

С. Ю. Бабич¹, Н.О. Ярецька^{1,2}, О.А. Кравчук²

ТИСК ДВОХ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИХ СПІВВІСНИХ КІЛЬЦЕВИХ ЦИЛІНДРІВ НА ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИЙ ШАР

¹Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. П.Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;
e-mail: IaretskaN@gmail.com

²Хмельницький національний університет,
вул. Інститутська, 11, 29016, Хмельницький, Україна

Проблема дослідження впливу початкових напружень на тіла, що перебувають у контакті, виникла в цілому ряді фундаментальних та прикладних наукових напрямків, таких як: механіка композитів, механіка матеріалів та елементів конструкцій, неруйнівних методах визначення навантажень, сейсмології, біомеханіці, механіці гірських порід, геофізиці та інших. Тому, необхідність у дослідженні впливу початкових напружень на контактну взаємодію тіл є важливим аспектом вивчення представлених проблем.

Також, врахування впливу додаткових сил (наприклад, початкових або залишкових напружень) на систему пружних тіл, що контактують, в разі ускладнює розв'язки задач в математичному аспекті. Тому важливо розвивати цей напрямок досліджень, використовуючи апарат математичних методів.

Оглядаючи праці контактної механіки, моделі, що враховують складні фізичні та механічні властивості тіл, були досліджені у працях [3 - 5]. В загальному випадку, дія початкових напружень на контакт тіл вимагає використання при дослідженні нелінійної теорії пружності [6]. Але, якщо початкові напруження будуть достатньо великими, то можна обмежитись її лінеаризованим варіантом [1, 2, 7].

Тому дослідження даної контактної задачі виконано у загальному вигляді для стисливих (нестисливих) тіл для теорії великих (кінцевих) початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу з використанням співвідношень лінеаризованої теорії пружності [1, 2, 7] без врахування сил тертя.

Отже, розглянемо пружний нескінченний попередньо-напружений шар, у який втискаються два скінченних співвісних пружних кільцевих циліндричних штампи з початковими напруженнями (рис. 1). Зробимо припущення, що пружні тіла виготовлені з різних стисливих або нестисливих ізотропних матеріалів з потенціалом довільної структури. Причому коефіцієнт Пуассона та модуль Юнга для «верхнього» та «нижнього» кільцевих штампів позначимо $\nu^{(i)}$, $E^{(i)}$ ($i=1,2$), відповідно, а для шару - ν , E . Товщину шару після виникнення в ньому початкового напруженого стану позначимо через $h = \lambda_3 h^*$, де h^* - товщина шару у природному стані; $R_1^{(i)}$ ($i=1,2$) - радіуси внутрішніх кіл пружних кільцевих штампів, $R_2^{(i)}$ ($i=1,2$) - радіуси зовнішніх кіл пружних кільцевих штампів, $H^{(i)}$ ($i=1,2$) - висоти пружних кільцевих штампів, відповідно. Вважаємо, що зовнішні вісесиметричні навантаження прикладені тільки до вільних торців пружних штампів так, що їх точки зміщуються в напрямку осі Oy_3 на сталі величини $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$ відносно площини $y_3=0$. Поверхні поза ділянкою контакту залишаються вільними від впливу зовнішнього навантаження. А дія сил тертя в зоні контакту відсутня.

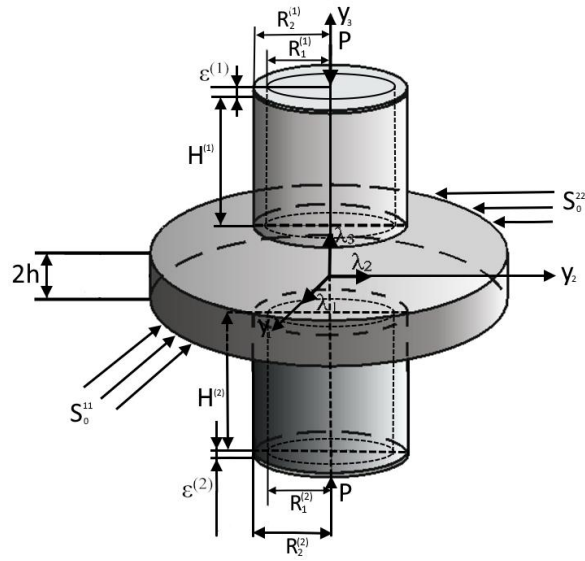


Рис. 1.

Дослідження виконуємо в координатах початкового деформованого стану Oy_i , ($i=1,2,3$), що пов'язані з лагранжевими координатами: $y_i = \lambda_i x_i$ ($i=1,2,3$), де λ_i є коефіцієнтами видовження, що визначають переміщення початкового стану. Також, припустимо, що початкові стани штампів та шару є однорідними та рівними.

