

КОЛИВАННЯ В МОДЕЛІ РОЗІМКЕНОГО ГІПЕРЦИКЛУ ЕЙГЕНА

У роботі розглядається трьохвимірний модель розімкненого гіперциклу Ейгена. Визначено умови, при виконанні яких у системі можливі коливання. Показано здатність популяції вибирати ціну боротьби.

Вступ

Швидкий розвиток технократичного суспільства поставив перед людством гострі екологічні проблеми, що зумовило необхідність моделювання біосферних процесів. Основним об'єктом тут виступає біогеоценоз [1, 6, 11], як макросистема, що складається з біотичних та абіотичних елементів, розміщених на певній території та об'єднаних кругообігом речовин та енергії. Розуміння процесів, що протікають всередині екосистеми, взаємозв'язків її елементів дозволить не лише здійснювати ефективну та оперативну екологічну політику, а й привідкриє таємницю виникнення та розвитку різноманіття біологічних форм.

Одним з підходів до моделювання біогеоценозів є використання теорії гіперциклів. Серед властивостей моделі, розробленої Ейгеном та Шустером [14], є те, що вона описує ієрархічну структуру системи, де наявність представників вищих рівнів визначається належним функціонуванням нижчих. Проте слід відмітити, що в екологічних системах, на відміну від мікробіологічних, зв'язок між різними рівнями не є циклічним. Це настановило на ідею використовувати для опису екологічних сукцесій розімкнений гіперцикл [13].

Зазначимо, що існує досить багато праць по дослідженню різних модифікацій гіперциклів. Так у [14, 19] проведено дослідження класичної моделі. Важливі результати щодо стійких станів в моделях з дифузійно розподіленою початковою концентрацією елементів були отримані в роботах [17, 18]. Щодо моделі розімкненого гіперциклу, то вона мало досліджена. Так у [9, 13] розглянуто двовимірний випадок, а у роботі [10] визначено стійкість особливих точок трьохвимірної системи.

Постановка проблеми

Розглянемо динаміку трьох популяцій, що описується розімкненим гіперциклом Ейгена:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \left(F_1(x) - \frac{1}{S_0}(x_1 F_1(x) + x_2 F_2(x) + x_3 F_3(x)) \right) x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = \left(F_2(x) - \frac{1}{S_0}(x_1 F_1(x) + x_2 F_2(x) + x_3 F_3(x)) \right) x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} = \left(F_3(x) - \frac{1}{S_0}(x_1 F_1(x) + x_2 F_2(x) + x_3 F_3(x)) \right) x_3, \end{cases} \quad (1)$$

де $F_1(x) = N - x_1$, $F_2(x) = a_1 x_1 - x_2$, $F_3(x) = a_2 x_2 - x_3$, $a_1 > 0, a_2 > 0, N > 0, S_0 > 0$, x_1, x_2, x_3 – чисельність (біомаса) популяцій (тут і надалі розумітимемо залежність змінних від часу), N – коефіцієнт, що задає значення чисельності рівноваги для першої асоціації, при відсутності другої, a_1 – коефіцієнт, що описує степінь залежності другої асоціації від попередньої, S_0 – ємність середовища. Слід відзначити, що $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$ відомі як функції Аллена [16] і відображають характер зв'язку, при якому в систему може бути включена нова популяція лише у випадку відповідного розвитку косного середовища.

Для аналізу динаміки системи важливим питанням є дослідження коливань. У роботі виділимо область, де можливе знаходження граничних циклів, визначимо умови виникнення коливальних рухів біля особливих точок та спробуємо дати інтерпретацію отриманих результатів.

Перш ніж перейти до розгляду основної частини введемо поняття граничного циклу.

Означення 1. Граничним циклом автономної системи звичайних диференціальних рівнянь називається ізольована замкнена траєкторія.

Автоколивання

Згідно з А.А. Андроном [2, 3] основним признаком встановлення в системі періодичних коливань є наявність граничного циклу. Відмітимо, що цикл є граничною траєкторією у тому сенсі, що для такої траєкторії існує її окіл, з якого всі інші траєкторії прямують до неї при $t \rightarrow +\infty$ чи при $t \rightarrow -\infty$. Відповідно до сказаного, можемо стверджувати, що граничний цикл обмежує область фазового простору, в якому знаходиться принаймні одна особлива точка.

Також слід відмітити, що згідно теореми про існування та єдиність розв'язків граничний цикл не може перетинати інші інтегральні криві. Доведемо наступну теорему.

Теорема 1. $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_1 + x_2 + x_3 = S_0$ – інтегральні площини системи (1).

