УДК 621.891

Р.В. СОРОКАТИЙ
Технологічний університет Поділля, м. Хмельницький

ОЦІНКА ТОЧНОСТІ ЧИСЕЛЬНИХ ПРОЦЕДУР ТА ОПТИМІЗАЦІЯ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО АЛГОРИТМУ МЕТОДУ ТРИБОЕЛЕМЕНТІВ

Дано оцінку точності основних чисельних процедур методу трибоелементів. Розглянуто похибку розв'язку рівняння при визначенні кута контакту з визначенням кількості ітерацій для досягнення заданої точності. Методом Рунге отримано оцінку точності чисельного інтегрування рівняння рівноваги та наведено алгоритм визначення оптимального кроку для досягнення заданої точності. Дано оцінку точності сплайн-апроксимації математичного сподівання величини зносу, отримано вираз для кроку інтерполяції, що забезпечує задану точність. На основі кроку інтерполяції визначено оптимальний розмір трибоелементів у вигляді яких представляють трибоспряження.

Вступ. Метод моделювання поведінки функціонуючих трибосистем, метод трибоелементів (МТЕ) [1] включає ряд чисельних процедур, точність реалізації яких впливає на точність отримуваних результатів та ефективність обчислювального алгоритму. Завищена точність, враховуючи ітераційність процесу, значно збільшує час розрахунків, а занижена – впливає на кінцевий результат обчислень.

МТЕ включає визначення кута контакту, шляхом розв'язку рівняння методом діхотомії, чисельне інтегрування рівняння рівноваги методом Сімпсона та сплайн-апроксимації математичного сподівання величини зносу, що визначається з розгляду процесу зношування як випадкового процесу марківського типу.

Метою даної роботи є оцінка точності чисельних процедур методу трибоелементів та оптимізація обчислювального алгоритму програм.

1. Оцінка точності розв'язку рівняння при визначенні кута контакту

Для визначення кута контакту в методі трибоелементів використовується розв'язок нелінійного рівняння виду $F(x)=0$ методом діхотомії.

Оцінка похибки розв'язку при цьому на n - му кроці обчислень має вигляд [2]:

$$0 \le \xi - a_n \le \frac{1}{2^n}(b-a) = b_n - a_n , \qquad (1)$$

де ξ – корінь рівняння; a, b – межі відрізка на якому відшукують корінь рівняння; a_n, b_n – межі відрізка n-го кроку на якому знаходиться корінь.

При цьому приймається $\xi \approx a_n$ з точністю ε, яка не перевищує $b_n - a_n$.

При обрахуванні з заданою точністю ε можна записати:

$$\frac{1}{2^n}(b-a) \le \varepsilon . \qquad (2)$$

Звідки, кількість ітерацій n, для отримання заданої точності ε :

$$n \ge \frac{\ln\left(\frac{(b-a)}{\varepsilon}\right)}{\ln 2} . \qquad (3)$$

2. Оцінка точності чисельного інтегрування рівняння рівноваги

Метод трибоелементів передбачає чисельне інтегрування рівняння рівноваги з використанням узагальненої формули Сімпсона, залишковий член якої в загальному випадку має вигляд [3]:

$$|R(f)| = \left(\frac{d-c}{2}\right)^5 \frac{f^{(IV)}(\eta)}{90m^4} , \qquad (4)$$

де $[c,d]$ – відрізок інтегрування; $2m$ – кількість відрізків, на які розбито відрізок інтегрування $[c,d]$.

Оцінка залишкового члена для узагальненої формули Сімпсона [3]:

$$|R(f)| \le \frac{H^4}{180}(d-c)\cdot M, \tag{5}$$

де $H = \dfrac{d-c}{2m}$; $M = \max\limits_{c \le x \le d}\left|f^{(IV)}(x)\right|$.

Використання залежностей (4), (5), які базуються на значеннях четвертої похідної, безпосередньо для оцінки величини головного члена похибки при інтегруванні, у випадку методу трибоелементів досить складно. В таких випадках застосовують метод оцінки похибки, який не використовує фактичного виразу головного члена похибки, а ґрунтується лише на факті існування такого члена [4], метод Рунге.

