УДК 517.52/524:517.58/589

В.Ц. Міхалевський

Підсумовування функціональних рядів за власними елементами гібридного диференціального оператора Фур'є - Ейлера - Лежандра на сегменті $[R_0, R_3]$ полярної осі

(м. Хмельницький)

Методом порівняння розв'язку крайової задачі на сегменті $[R_0, R_3]$ полярної осі для сепаратної системи з диференціальних рівнянь Фур'є, Ейлера та Лежандра, побудованого, з одного боку, методом функцій Коші, а, з другого боку, методом скінченного гібридного інтегрального перетворення типу Фур'є - Ейлера - Лежандра підсумовано поліпараметричну сім'ю функціональних рядів за власними елементами гібридного диференціального оператора Фур'є - Ейлера - Лежандра.

Методом сравнения решения краевой задачи на сегменте $[R_0, R_3]$ полярной оси для сепаратной системы с дифференциальных уравнений Фурье, Эйлера и Лежандра, построенного, с одной стороны, методом функций Коши, а, с другой стороны, методом конечного гибридного интегрального преобразования типа Фурье - Эйлера - Лежандра просуммирована полипараметрическая семья функциональных рядов по собственным элементам гибридного дифференциального оператора Фурье - Эйлера - Лежандра.

Бібліогр.: 6 назв.

Побудуємо обмежений на множині $I_2 = \{r : r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3);\ R_0 \geq 0, R_3 < \infty\}$ розв'язок сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку Фур'є, Ейлера та Лежандра для модифікованих функцій

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - q_1^2\right)u_1(r) = -g_1(r), \quad r \in (R_0, R_1),$$

$$\left(B_\alpha^* - q_2^2\right)u_2(r) = -g_2(r), \quad r \in (R_1, R_2), \tag{1}$$

$$\left(\Lambda_{(\mu)} - q_3^2\right)u_3(r) = -g_3(r), \quad r \in (R_2, R_3)$$

за крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^0\right)u_1(r)\Big|_{r=R_0} = g_0, \quad \left(\alpha_{22}^3 \frac{d}{dr} + \beta_{22}^3\right)u_3(r)\Big|_{r=R_3} = g_R \tag{2}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k\right)u_k(r) - \left(\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k\right)u_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k} = \omega_{jk};\ j,k = 1,2 \tag{3}$$

У рівностях (1) беруть участь: 1) узагальнений диференціальний оператор Лежандра $\Lambda_{(\mu)} = \dfrac{d^2}{dr^2} + cthr\dfrac{d}{dr} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\mu_1^2}{1-chr} + \dfrac{\mu_2^2}{1+chr}\Big)$ [2]; 2) диференціальний оператор Фур'є другого порядку $\dfrac{d^2}{dr^2}$ [1]; 3) диференціальний оператор Ейлера $B_\alpha^* = r^2\dfrac{d^2}{dr^2} + (2\alpha+1)r\dfrac{d}{dr} + \alpha^2$ другого порядку [1]; $\mu_1 \geq \mu_2 \geq 0$, $(\mu) = (\mu_1, \mu_2)$; $2\alpha + 1 > 0$, $q_1 > 0$, $q_2 > 0$, $q_3 > 0$.

Вважаємо, що виконані умови на коефіцієнти: $\alpha_{11}^0 \leq 0$, $\beta_{11}^0 \geq 0$, $|\alpha_{11}^0| + \beta_{11}^0 \neq 0$; $\alpha_{22}^3 \geq 0$, $\beta_{22}^3 \geq 0$, $\alpha_{22}^3 + \beta_{22}^3 \neq 0$; $\alpha_{jm}^k \geq 0$, $\beta_{jm}^k \geq 0$, $c_{jk} = \alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k$, $c_{1k}\cdot c_{2k} > 0$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $(\dfrac{d^2}{dr^2} - q_1^2)v = 0$ складають функції $v_1 = chq_1r$ та $v_2 = shq_1r$ [1]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B_\alpha^* - q_2^2)v = 0$ складають функції $v_1 = r^{-\alpha-q_2}$ та $v_2 = r^{-\alpha+q_2}$ [1]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $(\Lambda_{(\mu)} - q_3^2)v = 0$ складають функції $P_{\nu_3}^{(\mu)}(chr)$ та $L_{\nu_3}^{(\mu)}(chr)$, $\nu_3 = -1/2 + q_3$ [2].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє побудувати розв'язок крайової задачі (1)-(3) методом функцій Коші [1,3]:

$$u_1(r) = A_1chq_1r + B_1shq_1r + \int_{R_0}^{R_1} E_1(r,\rho)g_1(\rho)d\rho, \quad r \in (R_0, R_1),$$

$$u_2(r) = A_2r^{-\alpha-q_2} + B_2r^{-\alpha+q_2} + \int_{R_1}^{R_2} E_2(r,\rho)g_2(\rho)\rho^{2\alpha-1}d\rho, \quad r \in (R_1, R_2), \tag{4}$$

$$u_3(r) = A_3P_{\nu_3}^{(\mu)}(chr) + B_3L_{\nu_3}^{(\mu)}(chr) + \int_{R_2}^{R_3} E_3(r,\rho)g_3(\rho)sh\rho d\rho, \quad r \in (R_2, R_3).$$

