

¹С.Ю. Бабич, ²Н.О. Ярецька, ³В.Ф. Лазар

Передача вісесиметричного навантаження від двох попередньо напружених півпросторів до пружного циліндра з початковими напруженнями

¹ доктор технічних наук, професор, провідний науковий співробітник відділу динаміки і стійкості суцільних середовищ,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенко НАНУ;
e-mail: desc@inmech.kiev.ua

² кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань,
Хмельницький національний університет,
orcid.org/0000-0002-3726-2878

e-mail: massacran2@ukr.net, yaretskano@khmnu.edu.ua

³ кандидат технічних наук,
доцент кафедри інженерії, технологій та професійної освіти,
Мукачівський державний університет,
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2457-571X>
e-mail: vflazar@gmail.com

Дослідження питань контактної взаємодії твердих тіл представлено досить актуальною проблемою. Це підтверджено тим, що контактна взаємодія є одним із найбільш поширених на практиці способів передачі зовнішніх навантажень. Актуальність даної проблеми не викликає сумнівів ні з погляду розвитку фундаментальних розробок у механіці твердого деформованого тіла, ні з погляду прикладних галузей сучасної техніки. Особливо широке застосування теорія контактних задач знаходить у машинобудуванні та будівництві. Це пояснюється тим, що передача зусиль у вузлах і механізмах машин супроводжується контактом деталей в конструкціях між собою. Також, подібні задачі можуть виникати при розрахунках важливих характеристик для пружних фундаментів із підошвами колон будівель, димових труб, градирень, водонапірних веж та інших висотних споруд на вітрове навантаження або навантаження від власної ваги.

Контактна механіка дозволяє знайти розподіл напружень у місцях дотику тіл, вивчити їх концентрацію та розробити шляхи їх зниження.

Коло задач про контакт пружних, в'язко пружних і пластичних тіл без початкових напружень є досить широким [1]. Але сучасні запити інженерної практики поставили перед дослідниками ряд нових задач. Вони потребують використання більш складних моделей суцільних середовищ. Це задачі з ускладненими фізичними та механічними властивостями. Моделі контактної взаємодії мають враховувати такі фактори: тепловиділення, вплив тертя, жорсткість, поверхневі властивості матеріалу та зносостійкість поверхні.

Відомо, що практично в усіх елементах конструкцій присутні початкові напруження. Останні викликані різного роду причинами, такими як: технологічні операції, виробничі процеси (при виготовленні матеріалів) або складанням конструкцій. У земній корі початкові напруження виникають внаслідок дії геостатичних та геодинамічних сил. При створенні композитних матеріалів вони виникають в результаті технологічних процесів. Початкові напруження присутні й у кровоносних судинах живих організмів також. Початкові напруження необхідно враховувати при розв'язуванні задач про деформацію ґрунтів (особливо мерзлих). У пружно-пластичних тілах, також, можуть існувати внутрішні залишкові напруження після зняття навантаження. Деколи доречно навмисно створювати

початкові напруження (залишкові та технологічні) для компенсації тих, які виникають у елементах конструкцій. Це підвищує їх характеристики міцності. Тому, одним важливим завданням контактної механіки є врахування початкових напружень. Деякі результати досліджень у цьому напрямі представлені у працях [2-4].

Метою роботи є дослідження передачі вісесиметричного навантаження від попередньо напружених півпросторів до пружного циліндра з початковими напруженнями та представлення розв'язку відповідної статичної контактної задачі без врахування сил тертя та у межах лінеаризованої теорії пружності. Дослідження виконано у випадку рівних та нерівних коренів визначального рівняння [2] в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу.

Припустимо, що два пружні тверді ідентичні півпростори контактено взаємодіють із пружним штампом. Будемо вважати, що поверхні поза межею контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил, а на межі контакту переміщення та напруження – неперервні.

Для дослідження застосовуємо координати деформованого стану Oy_i ($i = \overline{1, 3}$), які пов'язані з лагранжевими координатами x_i ($i = \overline{1, 3}$) співвідношеннями: $y_i = \lambda_i x_i$, ($i = \overline{1, 3}$), де λ_i , ($i = \overline{1, 3}$) – коефіцієнти видовження, що визначають переміщення початкового стану, $\lambda_i = \text{const}$. Вісь y_3 спрямована по нормалі до межі контакту.

Будемо вважати, що початковий деформований стан є однорідним, а межа контакту пружних тіл розміщується у площині $y_3 = \text{const}$. При цьому, робимо припущення, що початкові напруження діють вздовж межі контакту.

Розглянемо постановку задачі. Нехай скінченний пружний циліндричний штамп висотою H з початковими напруженнями, геометрична вісь симетрії якого співпадає з віссю y_3 циліндричної системи координат (r, θ, y_3) стискається (розтягується) двома ідентичними попередньо напруженими півпросторами за допомогою вісесиметричного навантаження, що зводиться до рівнодійної сили P . Зовнішнє навантаження прикладене таким чином, що точки не навантажених поверхонь обох попередньо напружених півпросторів та віддалених від межі контакту півпросторів з пружним штампом, переміщуються відносно координатної площини $y_3=0$ на величину ε . Величини: R – радіус циліндричного штампа, $h=0.5H$.