Доведення. Нехай неявна функція $F(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = 0$ є частинним розв'язком системи (1). Тоді виконується така рівність:

$$\frac{\partial F(x_1(t), x_2(t), x_3(t))}{\partial x_1(t)} \frac{dx_1(t)}{dt} + \frac{\partial F(x_1(t), x_2(t), x_3(t))}{\partial x_2(t)} \frac{dx_2(t)}{dt} + \frac{\partial F(x_1(t), x_2(t), x_3(t))}{\partial x_3(t)} \frac{dx_3(t)}{dt} = 0. \quad (2)$$

Легко показати, що перші три функції теореми задовольняють рівність (2). Запишемо цю рівність для функції $x_1 + x_2 + x_3 = S_0$ (для спрощення запису не позначатимемо явно залежність змінних від часу):

$$\frac{(x_1 + x_2 + x_3 - S_0)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - a_1 x_1 x_2 - a_2 x_2 x_3 - N x_1)}{S_0} = 0.$$

Врахувавши, що $x_1 + x_2 + x_3 - S_0 = 0$, отримаємо тотожність. Таким чином, теорему доведено.

Покажемо, що в системі (1) не може існувати замкнених інтегральних поверхонь. Для цього використаємо узагальнений критерій Бендиксона-Дюлака для тривимірної системи диференціальних рівнянь [7]. Розглянемо вираз

$$D = \frac{\partial}{\partial x_1}(P\Phi) + \frac{\partial}{\partial x_2}(Q\Phi) + \frac{\partial}{\partial x_3}(R\Phi), \quad (3)$$

де $P(x_1, x_2, x_3)$, $Q(x_1, x_2, x_3)$, $R(x_1, x_2, x_3)$ – праві частини системи (1), причому $P(x_1, x_2, x_3)$ відповідає першому рівнянню, $Q(x_1, x_2, x_3)$ – другому, $R(x_1, x_2, x_3)$ – третьому; $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ – неперервно диференційована функція.

Шукатимемо функцію $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ у формі

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = x_1^k x_2^m x_3^n (x_1 + x_2 + x_3 - S_0)^v.$$

Якщо прийняти $k = \frac{N - S_0(2 + a_1 + a_1 a_2)}{S_0}$, $m = -(a_2 + 2)$, $n = -2$, $v = \frac{S_0(1 + a_1 + a_2 + a_1 a_2) - N}{S_0}$, то вираз (3)

запишеться як

$$D = N(S_0(1 + a_1 + a_1 a_2) - N)\Phi(x_1, x_2, x_3).$$

Як можна побачити, вираз D дорівнює нулю лише на інтегральних площинах, вказаних у теоремі 1. Отриманий результат запишемо у формі теореми.

Теорема 2. У фазовому просторі системи (1) немає замкнених інтегральних поверхонь.

Коливання біля особливих точок

Відомо, що признаком наявності коливань біля особливої точки є комплексні власні значення матриці Якобі в ній [4, 15]. Таким чином, потрібно проаналізувати характеристичні рівняння матриць Якобі у відповідних особливих точках. Легко показати, що біля точок $(0,0,0)$; $(N,0,0)$; $(N, a_1 N, 0)$; $(S_0, 0, 0)$; $(0, S_0, 0)$;

$\left(\frac{N + S_0}{a_1 + 2}, \frac{S_0(a_1 + 1) - N}{a_1 + 2}, 0\right)$; $(0, 0, S_0)$; $\left(\frac{S_0 + N}{2}, 0, \frac{S_0 - N}{2}\right)$; $\left(0, \frac{S_0}{a_2 + 2}, \frac{S_0(a_2 + 1)}{a_2 + 2}\right)$ коливні рухи відсутні. Тому

основну увагу приділимо дослідженню точок $\left(\frac{S_0 + N(a_2 + 2)}{a_1 a_2 + a_1 + a_2 + 3}, \frac{(a_1 + 1)S_0 + N(a_1 - 1)}{a_1 a_2 + a_1 + a_2 + 3}, \right.$

$\left.\frac{(a_1 a_2 + a_2 + 1)S_0 - N(a_1 + a_2 + 1)}{a_1 a_2 + a_1 + a_2 + 3}\right)$ та $(N, a_1 N, a_1 a_2 N)$.