Тут $E_j(r,\rho)$ - функції Коші [1,3]:

$$E_j(r,\rho)\Big|_{r=\rho+0} - E_j(r,\rho)\Big|_{r=\rho-0} = 0$$

$$\frac{dE_j(r,\rho)}{dr}\Big|_{r=\rho+0} - \frac{dE_j(r,\rho)}{dr}\Big|_{r=\rho-0} = -\frac{1}{\varphi_j}(\rho), \tag{5}$$

де $\varphi_1(r) = 1$, $\varphi_2(r) = r^{2\alpha+1}$, $\varphi_3(r) = shr$.

Припустимо, що функція Коші

$$E_1(r,\rho) = \begin{cases} \overset{-}{E}_1 \equiv C_1chq_1r + D_1shq_1r, & R_0 < r < \rho < R_1 \\ \overset{+}{E}_1 \equiv C_2chq_1r + D_2shq_1r, & R_0 < \rho < r < R_1 \end{cases}$$

Властивості (5) функції Коші дають алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$(C_2 - C_1)chq_1\rho + (D_2 - D_1)shq_1\rho = 0$$

$$(C_2 - C_1)shq_1\rho + (D_2 - D_1)chq_1\rho = -q_1^{-1}$$

Звідси знаходимо співвідношення:

$$C_2 - C_1 = q_1^{-1}shq_1\rho, \quad D_2 - D_1 = -q_1^{-1}chq_1\rho \tag{6}$$

Доповнимо рівності (6) алгебраїчними рівняннями:

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^0\right) \overset{-}{E}_1 \bigg|_{r=R_0} = 0 : V_{11}^{01}(q_1R_0)C_1 + V_{11}^{02}(q_1R_0)D_1 = 0 \tag{7}$$

$$\left(\alpha_{11}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^1\right) \overset{+}{E}_1 \bigg|_{r=R_1} = 0 : V_{11}^{11}(q_1R_1)C_2 + V_{11}^{12}(q_1R_1)D_2 = 0$$

Алгебраїчна система (7) внаслідок співвідношень (6) набуває вигляду:

$$V_{11}^{01}(q_1R_0)C_1 + V_{11}^{02}(q_1R_0)D_1 = 0 \tag{8}$$

$$V_{11}^{11}(q_1R_1)C_1 + V_{11}^{12}(q_1R_1)D_1 = q_1^{-1}\Phi_{11}^1(q_1R_1, q_1\rho)$$

Згідно правил Крамера [4] маємо:

$$C_1 = \frac{-V_{11}^{02}(q_1R_0)}{q_1\Delta_{11}(q_1R_0, q_1R_1)}\Phi_{11}^1(q_1R_1, q_1\rho), \quad D_1 = \frac{V_{11}^{01}(q_1R_0)}{q_1\Delta_{11}(q_1R_0, q_1R_1)}\Phi_{11}^1(q_1R_1, q_1\rho);$$

$$\Delta_{j1}(q_1R_0, q_1R_1) = V_{11}^{01}(q_1R_0)V_{j1}^{12}(q_1R_1) - V_{11}^{02}(q_1R_0)V_{j1}^{11}(q_1R_1), \ j = 1, 2.$$

Цим функція Коші $E_1(r, \rho)$ визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі $r = \rho$ має структуру:

$$E_1(r, \rho) = -\frac{1}{q_1\Delta_{11}(q_1R_0, q_1R_1)} \begin{cases} \Phi_{11}^0(q_1R_0, q_1r)\Phi_{11}^1(q_1R_1, q_1\rho), & R_0 < r < \rho < R_1 \\ \Phi_{11}^0(q_1R_0, q_1\rho)\Phi_{11}^1(q_1R_1, q_1r), & R_0 < \rho < r < R_1 \end{cases} \tag{9}$$

