УДК 621.891

Р.В. СОРОКАТИЙ
Технологічний університет Поділля, м. Хмельницький

# ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ТРИБОЕЛЕМЕНТНОЇ МАКРОМОДЕЛІ ПРОЦЕСУ ЗНОШУВАННЯ

*Розглянуто питання визначення параметрів моделі процесу зношування, яка представлена ланцюгом Маркова. Запропоновано основні види матриць перехідних імовірностей, які можуть використовуватися для моделювання основних видів зношування. Компоненти матриці перехідних ймовірностей відшукувались з позиції визначення відповідності між параметрами моделі і фізичними характеристиками процесу. Можливість використання запропонованого методу визначення параметрів доведено шляхом аналізу впливу нестаціонарності режимів навантаження на величину зносу.*

Аналіз процесів зношування показує, що зміни, які відбуваються в функціонуючих трибосистемах є випадковими, а процес зношування, в загальному випадку, є випадковим процесом.

Метод трибоелементів [1, 2] дає можливість моделювання поведінки функціонуючих трибосистем в стохастичній постановці. Згідно методу трибоелементів [1, 2], для побудови макромоделі, яка є основою розв'язку зносоконтактних задач, використовується апарат процесів Маркова з дискретними часом та станами.

Таким чином, питання визначення параметрів моделі процесу зношування, яка представлена ланцюгом Маркова, є одним із ключових питань методу трибоелементів.

Параметри ланцюга Маркова вважаються заданими, якщо відомо вектор початкового стану та задано матрицю перехідних ймовірностей.

Ймовірність знаходження трибоелемента системи в тому чи іншому стані в момент часу $t=1$ визначається як добуток вектора початкового стану $\left[\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{i}}(t=0)\right]$ і матриці перехідних імовірностей $\lfloor \mathbf{W}_{\mathbf{ij}} \rfloor$:

$$\left[\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{i}}(t=1)\right]=\left[\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{i}}(t=0)\right]\lfloor \mathbf{W}_{\mathbf{ij}} \rfloor \quad i,j=1,2,...,k, \tag{1}$$

де $k$ – кількість станів трибоелемента; $\left[\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{i}}(t=0)\right]$ - вектор початкового стану;

$\left[\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{i}}(t=1)\right]$ - вектор безумовних імовірностей знаходження трибоелемента в момент часу $t=1$;

$\lfloor \mathbf{W}_{\mathbf{ij}} \rfloor$ - матриця перехідних імовірностей.

Ймовірності станів трибоелемента в момент часу $t>1$ визначаються як добуток $\left[\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{i}}(t-1)\right]$ вектора безумовних імовірностей в момент $t-1$ та матриці перехідних імовірностей, яка задає поведінку трибоелемента в момент часу $t$:

$$\left[\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{i}}(t)\right]=\left[\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{i}}(t-1)\right]\lfloor \mathbf{W}_{\mathbf{ij}} \rfloor \quad i,j=1,2,...,k \tag{2}$$

Компоненти вектора початкового стану $\left[\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{i}}(t=0)\right]$ в більшості випадків визначаються з припущення, що в початковий момент часу трибоелемент знаходиться в першому стані:

$$\left[\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{i}}(t=0)\right]=[1,0,0,...0] \tag{3}$$

При умові, що відома більш детальна інформація про ймовірності знаходження трибоелемента в початковий момент часу вектор початкового стану може приймати інший вигляд, але при цьому необхідно враховувати, що імовірності станів трибоелемента утворюють певну групу випадкових подій, тобто:

$$\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{i}}(t=0)=1 \tag{4}$$

Процес накопичення трибопошкоджень відноситься до класу кумулятивних пошкоджень. Внаслідок опрацювання значної кількості експериментальних даних в роботі [3] доведено, що найкраще відображає процес накопичення кумулятивних пошкоджень матриця з одинарними стрибками вверх та наявністю поглинаючого стану:

$$\left[\mathbf{W}_{\mathbf{ij}}\right]=\begin{bmatrix} w_{11}(t) & w_{12}(t) & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & w_{22}(t) & w_{23}(t) & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

де $w_{ij}$ - імовірності переходів ланцюга Маркова з стану $i$ в стан $j$.

Матриця з одинарними стрибками вверх та наявністю поглинаючого стану достатньо повно відображає фізичну сутність процесу зношування, а саме послідовне руйнування шарів матеріалу.