У системі циліндричних координат (r, θ, z_i) , такій постановці відповідають граничні умови:

- 1) на торцях пружного штампа в області контакту $z_i = \pm h/v_i$, ($i = \overline{1, 2}$):

$$u_3^{(i)} - u_3^{(3)} = \varepsilon, Q_{33}^{(3)} = Q_{33}^{(i)}, Q_{3r}^{(3)} = 0, Q_{3r}^{(i)} = 0 \quad (0 \leq r \leq R) \quad (i = \overline{1, 2}), \quad (1)$$

- 2) на межах пружних півпросторів поза ділянкою контакту $z_i = \pm h/v_i$, ($i = \overline{1, 2}$):

$$Q_{33}^{(i)} = 0, Q_{3r}^{(i)} = 0, u_3^{(i)} = 0, \quad (r > R) \quad (i = \overline{1, 2}), \quad (2)$$

- 3) на боковій поверхні пружного штампа $r = R$:

$$Q_{rr}^{(3)} = 0, Q_{3r}^{(3)} = 0, \quad (|z_i| \leq h/v_i) \quad (i = \overline{1, 2}), \quad (3)$$

Умова рівноваги, яка встановлює зв'язок між осіданням торців та рівнодійною навантаження P має вигляд:

$$P = -2\pi \int_0^R r |Q_{33}^{(i)}| dr, \quad |Q_{33}^{(i)}| = |Q_{3r}^{(i)}|_{z_i = \pm h/v_i} \quad (i = \overline{1, 2}). \quad (4)$$

Умова (4) закриває постановку просторової лінеаризованої задачі про контактну взаємодію попередньо напруженого скінченного циліндричного штампа із двома пружними півпросторами з початковими напруженнями.

Методика розв'язання поставленої задачі поділяється на два етапи: аналітичний, який висвітлений у праці [4] та чисельний. Для чисельного розв'язку було розроблено алгоритм та комп'ютерну програму у Maple для обчислення компонентів напружено-деформованого стану контактуючих тіл, що дозволило дослідити передачу вісесиметричного навантаження.

В результаті проведеного дослідження, у випадку потенціалів найпростішої структури (Трелоара, Бартенева-Хазановича та гармонічного потенціалу) можна зробити висновок про те, що: 1) найбільший вплив початкових напружень відзначений на бічній поверхні штампа; 2) чим ближче до центрального поперечного перерізу циліндричного штампа, тим швидше нормальні напруження прямують до нуля; 3) у числовому еквіваленті переміщення приймають значно більші значення ближче до осі циліндричного штампа, ніж до його бічної поверхні; 4) при розтягу сила вісесиметричного навантаження P приймає більші значення ніж при стиску, оскільки їх значення зменшуються із збільшенням коефіцієнта видовження λ_1 .

Отже, вплив початкових напружень на передачу навантаження та закон розподілу контактних характеристик пружних ідентичних півпросторів, які стискають пружний циліндричний штамп з початковими напруженнями є суттєвим і повинен враховуватися при розрахунках на міцність у деталях конструкцій. А розроблений алгоритм числового обчислення компонентів напружено-деформованого стану дозволяє використовувати його при інженерних розрахунках, що значно полегшує складність досліджень. Тому він може безпосередньо використовуватись для дослідження різноманітних ізотропних, трансверсально-ізотропних або композитних матеріалів при моделюванні технологічного обладнання, деталей машин, колон будівель та іншого. Також, числова реалізація дає змогу графічно відображати вплив початкових напружень на закон розподілу контактних характеристик тіл, для потенціалів найпростішої структури, що значно полегшує візуальну інтерпретацію розв'язку задачі.

Література.

1. Грилицкий Д.В., Кизыма Я.М. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости – Львов: Вища школа, 1981. – 136 с.
2. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. Германия : Saarbrücken LAPLAMBERT Academic Publishing, 2015. 468 с.
3. Yaretska N.O. Mathematical model and solution of spatial contact problem for prestressed cylindrical punch and elastic layer./ Innovative paradigm of the development of modern physical-mathematical sciences: Collective monograph. - Riga, Latvia : “Baltija Publishing”, 2022. – Pp. 261-295. <https://doi.org/10.30525/978-9934-26-200-5-10>
4. Babych, S.Y., Yarets'ka, N.O. Contact Problem for an Elastic Ring Punch and a Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *Int Appl Mech.* 2021. Vol. 57. №3. P. 297-305. <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01081-7>.
5. Бабич С.Ю., Ярецька Н.О., В.Ф. Лазар, Н. П. Щекань. Аналітичні розв'язки статичної задачі про тиск попередньо напружених півпросторів та пружного циліндра з початковими напруженнями. // Наук. Вісник Ужгород. ун-ту, 2022, том 41, №2. С. 91 – 102. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41\(2\).91-102](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2).91-102)