Припустимо, що функція Коші

$$E_2(r, \rho) = \begin{cases} \overset{-}{E}_2 \equiv C_1r^{-\alpha-q_2} + D_1r^{-\alpha+q_2}, & R_1 < r < \rho < R_2 \\ \overset{+}{E}_2 \equiv C_2r^{-\alpha-q_2} + D_2r^{-\alpha+q_2}, & R_1 < \rho < r < R_2 \end{cases}$$

Властивості (5) функції Коші дають алгебраїчну систему:

$$(C_2 - C_1)\rho^{-\alpha-q_2} + (D_2 - D_1)\rho^{-\alpha+q_2} = 0$$

$$(C_2 - C_1)(\alpha + q_2)\rho^{-\alpha_1-q_2} + (D_2 - D_1)(\alpha - q_2)\rho^{-\alpha+q_2} = \rho^{-2\alpha}$$

Звідси знаходимо співвідношення:

$$C_2 - C_1 = (2q_2)^{-1}\rho^{-\alpha+q_2}, \ D_2 - D_1 = -(2q_2)^{-1}\rho^{-\alpha-q_2} \tag{10}$$

Доповнимо рівності (10) алгебраїчними рівняннями:

$$\left(\alpha_{12}^{1}\frac{d}{dr}+\beta_{12}^{1}\right)\overset{-}{E}_2\Big|_{r=R_1}=0:\ Z_{\alpha;12}^{11}(q_2,R_1)C_1+Z_{\alpha;12}^{12}(q_2,R_1)D_1=0 \qquad (11)$$

$$\left(\alpha_{11}^{2}\frac{d}{dr}+\beta_{11}^{2}\right)\overset{+}{E}_2\Big|_{r=R_2}=0:\ Z_{\alpha;11}^{21}(q_2,R_2)C_2+Z_{\alpha;11}^{22}(q_2,R_2)D_2=0$$

Алгебраїчна система (11) в силу співвідношень (10) набуває вигляду:

$$Z_{\alpha;12}^{11}(q_2,R_1)C_1+Z_{\alpha;12}^{12}(q_2,R_1)D_1=0 \qquad (12)$$

$$Z_{\alpha;11}^{21}(q_2,R_2)C_1+Z_{\alpha;11}^{22}(q_2,R_2)D_1=\frac{1}{2q_2}\Psi_{\alpha;11}^{2*}(q_2,\rho)$$

Згідно правил Крамера [4] маємо:

$$C_1=-\frac{Z_{\alpha;12}^{12}(q_2,R_1)}{2q_2\Delta_{\alpha;11}(q_2;R_1,R_2)}\Psi_{\alpha;11}^{2*}(q_2,\rho),\quad D_1=\frac{Z_{\alpha;12}^{11}(q_2,R_1)}{2q_2\Delta_{\alpha;11}(q_2;R_1,R_2)}\Psi_{\alpha;11}^{2*}(q_2,\rho).$$

Цим функція Коші $E_2(r,\rho)$ визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі $r=\rho$ має структуру:

$$E_2(r,\rho)=-\frac{1}{2q_2\Delta_{\alpha;11}(q_2;R_1,R_2)}\begin{cases}\Psi_{\alpha;12}^{1*}(q_2,r)\Psi_{\alpha;11}^{2*}(q_2,\rho),\ R_1<r<\rho<R_2\\ \Psi_{\alpha;12}^{1*}(q_2,\rho)\Psi_{\alpha;11}^{2*}(q_2,r),\ R_1<\rho<r<R_2\end{cases} \qquad (13)$$

$$\Delta_{\alpha;jk}(q_2;R_1,R_2)=Z_{\alpha;j2}^{11}(q_2,R_1)Z_{\alpha;k1}^{22}(q_2,R_2)-Z_{\alpha;j2}^{12}(q_2,R_1)Z_{\alpha;k1}^{21}(q_2,R_2),\ j,k=1,2.$$

Нехай функція Коші

$$E_3(r,\rho)=\begin{cases}\overset{-}{E}_3\equiv C_1P_{\nu_3}^{(\mu)}(chr)+D_1L_{\nu_3}^{(\mu)}(chr),\ \ R_2<r<\rho<R_3\\ \overset{+}{E}_3\equiv C_2P_{\nu_3}^{(\mu)}(chr)+D_2L_{\nu_3}^{(\mu)}(chr),\ \ R_2<\rho<r<R_3\end{cases}$$

Властивості (5) функції Коші дають алгебраїчну систему:

$$(C_2-C_1)P_{\nu_3}^{(\mu)}(ch\rho)+(D_2-D_1)L_{\nu_3}^{(\mu)}(ch\rho)=0$$

$$(C_2-C_1)P_{\nu_3}^{(\mu)\prime}(ch\rho)+(D_2-D_1)L_{\nu_3}^{(\mu)\prime}(ch\rho)=-(sh^2\rho)^{-1}$$

