m) . Положення кожної кривої $(S^{(k)} - \Gamma^{(k)})$ визначається досягнутим рівнем стискуючого напруження $\sigma_m^{(k)}$.

Описаний алгоритм розв'язання нелінійної задачі механіки дискретного середовища реалізований на основі розробленого на кафедрі опору матеріалів ХНУ [4, 5] спеціалізованого програмного комплексу GEO. Комплекс передбачає можливість заміни „нелінійного” програмного блоку залежно від прийнятого в моделі закону деформування. Для використання нелінійних фізичних співвідношень механіки дискретного середовища розроблено спеціальний „нелінійний блок” Non-Linear [6]. На рис. 2 представлена функціональна блок-схема програмного комплексу з „нелінійним блоком”.

Програмний комплекс передбачає виконання наступних етапів розрахунку.

1. Введення вихідних даних: характеристики матеріалу (модуль зсуву, коефіцієнт Пуассона – визначають експериментально), умови закріплення, відомі переміщення та навантаження у граничних точках.

2. Побудова дискретної моделі розрахункової області: автоматична розбивка на елементи, формування векторів вузлових сил та відомих вузлових переміщень.

3. Формування матриць жорсткості елементів.

4. Формування матриці жорсткості системи.

5. Формування та розв'язання системи лінійних рівнянь методу переміщень і визначення вузлових переміщень.

6. Обчислення деформацій та напружень.

7. Розв'язання нелінійної задачі з урахуванням прийнятих нелінійних залежностей конкретного матеріалу.

8. Перевірка розходження.

9. Формування результатів розрахунку.



Рис. 2. Функціональна блок-схема програмного комплексу

Етапи 1 – 6 є стандартними етапами розв'язання лінійної задачі МСЕ. Етапи 7, 8 реалізують нелінійний блок ітераційної процедури розв'язання крайової задачі механіки дискретного середовища.

При розробці алгоритмів розв'язання нового класу задач завжди постає проблема обґрунтування стійкості та збіжності ітераційного процесу.

Стійкість описаної ітераційної процедури забезпечується тим, що в ній використовується не дотичний а січний модуль деформації G_{3M} , величина якого при наближенні до граничного стану не наближається до нуля.

Строгий математичний доказ збіжності запропонованого ітераційного процесу не вдалося одержати,

хоча у розглянутих конкретних задачах збіжність досягалась достатньо швидко.

Висновки

Описаний у статті ітераційний алгоритм розв'язання плоскої граничної задачі механіки дискретного середовища дозволяє врахувати вплив на процес його деформування двох специфічних факторів: внутрішнього тертя і дилатансії. Він може бути використаний також для розв'язання задач механіки твердого деформівного тіла з суттєвим проявом внутрішнього тертя, задач термопружності та ін.

Література

1. Багрій О. В. Плоска задача механіки дискретного середовища / О. В. Багрій, В. В. Ковтун // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2012. – № 5. – С. 17–21.
2. Ковтун В. В. Визначальні співвідношення механіки дискретного середовища / В. В. Ковтун // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2008. – № 5. – С. 69–76.
3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / Зенкевич О. – М. : Мир, 1975. – 541 с.
4. Ковтун В. В. Программный комплекс для решения задач нелинейной механики грунтов с помощью ЭВМ / В. В. Ковтун // Современные проблемы нелинейной механики грунтов. – Челябинск, 1985. – С. 136–137.
5. Ковтун В. В. Расчет упругих конструкций методом конечных элементов с применением ЭВМ / В. В. Ковтун, А. А. Корнилов. – 1984. – Хмельницкий, ХТИБО. – 39 с.
6. Багрій О. В. Деформування середовища з урахуванням внутрішнього кулонового тертя в умовах плоскої деформації : дис. ... кандидата техн. наук : 01.02.04 / Багрій Олена Вікторівна. – Тернопіль: ТДТУ, 2009. – 167 с.

References

1. Bagriy O. V. Ploska zadacha mehaniki diskretnogo seredovischa / O. V. Bagriy, V. V. Kovtun // Visnik Hmel'nic'kogo nacional'nogo universitetu. Tehnichni nauki. – 2012. – N 5. – S. 17–21.
2. Kovtun V. V. Viznachal'ni spivvidnoshennya mehaniki diskretnogo seredovischa / V. V. Kovtun // Visnik Hmel'nic'kogo nacional'nogo universitetu. Tehnichni nauki. – 2008. – N 5. – S. 69–76.
3. Zenkevich O. Metod konechnyh elementov v tehnikе / Zenkevich O. – M. : Mir, 1975. – 541 s.
4. Kovtun V. V. Programmnyy kompleks dlya resheniya zadach nelineynoy mehaniki gruntov s pomosh'yu EVM / V. V. Kovtun // Sovremennye problemy nelineynoy mehaniki gruntov. – Chelyabinsk, 1985. – S. 136–137.
5. Kovtun V. V. Raschet uprugih konstrukciy metodom konechnyh elementov s primeneniem EVM / V. V. Kovtun, A. A. Kornilov. – 1984. – Hmel'nickiy, HTIBO. – 39 s.
6. Bagriy O. V. Deformuvannya seredovischa z urahuvannyam vnutrishn'ogo kulonovogo tertya v umovah ploskoi deformacii : dis. ... kandidata tehn. nauk : 01.02.04 / Bagriy Olena Viktorivna. – Ternopil': TDTU, 2009. – 167 s.

Рецензія/Peer review : 16.7.2013 р.

Надрукована/Printed : 22.9.2013 р.
Статтю представляє: д.т.н., Ковтун В.В.