Метод Рунге базується на виділенні головного члена похибки за результатами розрахунків з двома різними кроками інтегрування.

Похибка обчислення інтеграла визначиться як різниця між наближеними значеннями при інтегруванні з різними кроками H_1 та $H_2 = H_1/\lambda$ [4].

$$|I - I(H_2)| \approx \frac{1}{\lambda^4 - 1}|I(H_1) - I(H_2)|, \tag{6}$$

де I – точне значення інтеграла; $I(H_1)$, $I(H_2)$ – наближені значення інтеграла з кроками $H_1 = \dfrac{d-c}{2m_1}$ та $H_2 = \dfrac{d-c}{2m_2}$.

Для обрахування інтеграла з заданою точністю ε і кроком що зменшується, тобто $\lambda > 1$, можна записати:

$$\frac{1}{\lambda^4 - 1}|I(H_1) - I(H_2)| \le \varepsilon, \tag{7}$$

При цьому приймається, що $I \approx I(H_2)$ з точністю ε.

Якщо врахувати, що $\lambda = H_1 / H_2 = m_2 / m_1$, то вираз (7) можна записати у вигляді:

$$m_2 \ge m_1 \cdot \sqrt[4]{\frac{|I(H_1) - I(H_2)|}{\varepsilon} + 1} \tag{8}$$

3. Оцінка точності сплайн-апроксимації математичного сподівання величини зносу

Для апроксимації математичного сподівання величини зносу в методі трибоелементів використовується кубічний сплайн:

$$S(x) = m_{n-1}\frac{(x_n - x)^3}{6h} + m_n\frac{(x - x_{n-1})^3}{6h} + \left(f(x_{n-1}) - \frac{m_{n-1}h^2}{6}\right)\frac{x_n - x}{h} + \left(f(x_n) - \frac{m_n h^2}{6}\right)\frac{x - x_n}{h} \tag{9}$$

де x_n, x_{n-1} – значення агрументу функції, відповідно у точках $n, n-1$; $f(x_n), f(x_{n-1})$ – значення функції величини зносу в точках $n, n-1$; $m_n = f''(x_n)$; $m_{n-1} = f''(x_{n-1})$ – значення других похідних функції величини зносу; $h = x_n - x_{n-1}$ - величина (крок) інтервалу $[x_{n-1}; x_n]$, приймається [1] однаковою для всіх відрізків.

Похибка сплай апроксимації на відрізку $[x_{n-1}; x_n]$ визначається як абсолютна величина різниці між значенням сплайну та функції величини зносу:

$$|S(x) - f(x)| = R(x). \tag{10}$$

Задача полягає в визначені оцінки $R(x)$.

Спростимо вираз (9) шляхом заміни:

$$t = \frac{x - x_{n-1}}{h}, \quad 1 - t = \frac{x_n - x}{h}. \tag{11}$$

Тоді (9) прийме вигляд:

$$S(x) = m_{n-1}\frac{h^3(1-t)^3}{6h} + m_n\frac{t^3h^3}{6h} + \left(f(x_{n-1})(1-t)\right) - \frac{m_{n-1}h^2}{6}(1-t) + f(x_n)\cdot t - \frac{m_n h^2}{6}t. \tag{12}$$

Виконавши перетворення отримаємо:

$$S(x)=\frac{m_{n-1}h^2}{6}\left(3t^2-t^3-2t\right)+\frac{m_{n-1}h^2}{6}\left(t^3-t\right)+\left(f(x_{n-1})(1-t)\right)+f(x_n)\cdot t. \tag{13}$$

Функцію величини зносу $f(x)$, що входить до виразу (10) розкладемо в ряд Тейлора з залишковим членом в формі Лагранжа [5], припустивши, що $f(x)$ має похідні до третього порядку включно:

$$f(x)=f(x_{n-1})+\frac{f'(x_{n-1})}{1!}\left(x-x_{n-1}\right)+\frac{f''(x_{n-1})}{2!}\left(x-x_{n-1}\right)^2+\frac{f'''(\xi)}{3!}\left(x-x_{n-1}\right)^3. \tag{14}$$