Звідси знаходимо співвідношення:

$$C_2-C_1=-B_{(\mu)}(q_3)L_{\nu_3}^{(\mu)}(ch\rho),\ \ D_2-D_1=B_{(\mu)}(q_3)P_{\nu_3}^{(\mu)}(ch\rho), \qquad (14)$$

$$B_{(\mu)}(q_3)=\frac{\pi 2^{\mu_1}}{2\cdot 2^{\mu_2}}\frac{\Gamma(1/2+q_3-\nu_{12}^{+})\Gamma(1/2+q_3-\nu_{12}^{-})}{\Gamma(1/2+q_3+\nu_{12}^{+})\Gamma(1/2+q_3+\nu_{12}^{-})},\ \ \nu_{12}^{\pm}=\frac{1}{2}(\mu_1\pm\mu_2).$$

Рівності (14) доповнимо алгебраїчними рівняннями:

$$\left(\alpha_{12}^{2}\frac{d}{dr}+\beta_{12}^{2}\right)\overset{-}{E}_3\Big|_{r=R_2}=0:\ Z_{\nu_3;12}^{(\mu),21}(chR_2)C_1+Z_{\nu_3;12}^{(\mu),22}(chR_2)D_1=0 \qquad (15)$$

$$\left(\alpha_{22}^3\frac{d}{dr}+\beta_{22}^3\right)\overset{+}{E}_3\Big|_{r=R_3}=0:\ Z^{(\mu),31}_{\nu_3;22}(chR_3)C_2+Z^{(\mu),32}_{\nu_3;22}(chR_3)D_2=0$$

В силу співвідношень (14) алгебраїчна система (15) набуває вигляду:

$$Z^{(\mu),21}_{\nu_3;12}(chR_2)C_1+Z^{(\mu),22}_{\nu_3;12}(chR_2)D_1=0 \tag{16}$$

$$Z^{(\mu),31}_{\nu_3;22}(chR_3)C_1+Z^{(\mu),32}_{\nu_3;22}(chR_3)D_1=B_{(\mu)}(q_3)F^{(\mu),3}_{\nu_3;22}(chR_3,ch\rho)$$

Розв'язуючи систему (16) за правилами Крамера, знаходимо:

$$C_1=-\frac{B_{(\mu)}(q_3)Z^{(\mu),22}_{\nu_3;12}(chR_2)}{\Delta^{(\mu)}_{\nu_3;12}(chR_2,chR_3)}F^{(\mu),3}_{\nu_3;22}(chR_3,ch\rho),$$

$$D_1=\frac{B_{(\mu)}(q_3)Z^{(\mu),21}_{\nu_3;12}(chR_2)}{\Delta^{(\mu)}_{\nu_3;12}(chR_2,chR_3)}F^{(\mu),3}_{\nu_3;22}(chR_3,ch\rho).$$

Цим функція Коші $E_3(r,\rho)$ визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі $r=\rho$ має структуру:

$$E_3(r,\rho)=\frac{B_{(\mu)}(q_3)}{\Delta^{(\mu)}_{\nu_3;12}(chR_2,chR_3)}\begin{cases}F^{(\mu),2}_{\nu_3;12}(chR_2,chr)F^{(\mu),3}_{\nu_3;22}(chR_3,ch\rho),\ R_2<r<\rho<R_3\\ F^{(\mu),2}_{\nu_3;12}(chR_2,ch\rho)F^{(\mu),3}_{\nu_3;22}(chR_3,chr),\ R_2<\rho<r<R_3\end{cases} \tag{17}$$

$$\Delta^{(\mu)}_{\nu_3;j2}(chR_2,chR_3)=Z^{(\mu),21}_{\nu_3;j2}(chR_2)Z^{(\mu),32}_{\nu_3;22}(chR_3)-Z^{(\mu),22}_{\nu_3;j2}(chR_2)Z^{(\mu),31}_{\nu_3;22}(chR_3),\ j=1,2.$$

Повернемось до формул (4). Крайові умови (2) та умови спряження (3) для визначення шести величин A_j, B_j $(j=\overline{1,3})$ дають неоднорідну алгебраїчну систему із шести рівнянь:

$$V^{01}_{11}(q_1R_0)A_1+V^{02}_{11}(q_1R_0)B_1=g_0$$

$$V^{11}_{j1}(q_1R_1)A_1+V^{12}_{j1}(q_1R_1)B_1-Z^{11}_{\alpha;j2}(q_2,R_1)A_2-Z^{12}_{\alpha;j2}(q_2,R_1)B_2=\omega_{j1}+\delta_{j2}G_{12},\ j=1,2$$

$$Z^{21}_{\alpha;j1}(q_2,R_2)A_2+Z^{22}_{\alpha;j1}(q_2,R_2)B_2-Z^{(\mu),21}_{\nu_3;j2}(chR_2)A_3-Z^{(\mu),22}_{\nu_3;j2}(chR_2)B_3=\omega_{j2}+\delta_{j2}G_{23}$$

$$Z^{(\mu),31}_{\nu_3;22}(chR_3)A_3+Z^{(\mu),32}_{\nu_3;22}(chR_3)B_3=g_R \tag{18}$$