У системі циліндричних координат (r, θ, y_3) такій постановці відповідають граничні умови:

- 1) на торцях пружних штампів

$$u_3^{(i)} = (-1)^i \varepsilon^{(i)}; Q_{3r}^{(i)} = 0; \quad \forall r \in [R_1^{(i)}, R_2^{(i)}], y_3 = (-1)^{i+1} h + (-1)^{i+1} H^{(i)}, \quad (i=1,2) \quad (1)$$

- 2) на бічній поверхні пружних штампів

$$Q_{rr}^{(i)} = 0; \quad Q_{3r}^{(i)} = 0; \quad \forall (-1)^{i+1} y_3 \in [0, H^{(i)}], \quad r = R_k^{(i)}, \quad (i,k=1,2) \quad (2)$$

- 3) на межі пружного шару в області контакту

$$U_3 = U_3^{(i)}; \quad Q_{33} = Q_{33}^{(i)}; \quad Q_{3r} = Q_{3r}^{(i)} = 0 \quad \forall r \in [R_1^{(i)}, R_2^{(i)}], \quad y_3 = (-1)^i h, \quad (i=1,2) \quad (3)$$

- 4) на межі пружного шару поза областью контакту

$$Q_{33} = Q_{3r} = 0, \quad \forall r \notin [R_1^{(i)}, R_2^{(i)}], \quad y_3 = (-1)^i h \quad (i=1,2) \quad (4)$$

Умови рівноваги мають вигляд:

$$\int_{R_1^{(1)}}^{R_2^{(1)}} r [Q_{33}]_{y_3=h} dr - \int_{R_1^{(2)}}^{R_2^{(2)}} r [Q_{33}]_{y_3=-h} dr = 0 \quad (5)$$

А рівнодія зовнішніх сил визначається рівністю:

$$P = -2\pi \int_{R_1^{(1)}}^{R_2^{(1)}} r [Q_{33}]_{y_3=h} dr = -2\pi \int_{R_1^{(2)}}^{R_2^{(2)}} r [Q_{33}]_{y_3=-h} dr \quad (6)$$

Задача формулюється у вигляді розв'язку потрібних інтегральних рівнянь, що зводяться до одного інтегрального рівняння способом підстановки. Оскільки дана задача вісесиметрична, то ядро інтегрального рівняння залежить від добутку трьох функцій Бесселя. Тому для розв'язку була використана формула, що представляє добуток двох функцій Бесселя у подвійну суму добутків гіпергеометричної функції на функцію Бесселя. Це дозволяє звести задачу до функціонального рівняння, що пов'язує переміщення кільцевих штампів з невідомими коефіцієнтами розподілу

контактних напружень. В свою чергу, отримане функціональне рівняння було зведене до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Дану систему розв'язуємо методом редукції (утинання). При дії навантаження на кільцеві штампи розподіл контактних напружень знаходимо у вигляді ряду добутків приєднаних функцій Лежандра з вагою, що відповідає особливостям у контактних напруженнях на межах штампів.

Також, в роботі для випадку нерівних коренів визначального рівняння [2, 7] проведено числовий розв'язок задачі для потенціалу Трелоара.

Отже, дослідивши контактну взаємодію двох пружних поперечно напружених співвісних кільцевих циліндрів з пружним шаром з початковими напруженнями, отримали впевненість, що майбутній прогрес розвитку механіки твердого деформованого тіла визначається дослідженнями досить складних класів задач, які враховують вплив складних фізичних та механічних властивостей тіл таких як: тертя, температура, початкові напруження тощо. Хоча розв'язок цих задач вимагає використання досить складних математичних розрахунків, а їх практичне застосування зумовлено, наприклад, розрахунком фундаментів (грунтових основ) або перекриттів з підшвами кільцевої форми.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: початкові напруження, лінеаризовані теорія пружності, потенціал Трелоара, функції Бесселя.

1. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями : монография. – Германия : Saarbrücken LAPLAMBERT Academic Publishing, 2015. – 468 с.
2. Гузь А.Н., Рудницький В.Б. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями : монография. – Хмельницький : вид. ПП Мельник, 2006. – 710 с.
3. Vagno O.M. Effect of Finite Initial Strains on the Wave Process in the System of an Incompressible Half-Space and an Ideal Liquid Layer. // *Int. Appl. Mech.* – 2021. – **57**, N 6. – P. 644 – 654.
4. Guz A.N. Eight Non-Classical Problems of Fracture Mechanics. – Cham: Springer, 2021. – 366 p.
5. Kaminsky A.O., Kurchakov E.E. Tensor-Nonlinear Constitutive Equations for an Elastic Body with Primary Anisotropy // *Int. Appl. Mech.* – 2022. – **58**, N 2. – P. 154 – 159.
6. Rushchitsky J.J. Auxetic metamaterials from the position of mechanics: linear and nonlinear models. // *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.* – 2018. – 7. – P. 46-58.
7. Yarets'ka, N. Contact Problems for Cylindrical Stamps and Elastic Bodies with Initial (Residual) Stresses. In: Guz, A.N., Altenbach, H., Bogdanov, V., Nazarenko, V.M. (eds) *Advances in Mechanics. Advanced Structured Materials.* – Cham: Springer, vol 191, 2023. – P. 517–546.

S.Y. Babych¹, N.O. Yarets'ka^{1,2}, O. A. Kravchuk²

PRESSURE OF TWO PRE-TENSIONED CO-AXIAL RING CYLINDERS ON A PRE-TENSIONED LAYER

¹ *S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;
e-mail: IaretskaN@gmail.com*

² *Khmelnytsky National University,
Institute Street, 11, 29016, Khmelnytsky, Ukraine*

The contact problem is solved for two elastic pre-tensioned co-axial finite ring cylinders on a pre-tensioned layer without frictional forces. It is solved for the case of unequal roots of the characteristic equation. The research was carried out for the theory of great initial (ultimate) and two variants of the theory of small initial deformations within the framework of linearized theory of elasticity with the elastic potential having arbitrary structure.