З врахуванням заміни (11) вираз (14) прийме вигляд:

$$f(x)=f(x_{n-1})+f'(x_{n-1})\cdot t\cdot h+f''(x_{n-1})\frac{t^2h^2}{2}+f'''(\xi)\frac{t^3h^3}{6}. \tag{15}$$

Похідні у (14) виразимо через скінчені різниці першого (16), другого (17) та третього (18) порядків [6]:

$$f'(x_{n-1})\approx\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{h};\quad f'(x_n)\approx\frac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{h}; \tag{16}$$

$$f''(x_{n-1})\approx\frac{\Delta^2 f(x_{n-1})}{h^2};\quad f''(x_n)\approx\frac{\Delta^2 f(x_n)}{h^2}; \tag{17}$$

$$f'''(\xi)\approx\frac{\Delta^3 f(\xi)}{h^3}. \tag{18}$$

З врахуванням (16) вираз (17) прийме вигляд:

$$f''(x_{n-1})\approx\frac{f(x_{n+1})-2\cdot f(x_n)+f(x_{n-1})}{h^2}. \tag{19}$$

Вираз (18) через значення других похідних m_n, m_{n-1} можна записати:

$$f'''(\xi)=\frac{m_n-m_{n-1}}{h}. \tag{20}$$

З врахуванням виразів (16) - (20) залежність (15) прийме вигляд:

$$f(x)=f(x_{n-1})(1-t)+f(x_n)\cdot t+\frac{m_n t^3h^2}{6}+\frac{m_{n-1}h^2}{6}(3t^2-t^3). \tag{21}$$

Підставивши (13) та (21) у вираз (10) отримаємо:

$$R(x)=\left|S(x)-f(x)\right|=\left|\frac{m_{n-1}h^2}{6}(-2t)+\frac{m_nh^2}{6}(-t)\right|. \tag{22}$$

Перепишемо (22) наступним чином:

$$R(x)=\frac{h^2}{6}\left|-\left[\left(2\cdot t\cdot m_{n-1}\right)+m_n\cdot t\right]\right|. \tag{23}$$

Аналіз (23) показує, що $R(x)$ приймає максимальне значення при $t=1$, так як $0\le t\le 1$ та однакових знаках других похідних m_n, m_{n-1}.

Тому оцінка похибки інтерполяції:

$$R(x)\le\frac{h^2}{6}\left|-\left[2m_{n-1}+m_n\right]\right|. \tag{24}$$

Оцінка похибки інтерполяції дає можливість визначити величину максимального кроку для забезпечення заданої точності інтерполяції [6].

Для інтерполяції з заданою точністю ε можна записати:

$$\frac{h^2}{6}\left|-\left[2m_{n-1}+m_n\right]\right|\le\varepsilon. \tag{25}$$

Звідки крок інтерполяції h, що забезпечує задану точність ε:

$$h\le\sqrt{\frac{6\varepsilon}{\left|-\left(2m_{n-1}+m_n\right)\right|}}. \tag{26}$$

4. Оптимізація обчислювального алгоритму МТЕ

Оцінки точності чисельних процедур, отриманих вище дозволяють оптимізувати обчислювальні алгоритми програм методу трибоелементів. А саме, скоротити об'єм обчислювальної роботи для отримання результатів з наперед заданою точністю.