У системі (18) беруть участь функції

$$G_{12}=-c_{11}\int_{R_0}^{R_1}\frac{\Phi^0_{11}(q_1R_0,q_1\rho)}{\Delta_{11}(q_1R_0,q_1R_1)}g_1(\rho)d\rho+\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha+1}}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Psi^{2*}_{\alpha;11}(q_2,\rho)}{\Delta_{\alpha;11}(q_2;R_1,R_2)}g_2(\rho)\rho^{2\alpha-1}d\rho,$$

$$G_{23}=-\frac{c_{12}}{R_2^{2\alpha+1}}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Psi^{1*}_{\alpha;12}(q_2,\rho)}{\Delta_{\alpha;11}(q_2;R_1,R_2)}g_2(\rho)\rho^{2\alpha-1}d\rho-\frac{c_{22}}{shR_2}\int_{R_2}^{R_3}\frac{F^{(\mu),3}_{\nu_3;22}(chR_3,ch\rho)}{\Delta^{(\mu)}_{\nu_3;12}(chR_2,chR_3)}g_3(\rho)sh\rho d\rho$$

та символ Кронекера δ_{j2} [4].

Введемо до розгляду функції:

$$A_{\alpha;j} = \Delta_{11}(q_1R_0, q_1R_1)\Delta_{\alpha;2j}(q_2; R_1, R_2) - \Delta_{21}(q_1R_0, q_1R_1)\Delta_{\alpha;1j}(q_2; R_1, R_2),$$

$$B^{(\mu)}_{\alpha;j}(q) = \Delta^{(\mu)}_{\nu_3;22}(chR_2, chR_3)\Delta_{\alpha;j1}(q_2; R_1, R_2) - \Delta^{(\mu)}_{\nu_3;12}(chR_2, chR_3)\Delta_{\alpha;j2}(q_2; R_1, R_2),$$

$$\Theta_{\alpha;1}(r,q) = \Delta_{21}(q_1R_0, q_1R_1)\Psi^{1*}_{\alpha;12}(q_2, r) - \Delta_{11}(q_1R_0, q_1R_1)\Psi^{1*}_{\alpha;22}(q_2, r),\ j = 1, 2,$$

$$\Theta^{(\mu)}_{\alpha;2}(r,q) = \Delta^{(\mu)}_{\nu_3;22}(chR_2, chR_3)\Psi^{2*}_{\alpha;11}(q_2, r) - \Delta^{(\mu)}_{\nu_3;12}(chR_2, chR_3)\Psi^{2*}_{\alpha;21}(q_2, r).$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі (1)-(3): для будь-якого вектора $\vec{q} = \{q_1; q_2; q_3\} \neq \vec{0}$ визначник алгебраїчної системи (18) відмінний від нуля

$$\Delta^{(\mu)}_{\alpha}(q) \equiv A_{\alpha;1}(q)\Delta^{(\mu)}_{\nu_3;22}(chR_2, chR_3) - A_{\alpha;2}(q)\Delta^{(\mu)}_{\nu_3;12}(chR_2, chR_3) =$$

$$= \Delta_{11}(q_1R_0, q_1R_1)B^{(\mu)}_{\alpha;2}(q) - \Delta_{21}(q_1R_0, q_1R_1)B^{(\mu)}_{\alpha;1}(q) \neq 0 \qquad (19)$$

Визначимо головні розв'язки крайової задачі (1)-(3):

1) породжені крайовою умовою в точці $r = R_0$ функції Гріна

$$W^{(\mu)}_{\alpha;11}(r,q) = \frac{1}{\Delta^{(\mu)}_{\alpha}(q)}\Big[B^{(\mu)}_{\alpha;2}(q)\Phi^1_{11}(q_1R_1, q_1r) - B^{(\mu)}_{\alpha;1}(q)\Phi^1_{21}(q_1R_1, q_1r)\Big], \qquad (20)$$

$$W^{(\mu)}_{\alpha;12}(r,q) = -\frac{c_{11}q_1}{\Delta^{(\mu)}_{\alpha}(q)}\Theta^{(\mu)}_{\alpha;2}(r,q),\ W^{(\mu)}_{\alpha;13}(r,q) = -\frac{c_{11}q_1}{\Delta^{(\mu)}_{\alpha}(q)}\frac{2q_2c_{12}}{R_2^{2\alpha+1}}F^{(\mu),3}_{\nu_3;22}(chR_3, chr);$$