Використавши теорему Безу [8], запишемо характеристичне рівняння матриці Якобі в точці $\left(\frac{S_0 + N(a_2 + 2)}{a_1 a_2 + a_1 + a_2 + 3}, \frac{(a_1 + 1)S_0 + N(a_1 - 1)}{a_1 a_2 + a_1 + a_2 + 3}, \frac{(a_1 a_2 + a_2 + 1)S_0 - N(a_1 + a_2 + 1)}{a_1 a_2 + a_1 + a_2 + 3}\right)$ наступним чином:

$$\left(\lambda + \frac{N(1 + a_1 + a_1 a_2) - S_0}{a_1 + a_2 + a_1 a_2 + 3}\right)(\lambda^2 + a\lambda + c) = 0, \quad (3)$$

$$\text{де } a = \frac{(a_1 + a_1 a_2 + a_2 + 2)S_0^2 + (a_1 a_2 + a_1)NS_0 - (a_2 + 2)N^2}{S_0(a_1 + a_2 + a_1 a_2 + 3)},$$

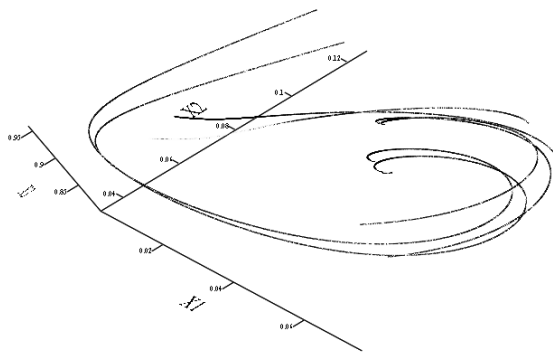
$$c = \frac{1}{S_0(a_1 + a_2 + a_1 a_2 + 3)^2} \left((a_1 + 1)(a_1 a_2 + 1 + a_2)S_0^3 + ((a_2^2 + 3a_2 - 1)a_1^2 + (2a_2^2 + 4a_2 + 1)a_1 + a_2^2 + a_2)NS_0^2 + \right. \\ \left. + ((a_2^2 + a_2 - 3)a_1^2 - (a_2^2 + 4a_2 + 2)a_1 - 2a_2^2 - 5a_2 - 3)N^2 S_0 + (a_2 + 2)(a_1 - 1)(a_1 + a_2 + 1)N^3 \right).$$

Очевидно, що існуватиме пара комплексних власних значень, якщо дискримінант квадратичного полінома в рівнянні (3) буде від'ємний:

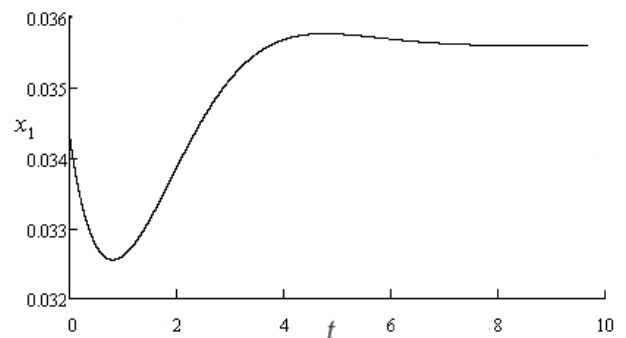
$$\frac{S_0^4}{N^4} (a_1 a_2 - a_1 + a_2)^2 + \frac{S_0^3}{N^3} (-2(a_2^2 + 4a_2 - 3)a_1^2 - 2(3a_2^2 + 5a_2)a_1 - 4a_2^2 - 4a_2) + \\ + \frac{S_0^2}{N^2} (-3a_2^2 + 2a_2 - 13)a_1^2 + 2(a_2^2 + 5a_2 + 2)a_1 + 6a_2^2 + 12a_2 + 4 + \frac{S_0}{N} ((4a_2 + 8)a_1^2 + \\ + (2a_2^2 + 2a_2 - 4)a_1 - 4a_2^2 - 12a_2 - 8) + (a_2 + 2)^2 < 0. \quad (4)$$

Таким чином, біля точки, що розглядається, існуватимуть коливання, якщо параметри моделі (1) задовольнятимуть умові (4).

Як приклад розглянемо траєкторії біля точки $\left(\frac{S_0 + N(a_2 + 2)}{a_1 a_2 + a_1 + a_2 + 3}, \frac{(a_1 + 1)S_0 + N(a_1 - 1)}{a_1 a_2 + a_1 + a_2 + 3}, \frac{(a_1 a_2 + a_2 + 1)S_0 - N(a_1 + a_2 + 1)}{a_1 a_2 + a_1 + a_2 + 3} \right)$ при $\frac{S_0}{N} = 1$, $a_1 = 30$, $a_2 = 20$. Зазначимо, що при вказаних значеннях параметрів поліном в лівій частині нерівності (3) дорівнює -1558800, а корені характеристичного рівняння $\lambda_1 \approx -0.965$, $\lambda_2 \approx -0.965 + 0.956i$, $\lambda_3 \approx -0.965 - 0.956i$. Для відображення фазового простору біля даної точки використаємо метод Рунге-Куты четвертого порядку [5] (рисунок 1). На рисунках 1.а та 1.б можна помітити явні коливання.