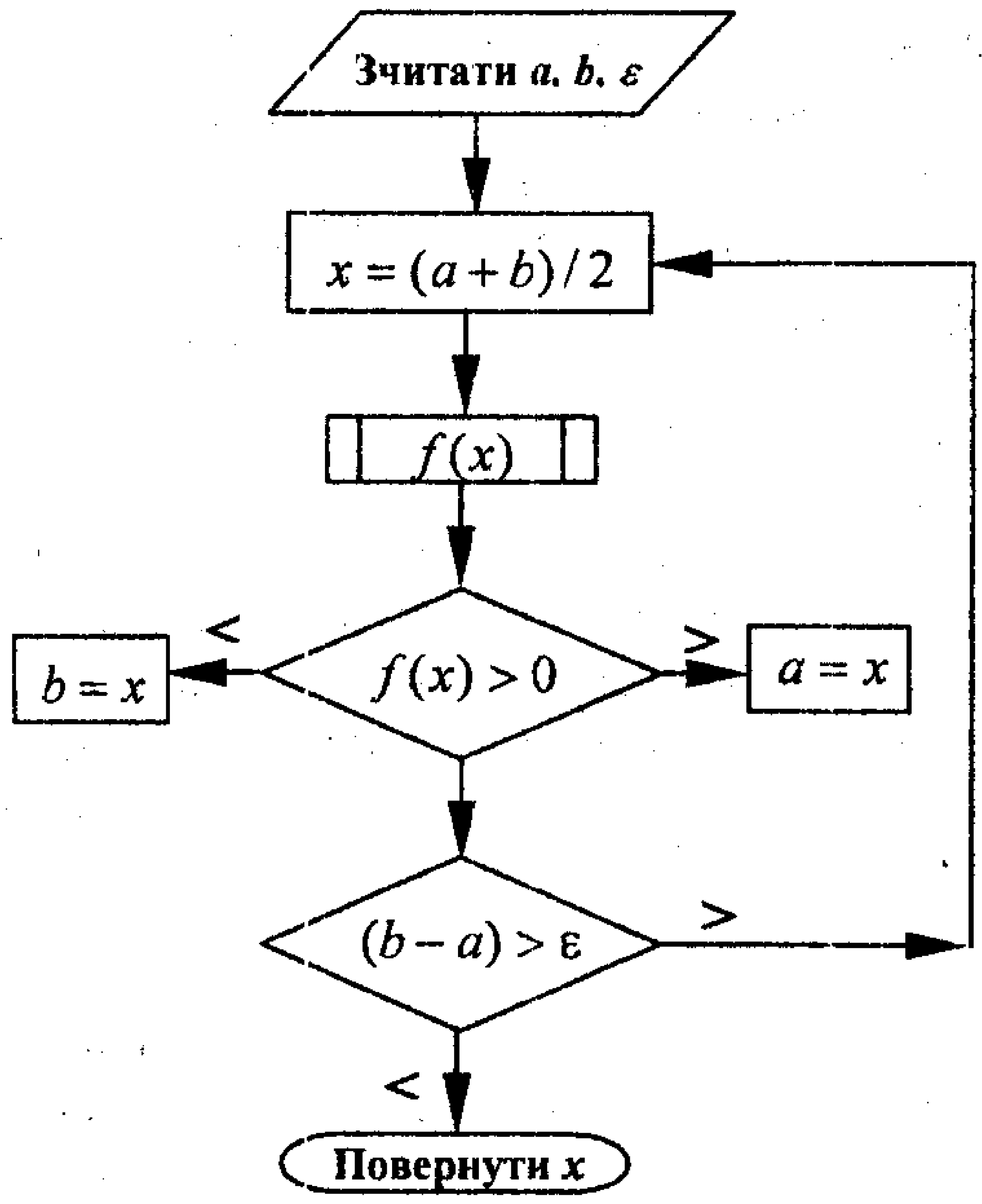

Рис. 1. Блок-схема розв'язку рівняння для визначення кута контакту

Спрощений алгоритм розв'язку рівняння з заданою точністю ε для визначення кута контакту наведено на рис. 1. Наближена кількість ітерацій для отримання розв'язку визначається залежностю (3).

Обчислювальний алгоритм чисельного інтегрування рівняння рівноваги передбачає перерахунок з різними кроками для оцінки точності інтегрування і визначення оптимального кроку або кількості відрізків інтегрування для забезпечення необхідної точності. Крок інтегрування зменшується поступово на величину λ до виконання нерівності (7). Процедура визначення оптимального кроку інтегрування виділена окремою функцією, яка виконується перед початком виконання загального блоку обчислень, а в період виконання блоку, при значних відхиленнях області інтегрування від початкової, тобто значній зміні кута контакту, проводиться уточнення кроку інтегрування, для забезпечення заданої точності при мінімальному об'ємі обчислювальної роботи. Спрощену блок-схему алгоритму вибору оптимального кроку чисельного інтегрування з заданою точністю наведено на рис. 2.