2) породжені крайовою умовою в точці $r = R_3$ функції Гріна

$$W^{(\mu)}_{\alpha;31}(r,q) = \frac{2q_2c_{21}}{R_1^{2\alpha+1}}\frac{c_{22}}{B_{(\mu)}(q_3)shR_2}\frac{\Phi^0_{11}(q_1R_0, q_1r)}{\Delta^{(\mu)}_{\alpha}(q)};\ W^{(\mu)}_{\alpha;32}(r,q) = \frac{c_{22}}{B_{(\mu)}shR_2}\frac{\Theta_{\alpha;1}(r,q)}{\Delta^{(\mu)}_{\alpha}(q)},$$

$$W^{(\mu)}_{\alpha;33}(r,q) = \frac{1}{\Delta^{(\mu)}_{\alpha}(q)}\Big[A_{\alpha;1}(q)F^{(\mu),2}_{\nu_3;22}(chR_2, chr) - A_{\alpha;2}(q)F^{(\mu),2}_{\nu_3;12}(chR_2, chr)\Big]; \qquad (21)$$

3) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$R^{(\mu),1}_{\alpha;11}(r,q) = -\frac{B^{(\mu)}_{\alpha;2}}{\Delta^{(\mu)}_{\alpha}(q)}\Phi^0_{11}(q_1R_0, q_1r),\ R^{(\mu),1}_{\alpha;21}(r,q) = \frac{B^{(\mu)}_{\alpha;1}}{\Delta^{(\mu)}_{\alpha}(q)}\Phi^0_{11}(q_1R_0, q_1r),$$

$$R^{(\mu),1}_{\alpha;12}(r,q) = \frac{2q_2c_{21}}{R_1^{2\alpha+1}}\frac{1}{\Delta^{(\mu)}_{\alpha}(q)}\Delta^{(\mu)}_{\nu_3;22}(chR_2, chR_3)\Phi^0_{11}(q_1R_0, q_1r),$$

$$R^{(\mu),1}_{\alpha;22}(r,q) = -\frac{2q_2c_{21}}{R_1^{2\alpha+1}}\frac{1}{\Delta^{(\mu)}_{\alpha}(q)}\Delta^{(\mu)}_{\nu_3;12}(chR_2, chR_3)\Phi^0_{11}(q_1R_0, q_1r),$$

$$R^{(\mu),2}_{\alpha;11}(r,q) = \frac{\Delta_{21}(q_1R_0, q_1R_1)}{\Delta^{(\mu)}_{\alpha}(q)}\Theta^{(\mu)}_{\alpha;2}(r,q),\ R^{(\mu),2}_{\alpha;21}(r,q) = -\frac{\Delta_{11}(q_1R_0, q_1R_1)}{\Delta^{(\mu)}_{\alpha}(q)}\Theta^{(\mu)}_{\alpha;2}(r,q),$$

$$R^{(\mu),2}_{\alpha;12}(r,q)=\frac{\Delta^{(\mu)}_{\nu_3;22}}{\Delta^{(\mu)}_{\alpha}(q)}\Theta_{\alpha;1}(r,q),\ R^{(\mu),2}_{\alpha;22}(r,q)=-\frac{\Delta^{(\mu)}_{\nu_3;12}(chR_2,chR_3)}{\Delta^{(\mu)}_{\alpha}(q)}\Theta_{\alpha;1}(r,q),$$

$$R^{(\mu),3}_{\alpha;11}(r,q)=\frac{2q_2c_{12}}{R_2^{2\alpha+1}}\frac{\Delta_{21}(q_1R_0,q_1R_1)}{\Delta^{(\mu)}_{\alpha}(q)}F^{(\mu),3}_{\nu_3;22}(chR_3,chr),\tag{22}$$

$$R^{(\mu),3}_{\alpha;21}(r,q)=-\frac{2q_2c_{12}}{R_2^{2\alpha+1}}\frac{\Delta_{11}(q_1R_0,q_1R_1)}{\Delta^{(\mu)}_{\alpha}(q)}F^{(\mu),3}_{\nu_3;22}(chR_3,chr),$$

$$R^{(\mu),3}_{\alpha;12}(r,q)=-\frac{A_{\alpha;2}(q)}{\Delta^{(\mu)}_{\alpha}(q)}F^{(\mu),3}_{\nu_3;22}(chR_3,chr),\ R^{(\mu),3}_{\alpha;22}(r,q)=\frac{A_{\alpha;1}(q)}{\Delta^{(\mu)}_{\alpha}(q)}F^{(\mu),3}_{\nu_3;22}(chR_3,chr);$$