а)



б)

Рисунок 1 Динаміка біля точки $\left(\frac{S_0 + N(a_2 + 2)}{a_1 a_2 + a_1 + a_2 + 3}, \frac{(a_1 + 1)S_0 + N(a_1 - 1)}{a_1 a_2 + a_1 + a_2 + 3}, \frac{(a_1 a_2 + a_2 + 1)S_0 - N(a_1 + a_2 + 1)}{a_1 a_2 + a_1 + a_2 + 3} \right)$ при

$$\frac{S_0}{N} = 1, a_1 = 30, a_2 = 20: \text{ а) фазовий портрет; б) динаміка асоціації } x_1$$

Характеристичне рівняння матриці Якобі у точці $(N, a_1 N, a_1 a_2 N)$ можна записати як

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0, \quad (5)$$

$$\text{де } a = \frac{N(S_0(1 + a_1 + a_1 a_2) - N)}{S_0}, b = \frac{N^2 a_1 (S_0(1 + a_2 + a_1 a_2) - N(1 + a_1 + a_2))}{S_0}, c = \frac{N^3 a_1^2 a_2 (S_0 - N(1 + a_1 a_2 + a_1))}{S_0}.$$

Лема 1 [12]. Рівняння $x^3 + px + q = 0$ має пару комплексних коренів при виконанні такої умови:

$$-4p^3 - 27q^2 < 0. \quad (6)$$

Заміною змінних $\bar{\lambda} = \lambda - \frac{N(S_0(1+a_1+a_1a_2)-N)}{3S_0}$ приведемо характеристичне рівняння (5) до вказаної

форми:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}^3 + \frac{N^2}{3S_0^2} (S_0^2(-a_1^2a_2^2 + a_1^2a_2 + a_1a_2 - a_1^2 + a_1 - 1) - NS_0(a_1a_2 + 3a_1^2 + a_1 - 2) - N^2)\bar{\lambda} + \\ + \frac{N^3}{27S_0^3} (S_0^3(a_1a_2 + a_1 - 2)(a_1a_2 - 2a_1 + 1)(2a_1a_2 - a_1 - 1) + NS_0^2((-27a_1^3 + 3a_1^2)a_2^2 - \\ - 6a_1(a_1 + 1)(3a_1 - 1)a_2 + 9a_1^3 + 12a_1^2 + 6a_1 - 6) - 3N^2S_0(3a_1^2 + a_1(a_2 + 1) - 2) - 2N^3) = 0. \end{aligned}$$

Тоді умова (6) запишеться як

$$\begin{aligned} \frac{S_0^4}{N^4} (a_1a_2 - 1)^2 (a_1 - 1)^2 (a_2 - 1)^2 + \frac{S_0^3}{N^3} (-4a_1^4a_2^5 + 2(a_1^4 + 2a_1^3 + a_1^2)a_2^4 + \\ + (14a_1^4 - 14a_1^3 + 10a_1^2 - 6a_1)a_2^3 + (-6a_1^4 - 12a_1^3 - 8a_1^2 + 2a_1 + 4)a_2^2 + \\ + (-2a_1^4 + 8a_1^3 + 14a_1^2 + 4a_1 - 8)a_2 + 2a_1^3 - 6a_1^2 - 4a_1 + 4) - \frac{S_0^2}{N^2} ((27a_1^4 - 6a_1^3 - a_1^2)a_2^4 + \\ + (36a_1^4 + 16a_1^3 - 14a_1^2 + 6a_1)a_2^3 + (-10a_1^4 - 4a_1^3 - 2a_1^2 + 6a_1 + 6)a_2^2 + \\ + (-8a_1^4 - 18a_1^3 - 22a_1^2 + 12)a_2 - a_1^4 + 8a_1^3 + 14a_1^2 - 6) - \frac{S_0}{N} ((6a_1^2 - 2a_1)a_2^3 + \\ + (18a_1^3 + 4a_1^2 - 10a_1 + 4)a_2^2 + (8a_1^3 + 10a_1^2 - 4a_1 - 8)a_2 - 4a_1^4 - 10a_1^3 - 6a_1^2 + 4a_1 + 4) - \\ + (4a_1 - 1)a_2^2 - 2(a_1 + 1)a_2 + (a_1 + 1)^2 < 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Як і для попередньої точки, розглянемо фазовий простір біля точки (N, a_1N, a_1a_2N) при $\frac{S_0}{N} = 5$, $a_1 = 3$, $a_2 = 1$ (рисунок 2). Відмітимо, що при вказаних значеннях параметрів поліном в лівій частині нерівності (7) дорівнює -852012, а корені характеристичного рівняння (5) такі: $\lambda_1 \approx 0.26$, $\lambda_2 \approx -3.53 + 1.173i$, $\lambda_3 \approx -3.53 - 1.173i$. Для побудови розв'язку біля точки (N, a_1N, a_1a_2N) , як і у першому випадку, використовуємо метод Рунге-Куты четвертого порядку. Зазначимо, що на рисунку 2.а важко виділити траєкторії, що утворюють спіраль. Проте на рисунку 2.б помітний слабо виражений коливний характер динаміки популяції x_2 .