Згідно методу трибоелементів [1] елементи спряження представляються у вигляді деякої кількості трибоелементів (ТЕ). Кожен трибоелемент описується випадковим процесом марківського типу, а всі трибоелементи в сукупності моделюють процес зношування трибоспряження.

Питання вибору кількості трибоелементів, на яку необхідно поділити трибоспряження відіграє особливу роль для побудови загального обчислювального алгоритму МТЕ. Адже, із збільшенням кількості ТЕ збільшується точність визначення величини зносу спряження, з іншого боку це призводить до збільшення обчислювальної роботи.

Значення математичного сподівання величини зносу кожного ТЕ приймаються як значення функції величини зносу в місці розташування ТЕ і використовуються для кубічної сплайн-апроксимації. Результати апроксимації використовуються для визначення кута контакту та розподілу контактного тиску, що в свою чергу - для визначення параметрів процесу зношування.

Виходячи з цього можна вважати, що крок інтерполяції, який забезпечує задану точність (26), визначає оптимальний розмір ТЕ, на які поділяється трибоспряження.

Це дає змогу оптимізувати обчислювальний алгоритм МТЕ і процес поділу спряження на трибоелементи.

Виходячи з вищевказаного, в обчислювальний алгоритм програм МТЕ включено блок визначення оптимального розміру ТЕ, який би забезпечував задану точність інтерполяції. Алгоритм блоку полягає в проведені попереднього обчислення за виразом (26) максимального кроку h, що забезпечує необхідну точність інтерполяції. Крок інтерполяції h відповідає кутовому розміру ТЕ, який і приймається за оптимальний. Враховуючи новий розмір ТЕ, знову проводиться поділ трибоспряження на ТЕ і після цього проводяться обчислення загального блоку методу трибоелементів.