4) породжені неоднорідністю системи (1) функції впливу

$$\mathcal{H}^{(\mu)}_{\alpha;11}(r,\rho,q)=-\frac{1}{q_1}\begin{cases}\Phi^0_{11}(q_1R_0,q_1r)W^{(\mu)}_{\alpha;11}(\rho,q),\ R_0<r<\rho<R_1\\ \Phi^0_{11}(q_1R_0,q_1\rho)W^{(\mu)}_{\alpha;11}(r,q),\ R_0<\rho<r<R_1\end{cases},$$

$$\mathcal{H}^{(\mu)}_{\alpha;12}(r,\rho,q)=\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha+1}}\frac{\Phi^0_{11}(q_1R_0,q_1r)}{\Delta^{(\mu)}_{\alpha}(q)}\Theta^{(\mu)}_{\alpha;2}(\rho,q),\ \mathcal{H}^{(\mu)}_{\alpha;13}(r,\rho,q)=\frac{2q_2c_{21}}{R_1^{2\alpha+1}}\frac{c_{22}}{shR_2}\frac{1}{\Delta^{(\mu)}_{\alpha}(q)}\times$$

$$\times\Phi^0_{11}(q_1R_0,q_1r)F^{(\mu),3}_{\nu_3;22}(chR_3,ch\rho),\ \mathcal{H}^{(\mu)}_{\alpha;21}(r,\rho,q)=\frac{c_{11}}{\Delta^{(\mu)}_{\alpha}(q)}\Phi^0_{11}(q_1R_0,q_1\rho)\Theta^{(\mu)}_{\alpha;2}(r,q),$$

$$\mathcal{H}^{(\mu)}_{\alpha;22}(r,\rho,q)=\frac{1}{\Delta^{(\mu)}_{\alpha}(q)}\begin{cases}\Theta_{\alpha;1}(r,q)\Theta^{(\mu)}_{\alpha;2}(\rho,q),\ \ R_1<r<\rho<R_2\\ \Theta_{\alpha;1}(\rho,q)\Theta^{(\mu)}_{\alpha;2}(r,q),\ \ R_1<\rho<r<R_2\end{cases},\tag{23}$$

$$\mathcal{H}^{(\mu)}_{\alpha;23}(r,\rho,q)=\frac{c_{22}}{shR_2}\frac{1}{\Delta^{(\mu)}_{\alpha}(q)}\Theta_{\alpha;1}(r,q)F^{(\mu),3}_{\nu_3;22}(chR_3,ch\rho),\ \mathcal{H}^{(\mu)}_{\alpha;31}(r,\rho,q)=\frac{c_{11}2q_2c_{12}}{R_2^{2\alpha+1}\Delta^{(\mu)}_{\alpha}(q)}\times$$

$$\times\Phi^0_{11}(q_1R_0,q_1\rho)F^{(\mu),3}_{\nu_3;22}(chR_3,chr),\ \mathcal{H}^{(\mu)}_{\alpha;32}(r,\rho,q)=\frac{c_{12}}{R_2^{2\alpha+1}}\frac{\Theta_{\alpha;1}(\rho,q)}{\Delta^{(\mu)}_{\alpha}(q)}F^{(\mu),3}_{\nu_3;22}(chR_3,chr),$$

$$\mathcal{H}^{(\mu)}_{\alpha;33}(r,\rho,q)=\frac{B_{(\mu)}(q_3)}{\Delta^{(\mu)}_{\alpha}(q)}\begin{cases}W^{(\mu)}_{\alpha;33}(r,q)F^{(\mu),3}_{\nu_3;22}(chR_3,ch\rho),\ R_2<r<\rho<R_3\\ W^{(\mu)}_{\alpha;33}(\rho,q)F^{(\mu),3}_{\nu_3;22}(chR_3,chr),\ R_2<\rho<r<R_3\end{cases}.$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (18) за правилами Крамера [4] й підстановки обчислених значень A_j, B_j $(j=\overline{1,3})$ у формули (4) одержуємо (після низки елементарних перетворень) единий розв'язок крайової задачі (1)-(3):

$$u_j(r)=W^{(\mu)}_{\alpha;1j}(r,q)g_0+W^{(\mu)}_{\alpha;3j}(r,q)g_R+\sum_{m,k=1}^{2}R^{(\mu),j}_{\alpha;mk}(r,q)\omega_{mk}+$$

$$+\int_{R_0}^{R_1}\mathcal{H}^{(\mu)}_{\alpha;j1}(r,\rho,q)g_1(\rho)d\rho+\int_{R_1}^{R_2}\mathcal{H}^{(\mu)}_{\alpha;j2}(r,\rho,q)g_2(\rho)\rho^{2\alpha-1}d\rho+\tag{24}$$

$$+\int_{R_2}^{R_3}\mathcal{H}^{(\mu)}_{\alpha;j3}(r,\rho,q)g_3(\rho)sh\rho d\rho,\quad j=\overline{1,3}.$$