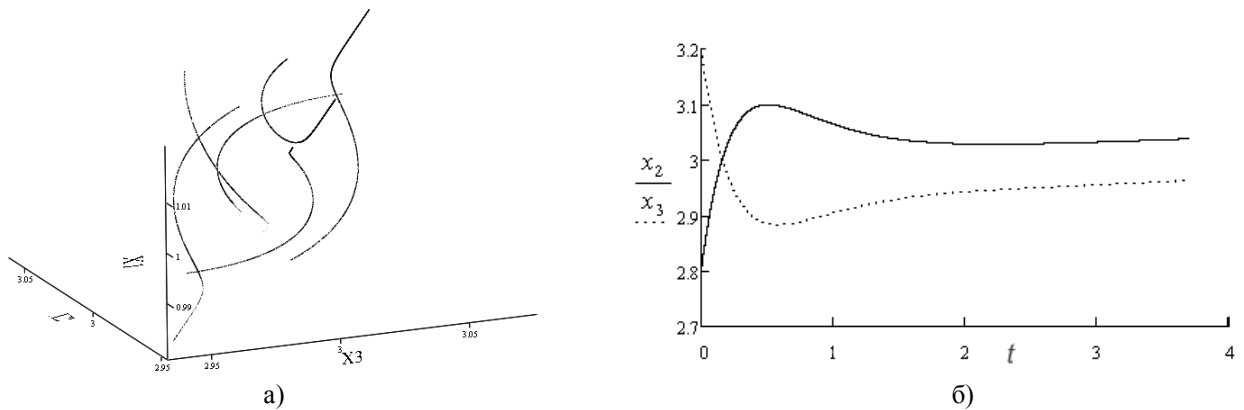


Рисунок 2 Динаміка біля точки (N, a_1N, a_1a_2N) при $\frac{S_0}{N} = 5$, $a_1 = 3$, $a_2 = 1$:

а) фазовий портрет; б) динаміка популяцій x_2 та x_3

Визначимо значення параметрів, при яких дійсна частина власних значень дорівнює нулю, що дасть нам можливість говорити про існування чи відсутність біля особливої точки спірального центра (тривимірний аналог центра у двовимірному просторі).

Теорема 3. Біля точки $\left(\frac{S_0 + N(a_2 + 2)}{a_1a_2 + a_1 + a_2 + 3}, \frac{(a_1 + 1)S_0 + N(a_1 - 1)}{a_1a_2 + a_1 + a_2 + 3}, \frac{(a_1a_2 + a_2 + 1)S_0 - N(a_1 + a_2 + 1)}{a_1a_2 + a_1 + a_2 + 3} \right)$ не існує

спірального центра при додатних значеннях параметрів.

Доведення. Запишемо умову комплексних коренів з нульовою дійсною частиною квадратичного полінома в рівнянні (3):

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 0, \\ c > 0, \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{S_0}{N} = \frac{a_2 + 2}{a_1 + a_2 + a_1 a_2 + 2}, \\ a_1 \in (0; 1), \\ \frac{S}{N} \in \left(0; \frac{1 - a_1}{a_1 + 1} \right) \cup \left(\frac{a_1 + a_2 + 1}{a_2 + a_1 a_2 + 1}; +\infty \right), \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{Врахуємо обмеження,} \\ \text{накладені на параметри} \end{array} \right| \Rightarrow \frac{S_0}{N} \in \{\emptyset\},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{S_0}{N} = \frac{a_2 + 2}{a_1 + a_2 + a_1 a_2 + 2}, \\ a_1 \in [1; +\infty), \\ \frac{S}{N} \in \left(\frac{a_1 + a_2 + 1}{a_2 + a_1 a_2 + 1}; +\infty \right), \end{array} \right.$$

де $\{\emptyset\}$ – пуста множина.

Таким чином, квадратичний поліном в рівнянні (3) немає комплексних коренів з нульовою дійсною частиною, що в свою чергу означає, що біля точки, що досліджується, не може бути спірального центра, що й потрібно було довести.

Теорема 4. Біля точки $(N, a_1 N, a_1 a_2 N)$ не існує спірального центра при додатних значеннях параметрів.