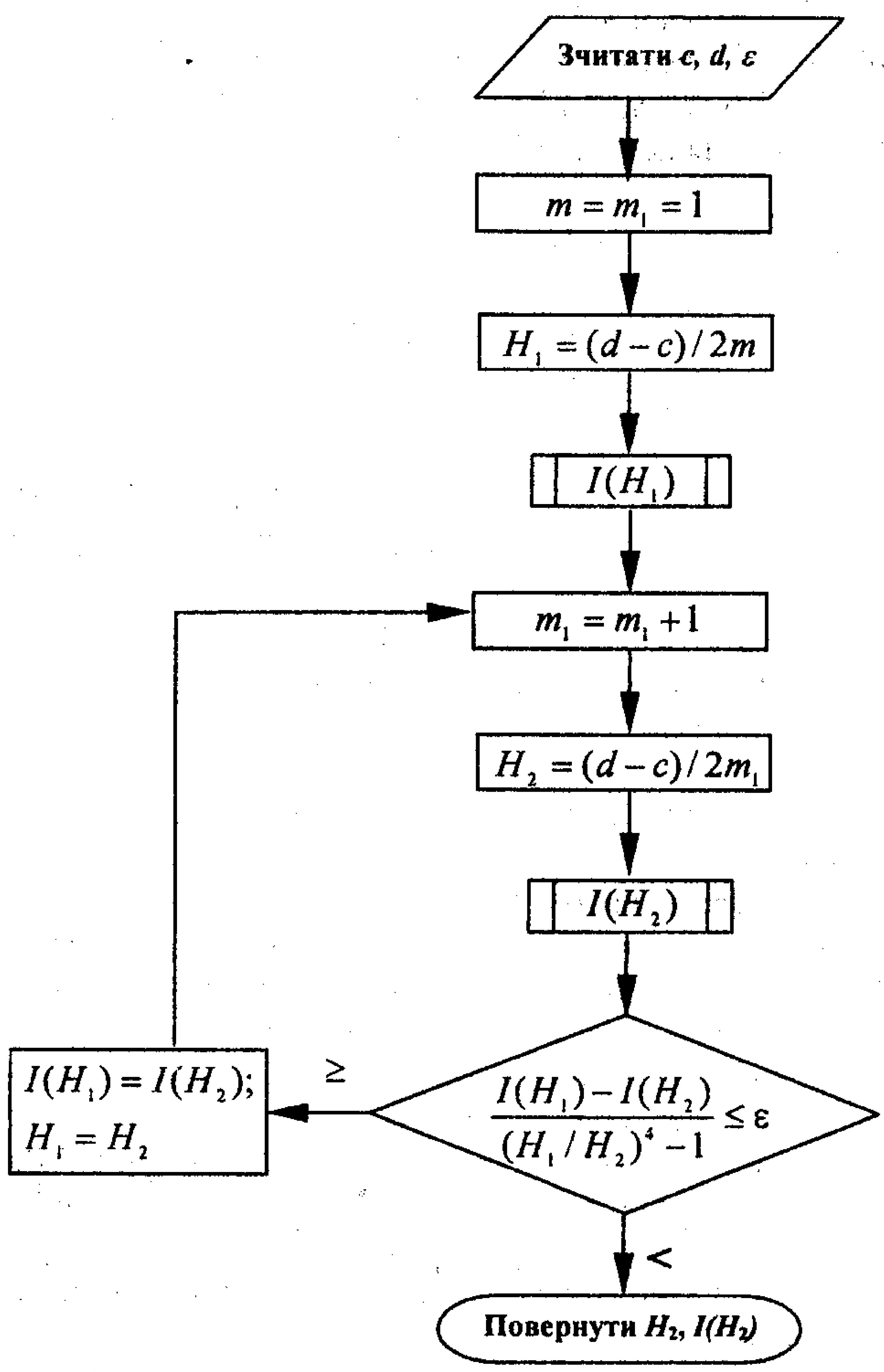

Рис. 2. Блок схема визначення кроку інтегрування

Включення даного оптимізаційного блоку в загальний обчислювальний алгоритм програм МТЕ суттєво не впливає на об'єм обчислювальної роботи, якщо врахувати, що крок і відповідно оптимальний розмір ТЕ в залежності (26) обчислюються через другі похідні m_{n-1}, m_n, що визначаються при побудові кубічного сплайну.

Для даних наведених в роботі [1], при розв'язку задачі про зношування радіального підшипника кочення з антифрикційним елементом, який розміщений у втулці, вище розглянутою методикою було проаналізовано точність сплайн-інтерполяції математичного сподівання величини зносу, і отримано, що крок інтерполяції, що відповідає кутовому розміру ТЕ $h = \Delta\varphi_{TE} = 1^\circ$ дає похибку яка не перевищує $2{,}3 \cdot 10^{-8}$ м, при абсолютній величині зносу $2{,}5 \cdot 10^{-5}$ м, що цілком достатньо для розв'язку данної задачі.

Висновки. Дано оцінку точності основних чисельних процедур методу трибоелементів. Аналізується точність розв'язку рівняння методом діхотомії при визначені кута контакту з визначенням кількості ітерацій для досягнення заданої точності. Методом Рунге отримано оцінку точності чисельного інтегрування рівняння рівноваги та наведено алгоритм визначення опимального кроку для досягнення заданої точності. Дано оцінку точності сплайн-апроксимації математичного сподівання величини зносу, отримано вираз для кроку інтерполяції, що забезпечує задану точність. На основі кроку інтерполяції дано рекомендації по вибору оптимального розміру трибоелементів на які поділяють трибоспряження.

Література

1. Сорокатый Р.В. Моделирование поведения трибосистем методом трибоэлементов // Трение и износ.– 2002.– Т. 23, №1.– С. 16-22.

2. Ракитин В.И., Первушин В.Е. Практическое руководство по методам вычислений с приложениями программ для персональных компьютеров: Учеб. пособие.– М.: Высш.шк., 1998.– 383 с.

3. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений.– М.: Наука, 1966.– 632 с.

4. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы: Учеб. пособ.– М.: Наука Гл.ред.физ.-мат. лит., 1987.– 600 с.

5. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике.– М.: Наука, 1972.– 872 с.

6. Завялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций.– Л.-М.: Наука Гл.ред.физ.-мат. лит., 1980.– 352 с.

Надійшла 19.5.2003 р.