При моделювані процесів абразивного та катастрофічного зношування, коли за один цикл навантаження можливе руйнування досить великого шару матеріалу, необхідно використовувати матриці перехідних імовірностей, що дозволяють стрибки вверх на 2, 3 і можливо більшу кількість станів:

$$\left[\mathbf{W}_{\mathbf{ij}}\right]=\begin{bmatrix} w_{11}(t) & w_{12}(t) & w_{13}(t) & 0 & ... & 0 \\ 0 & w_{22}(t) & w_{23}(t) & w_{24}(t) & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Необхідно виділити матриці перехідних імовірностей, що використовуються для моделювання процесів зношування, в яких можливе перенесення матеріалу з одного елемента пари тертя на інший і навпаки. В цьому випадку необхідно передбачити можливість переходу не тільки з нижчого стану у вищий, але і з вищого на нижчий.

$$\left[\mathbf{W}_{\mathbf{ij}}\right]=\begin{bmatrix} w_{11}(t) & w_{12}(t) & 0 & 0 & ... & 0 \\ w_{21}(t) & w_{22}(t) & w_{23}(t) & 0 & ... & 0 \\ 0 & w_{32}(t) & w_{33}(t) & w_{34}(t) & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Для опису параметрів ланцюга Маркова необхідно визначитися з компонентами матриці перехідних імовірностей.

Відомі методи [3] визначення параметрів по інтегральній функції розподілу для стаціонарної моделі, метод максимальної правдоподібності чи спеціальні методи переведення нестаціонарної моделі в стаціонарну, з наступним визначенням її параметрів таким же методом, як стаціонарної, мало ефективні.

Тому, питання визначення параметрів стаціонарних і нестаціонарних марківських моделей розв'язувалося з позиції визначення відповідності між параметрами моделі і фізичними характеристиками процесу.

Виходячи з фізичної сутності процесу зношування, можна вважати, що переходи трибосистеми із стану в стан відбуваються під впливом потоку зношування. При реалізації першої, після деякого моменту часу, події потоку зношування, відбувається перехід системи в наступний стан. У даному випадку, під подією потоку зношування розуміють знос на деяку величину *h*. Потік зношування, відповідно до центральної граничної теореми потоків, буде пуассонівським, а саме має властивості ординарності і відсутності післядії, що не порушує основну вимогу марківського випадкового процесу.

Характеристикою будь-якого потоку є інтесивність, тому і для потоку зношування необхідно визначитися з поняттям інтенсивності потоку зношування.

Виходячи з фізичного змісту інтенсивності потоку $\lambda\ (t)$ як середнього числа подій в одиницю часу для елементарної ділянки $\Delta t$, яка примикає до $t$ [4], інтенсивність потоку зношування $\lambda_I\ (t)$ у момент часу $t$, визначиться як:

$$\lambda_I(t) = V_I(t)/h,\ [\text{час}^{-1}], \tag{7}$$

де $V_I(t)$ - швидкість зношування в момент часу $t$, (довжина /час, об'єм/час, маса/час);

$h$ - величина, що визначається з умови ординарності потоку і має розмірність довжини, маси, об'єму в залежності від того яка швидкість зношування використовується лінійна, масова, об'ємна.

Таким чином, через функцію швидкості зношування можна визначити основну характеристику потоку зношування $\lambda_I(t)$, що визначає переходи системи зі стану в стан процесу зношування, яка представлена у вигляді марківського ланцюга.

Імовірність переходу системи із стану $i$, у якому вона знаходилася в момент часу $t$, у стан $j$ за елементарний проміжок часу $\Delta t$, що безпосередньо примикає до $t$, визначиться за виразом:

$$w_{ij} \approx \lambda_{ij}(t) \cdot \Delta t, \tag{8}$$

де $\lambda_{ij}(t)$ - інтенсивність пуассонівського потоку подій, що переводить систему з $i$ у $j$.

Виходячи з вищесказаного, імовірність переходів $w_{ij}$ марківського ланцюга визначиться як:

$$w_{ij} \approx \lambda_I(t) \cdot \Delta t \tag{9}$$

Таму що $0 \le w_{ij} \le 1$, тоді $\lambda_I(t) \cdot \Delta t \le 1$, звідки $0 \le \Delta t \le 1/\lambda_I(t)$.

Очевидно, що чим менший інтервал $\Delta t$, тим точніше буде визначаться імовірність переходу системи із стану в стан.

Для доведення можливості використання такого підходу при визначенні параметрів моделі процесу зношування, який зображується ланцюгом Маркова проведено аналіз впливу нестаціонарності режимів навантаження на величину зносу.

Було проаналізовано вплив коливань навантаження на величину зносу, коли щільність імовірності значень навантажень описувалася закономи Гаусса і Вейбулла.

Залежність інтенсивності зношування від навантаження прийнято у вигляді:

$$I = \xi \cdot p^{\alpha}, \tag{10}$$

де $\xi$ - коефіцієнт пропорційності;

$p$ - середнє значення навантаження;

$\alpha$ – показник степеня.

Величина зносу при змінному навантажені виражається через значення зносу при постійному навантажені у вигляді:

$$u_{\text{var}} = \mu\bar{u}, \tag{11}$$

де $u_{var}$ - величина сумарного зносу при змінному навантажені; $\bar{u}$ - величина сумарного зносу при постійному навантаженні, рівному математичному сподіванню;

$\mu$ - коеффіцієнт впливу на знос коливань навантаження.