Доведення. Запишемо загальний поліном третьої степені, коренями якого є комплексні числа з нульовою дійсною частиною:

$$(\lambda^2 + d)(\lambda - h) = \lambda^3 - h\lambda^2 + d\lambda - hd. \quad (8)$$

Проаналізувавши перетворення (8), запишемо умову наявності комплексних коренів з нульовою дійсною частиною характеристичного рівняння (5):

$$\left\{ \begin{array}{l} b > 0, \\ ab = c, \end{array} \right. \quad (9)$$

де a, b, c – аналогічні до коефіцієнтів рівняння (5).

Випишемо умову виконання нерівності в системі (9):

$$b > 0 \Rightarrow \frac{S_0}{N} \in \left(\frac{1 + a_1 + a_2}{1 + a_2 + a_1 a_2}; +\infty \right). \quad (10)$$

Розглянемо рівняння в системі (9):

$$ab = c \Rightarrow ab - c = 0 \Rightarrow \Rightarrow \frac{N^3 a_1}{S_0^2} ((a_1 + a_2 + 1)N^2 + (a_1^2 a_2^2 - a_1^2 - a_1 a_2^2 - 2a_1 a_2 - 2a_1 - 2a_2 - 2)NS_0 + (a_1 a_2 + 1)(a_1 + 1)(a_2 + 1)S_0^2) = 0. \quad (11)$$

Випишемо корені рівняння (11):

$$\left(\frac{S_0}{N} \right)_1 = \frac{2 + 2a_1 a_2 + 2a_1 + 2a_2 - a_1^2 a_2^2 + a_1 a_2^2 + a_1^2 + a_1 \sqrt{D}}{2(a_1 a_2 + 1)(a_1 + 1)(a_2 + 1)},$$

$$\left(\frac{S_0}{N} \right)_2 = \frac{2 + 2a_1 a_2 + 2a_1 + 2a_2 - a_1^2 a_2^2 + a_1 a_2^2 + a_1^2 - a_1 \sqrt{D}}{2(a_1 a_2 + 1)(a_1 + 1)(a_2 + 1)},$$

де $D = a_1^2 a_2^4 - 2a_1^2 a_2^2 + a_1^2 - 2a_1 a_2^4 - 4a_1 a_2^3 - 6a_1 a_2^2 + 4a_1 + a_2^4 - 4a_2^3 - 8a_2^2 + 4$.

Порівняємо ліву межу проміжку (10) з більшим коренем $\left(\frac{S_0}{N} \right)_1$:

$$\left(\frac{S_0}{N}\right)_1 < \frac{1+a_1+a_2}{1+a_2+a_1a_2},$$

$$(a_1 + a_1^2 a_2 + a_1 a_2) \sqrt{D} < a_1^3 a_2^3 + 2a_1^3 a_2^2 + a_1^3 a_2 + 2a_1^2 a_2^3 + 5a_1^2 a_2^2 + 3a_1^2 a_2 + a_1^2 + a_1 a_2^3 + a_1 a_2^2 + 2a_1 a_2 + 2a_1.$$

Вважатимемо, що дискримінант додатній ($D > 0$), в протилежному випадку корені рівняння (11) будуть комплексними, що протирічить обмеженням (додатність, дійсність) накладеним на параметри. Тоді матимемо

$$-4a_1^2 a_2^2 (a_1 + 1)(a_2 + 1)(a_1 a_2 + 1)(a_1 + a_2 + 1)(a_1 + a_2 + a_1 a_2 + 3) < 0.$$

Отже, отримали, що найбільший корінь рівняння (11) менший за ліву межу проміжку (10), що означає, що система (9) немає розв'язку при накладених на параметри умови. Таким чином, біля точки $(N, a_1 N, a_1 a_2 N)$ не може бути спірального центра, що й потрібно було довести.

Аналіз.

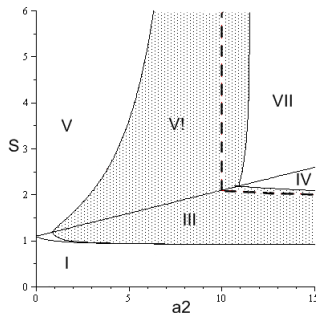
За результатами дослідження стійкості особливих точок трьохвимірної моделі розімкненого гіперциклу Ейгена [9] та коливань біля особливих точок побудуємо перерізи поверхонь, що обмежують області параметрів, при яких точки стійкі і при яких існують коливання, при $a_1 = 0.1$ (рисунок 3.а), $a_1 = 0.5$ (рисунок 3.б), $a_1 = 3$ (рисунок 3.в). Сірим кольором залито область параметрів, при яких точки стійкі та біля яких існують коливні рухи.

При значеннях параметрів з області I стійкими є точка $(S_0, 0, 0)$ або $\left(\frac{N+S_0}{a_1+2}; \frac{S_0(a_1+1)-N}{a_1+2}; 0\right)$, з областей II, III, IV

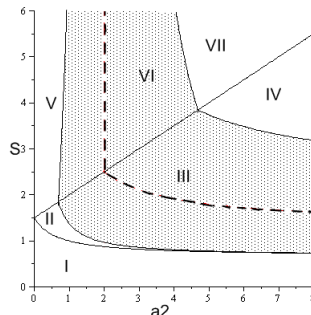
– точка $\left(\frac{S_0 + N(a_2 + 2)}{a_1 a_2 + a_1 + a_2 + 3}; \frac{(a_1 + 1)S_0 + N(a_1 - 1)}{a_1 a_2 + a_1 + a_2 + 3}; \frac{(a_1 a_2 + a_2 + 1)S_0 - N(a_1 + a_2 + 1)}{a_1 a_2 + a_1 + a_2 + 3}\right)$, з областей V, VI, VII – точка

$(N, a_1 N, a_1 a_2 N)$. Пунктирна лінія розмежовує область параметрів, при яких чисельність третьої асоціації менша за чисельність першої (область зліва від лінії), та область параметрів, при яких чисельність третьої асоціації більша за чисельність першої (область справа від лінії). Слід відмітити, що при збільшенні параметра a_1 описана лінія зсувається вліво, що можна пояснити тим, що залежність третьої асоціації від першої здійснюється через посередництво другої асоціації, залежність якої від першої визначається даним параметром.

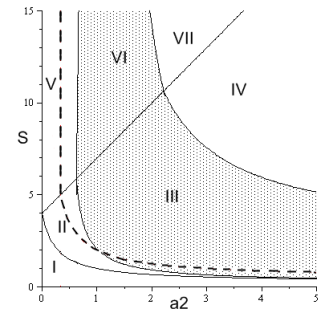
З рисунку 3 видно, що при досить малій ємності (область I) середовища коливні рухи відсутні, проте при її збільшенні і досягненні того рівня, при якому можливе існування трьох асоціацій, в системі з'являються коливання. Таким чином можна говорити, що третя асоціація вносить в систему коливання.



а) $a_1 = 0.1$



б) $a_1 = 0.5$



в) $a_1 = 3$

Рисунок 3 Области параметрів, що відповідають різній динаміці популяцій

Спробуємо проаналізувати рисунок 3. При досить малих значеннях параметра a_2 (області II та V) домінантом виступає перша асоціація, яка пригнічує дві інші. При збільшенні параметра a_2 в системі з'являються коливання (слід зазначити, що при збільшенні параметра a_1 вони з'являються раніше), що можна пояснити загостренням боротьби за ресурси і намаганням другої та третьої асоціації зайняти лідерство. Проте відсутність переваги проявляється в коливаннях при незначних змінах чисельності асоціацій. При подальшому збільшенні параметра a_2 домінантом стає друга або третя асоціація (залежно від співвідношення параметрів a_1 та a_2).

Розглянемо ситуацію з обмеженими ресурсами (область параметрів II, III, IV). Зафіксуємо параметр a_2 таким чином, щоб точка з області параметрів II (позначимо її т. А для полегшення подальшого викладення) була якнайближче до області III. Як можна побачити, при русі т. А у напрямку збільшення ємності середовища S_0 при зафіксованому значенні a_2 вона потрапляє у область III (біля особливої точки з'являються коливання). Звідси можна припустити, що при збільшенні ємності середовища, асоціації починають активніше боротися за ресурси.

Розглядаючи випадок з надлишком ресурсів (область параметрів V, VI, VII), тепер зафіксуємо точку (т. В) з області параметрів VI якнайближче до області V. При русі цієї точки в напрямку зростання ємності середовища S_0 при фіксованому a_2 т. В переходить з області параметрів VI у область V. Тут асоціації відмовляються від боротьби при збільшенні надлишку ресурсів. З вище розглянутого можна припустити, що асоціації здатні обирати ціну боротьби.

Розглянемо знову ж точку (т. С) з області параметрів VI якнайближче до області VII. Зафіксуємо параметр a_2 і рухатимемо точку у напрямку збільшення ємності середовища. Як можна побачити з рисунків 3, при збільшенні ємності S_0 т. С переходить з області VI у область VII (тобто як вище зазначалось з області «відсутності переваги» у область «домінування»). У даній ситуації проявляється «жадібність» асоціацій, коли при досить великому значенні параметра a_2 при збільшенні надлишку ресурсів асоціації починають активніше боротись за останні.