Розрахункові значення коефіцієнта $\mu$ у залежності від коефіцієнта варіації $v$ і показника степеня $\alpha$ при розсіювані навантажень за законом Гаусса наведені в табл. 1.

Таблиця 1

**Розрахункові значення $\mu$ (закон Гаусса)**

| $\nu$ | $\alpha$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 2,5 | 3,0 | 3,5 | 4,0 | 4,5 |
| 0 | 1,0 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 |
| 0,1 | 1,0 | 1,00 | 1,01 | 1,01 | 1,02 | 1,02 | 1,04 | 1,09 |
| 0,2 | 1,0 | 1,01 | 1,03 | 1,08 | 1,10 | 1,14 | 1,19 | 1,25 |
| 0,3 | 1,0 | 1,02 | 1,09 | 1,12 | 1,21 | 1,31 | 1,43 | 1,60 |
| 0,4 | 1,0 | 1,03 | 1,10 | 1,23 | 1,38 | 1,59 | 1,83 | 2,15 |

Розрахункові значення коефіцієнта $\mu$ у залежності від показника степеня $\alpha$ і параметра форми $m$ при розсіювані навантажень за законом Вейбулла наведені в табл. 2.

Таблиця 2

**Розрахункові значення $\mu$ (закон Вейбулла)**

| $m$ | $\alpha$ | | | | | $\nu$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 2,5 | 3,0 | |
| 1,0 | 0,854 | 1,0 | 1,289 | 1,716 | 2,546 | 1,0 |
| 1,5 | 0,904 | 1,0 | 1,157 | 1,361 | 1,754 | 0,679 |
| 2,0 | 0,954 | 1,0 | 1,100 | 1,225 | 1,464 | 0,523 |
| 2,5 | 0,964 | 1,0 | 1,060 | 1,178 | 1,296 | 0,428 |
| 3,0 | 0,968 | 0,994 | 1,036 | 1,130 | 1.202 | 0,364 |
| 3,5 | 0,974 | 0,995 | 1,033 | 1,080 | 1,141 | 0,317 |
| 4,0 | 0,976 | 0,989 | 1,007 | 1,060 | 1,118 | 0,281 |

Отримані розрахункові значення (табл. 3) розподілу навантаження за законом Гаусса добре узгоджуються з експериментальними даними приведеними в роботі [5].

Таблиця 3

**Порівняльні дані визначення $\mu$**

| Експериментальні значення $\mu$, [5] | | | Розрахункові значення $\mu$ |
|---|---|---|---|
| $\nu$ | $\alpha$ | Ретинакс ФК-24 | |
| 0,2 | 1,53 | $1{,}06 \pm 0{,}05$ | 1,01 |
| 0,38 | 1,53 | $1{,}16 \pm 0{,}10$ | 1,06 |
| 0,48 | 1,53 | $1{,}25 \pm 0{,}13$ | 1,08 |
| $\nu$ | $\alpha$ | Чавун ЧНМХ | |
| 0,2 | 1,63 | $1{,}10 \pm 0{,}06$ | 1,02 |
| 0,38 | 1,63 | $1{,}15 \pm 0{,}08$ | 1,06 |
| 0,48 | 1,63 | $1{,}20 \pm 0{,}12$ | 1,09 |

Дані, наведені в табл. 3, свідчать про те, що коливання навантаження впливають на збільшення зносу в більшій мірі, ніж дає теоретична залежність. Це можна пояснити тим, що теоретична залежність не враховує перехідних процесів, які відбуваються при зміні навантаження від однієї ступені до іншої, а передбачає, що цей процес відбувається миттєво.

Якщо модель уточнити, шляхом врахування перехідних процесів, що не складно при наявності інформації про перехідні процеси і час їх протікання, то кількісні оцінки будуть більш точними.

Наведений в роботі метод, визначення параметрів ланцюга Маркова, дає якісну і досить точну кількісну оцінку ефекту збільшення зносу при коливанні навантажень.

Таким чином, запропонований підхід для визначення вектора початкового стану, виду матриці перехідних імовірностей і визначення її компонентів, може ефективно використовуватись для побудови трибоелементної макромоделі процесу зношування.

### Література

1. Сорокатый Р.В. Моделирование поведения трибосистем методом трибоэлементов // Трение и износ.- 2002.- Т. 23.- №1.- С. 16-22.

2. Сорокатый Р.В., Кузьменко А.Г., Бесараба Т.Г. Решение износоконтактных задач методом трибоэлементов // Проблеми трибології (Problems of Tribology).- 1996.- №1.- С. 15-20.

3. Богданофф Дж., Козин Ф. Вероятностные модели накопления повреждений. Пер. с англ.- Мир, 1989.
4. Венцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения.- М.: Наука, 1991 - 384 с.
5. Кордонский Х.Б. и др. Вероятностный анализ процесса изнашивания.- М.: Наука, 1968 - 56 с.

Надійшла 5.12.2002 р.