Висновок

Таким чином, в роботі визначено, що в системі можливі коливання (затухаючі або такі, що збільшуються) біля точок $\left(\frac{S_0 + N(a_2 + 2)}{a_1 a_2 + a_1 + a_2 + 3}, \frac{(a_1 + 1)S_0 + N(a_1 - 1)}{a_1 a_2 + a_1 + a_2 + 3}, \frac{(a_1 a_2 + a_2 + 1)S_0 - N(a_1 + a_2 + 1)}{a_1 a_2 + a_1 + a_2 + 3} \right)$ та $(N, a_1 N, a_1 a_2 N)$. Показано, що при додатних значеннях параметрів у фазовому просторі не може бути спірального центра. Також відмітимо, що у фазовому просторі системи немає замкнених інтегральних поверхонь.

Аналіз отриманих результатів дозволяє нам говорити, що коливання в систему приносить поява третьої асоціації. Також можна помітити елементи інтелекту в поведінці асоціацій, коли вони вибирають ціну боротьби.

Бібліографічні посилання

1. **Авдин В. В.** Математическое моделирование экосистем: [Учебное пособие] / В. В. Авдин. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ. – 2004. – 80 с.
2. **Андронов А. А.** Качественная теория динамических систем второго порядка / А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1966. – 568 с.
3. **Андронов А. А.** Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. – М.: Физматгиз, 1959. – 920 с.
4. **Баутин Н. Н.** Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович. – [2-е изд., доп.]. – М.: Наука, 1990. – 488 с. – (Справочная математическая библиотека).
5. **Березич И. С.** Методы вычислений. Т. 2 / И. С. Березич, Н. П. Жидков. – М.: Гл. изд. физ.-мат. лит.-ры, 1959. – 620 с.
6. **Бузыкин А. И.** Моделирование элементов лесных биогеоценозов / А. И. Бузыкин. – Красноярск: Институт леса и древесины им. В.Н. Сукачева СО АН СССР, 1985. – 166 с.
7. **Буриев Т. Э.** Исследование периодических режимов в вольтерровских моделях сообщества трех популяций / Т. Э. Буриев, В. Э. Эргашев // Исследования по математической биологии: сборн. науч. труд., посвящ. памяти А. Д. Базыкина. – Пушкино, 1996. – С. 70-74.
8. **Курош А. Г.** Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. – [9-е изд.]. – М.: Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1968. – 431 с.
9. **Рузич Р. В.** Розімкнений гіперцикл як модель фітоценогенезу / Р. В. Рузич // Чотирнадцята всеукр. (дев'ята між нар.) студ. наук. конфер. з прикл. мат. та інфор. СНКПМІ-2011, 5-6 травня 2011 р.: тези допов. – Львів: ЛНУ, 2011. – С. 150-152.
10. **Рузич Р. В.** Стійкість особливих точок трьохвимірного випадку однієї моделі екологічної макросистеми / Р. В. Рузич // Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка. – 2012. – Т. 17, вип. 3 (15). – С. 45-51.
11. **Сукачев В. Н.** Основы лесной типологии и биогеоценологии / В. Н. Сукачев. – Ленинград: Изд-во «Наука». Ленинградское отделение, 1972 – (Избранные труды: в трех томах). Т. 1. – 1972. – 420 с.
12. **Фаддеев Д. К.** Сборник задач по высшей алгебре / Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. – [10-е изд.]. – М.: Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1972. – 304 с.
13. **Чернышенко С. В.** Нелинейные методы динамики лесных биогеоценозов / С. В. Чернышенко. – Днепропетровск: Изд-во ДНУ, 2005. – 500 с.
14. **Эйген М.** Гиперцикл. Принципы самоорганизации макромолекул / М. Эйген, П. Шустер; [перевод с английского В. М. Андреева]. – М.: «Мир», 1982. – 270 с.
15. **Эрроусмит Д.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями / Д. Эрроусмит, К. Плейс; пер. с англ. Т. Д. Вентцель. – М.: Мир, 1986. – 243.
16. **Allen P. M.** Evolution, population dynamics, and stability / P. M. Allen // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1976. – Vol. 73, No. 3. – pp. 665-668.
17. **Bratus' A. S.** Stationary solutions in a closed distributed Eigen-Schuster evolution system / A. S. Bratus', V. P. Posvyanskii // Differential Equations. – 2006. – Vol. 42, No. 12. – pp. 1762-1774.

18. **Bratus' A. S.** Stability and the limit behavior of the open distributed hypercycle system / A. S. Bratus', E. N. Lukasheva // Differential Equations. – 2009. – Vol. 45, No. 11. – pp. 1564-1576.
19. **Hofbauer Josef** A difference equation model for the hypercycle / Josef Hofbauer // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 1984. – Vol. 44, № 4. – pp. 762-772.