Побудуємо розв'язок крайової задачі (1)-(3) методом інтегрального перетворення, породженого на множині I_2 гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M^{(\mu)}_{\alpha}=\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)\frac{d^2}{dr^2}+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)B^*_\alpha+\theta(r-R_2)\theta(R_3-r)\Lambda_{(\mu)},\quad (25)$$

де $\theta(x)$ - одинична функція Гевісайда [3].

Оскільки ГДО $M^{(\mu)}_{\alpha}$ самоспряжений і на множині I_2 не має особливих точок, то його спектр дійсний та дискретний [5]. Спектральному параметру β відповідає дійсна спектральна вектор-функція

$$V^{(\mu)}_{\alpha}(r,\beta)=\sum_{k=1}^{3}\theta(r-R_{k-1})\theta(R_k-r)V^{(\mu)}_{\alpha;k}(r,\beta),\quad R_0\geq 0 \quad (26)$$

При цьому функції $V^{(\mu)}_{\alpha;k}(r,\beta)$ повинні задовольняти однорідні диференціальні рівняння

$$\begin{gathered}\left(\frac{d^2}{dr^2}+b_1^2\right)V^{(\mu)}_{\alpha;1}(r,\beta)=0,\ \ r\in(R_0,R_1),\ b_1^2=\beta^2+k_1^2,\ k_1^2\geq 0,\\ \left(B^*_\alpha+b_2^2\right)V^{(\mu)}_{\alpha;2}(r,\beta)=0,\ \ r\in(R_1,R_2),\ b_2^2=\beta^2+k_2^2,\ k_2^2\geq 0,\\ \left(\Lambda_{(\mu)}+b_3^2\right)V^{(\mu)}_{\alpha;3}(r,\beta)=0,\ \ r\in(R_2,R_3),\ b_3^2=\beta^2+k_3^2,\ k_3^2\geq 0\end{gathered}\quad (27)$$

однорідні крайові умови

$$\left(\alpha^0_{11}\frac{d}{dr}+\beta^0_{11}\right)V^{(\mu)}_{\alpha;1}(r,\beta)\Big|_{r=R_0}=0,\quad \left(\alpha^3_{22}\frac{d}{dr}+\beta^3_{22}\right)V^{(\mu)}_{\alpha;3}(r,\beta)\Big|_{r=R_3}=0 \quad (28)$$

та однорідні умови спряження

$$\left[\left(\alpha^k_{j1}\frac{d}{dr}+\beta^k_{j1}\right)V^{(\mu)}_{\alpha;k}(r,\beta)-\left(\alpha^k_{j2}\frac{d}{dr}+\beta^k_{j2}\right)V^{(\mu)}_{\alpha;k+1}(r,\beta)\right]\Big|_{r=R_k}=0;\ j,k=1,2 \quad (29)$$

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $(\frac{d^2}{dr^2}+b_1^2)v=0$ утворюють функції $\cos b_1r$ та $\sin b_1r$ [1]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B^*_\alpha+b_2^2)v=0$ утворюють функції $r^{-\alpha}\cos(b_2\ln r)$ та $r^{-\alpha}\sin(b_2\ln r)$ [1]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $(\Lambda_{(\mu)}+b_3^2)v=0$ утворюють функції $A^{(\mu)}_{\nu_3^*}(chr)$ та $B^{(\mu)}_{\nu_3^*}(chr)$, $\nu_3^*=-1/2+ib_3(\beta)$ [2].

Припустимо, що

$$V^{(\mu)}_{\alpha;1}(r,\beta)=A_1\cos b_1r+B_1\sin b_1r,\ \ r\in(R_0,R_1),\ R_0\geq 0,$$

$$V^{(\mu)}_{\alpha;2}(r,\beta) = A_2 r^{-\alpha}\cos(b_2\ln r) + B_2 r^{-\alpha}\sin(b_2 \ln r), \quad r\in(R_1,R_2) \tag{30}$$
$$V^{(\mu)}_{\alpha;3}(r,\beta) = A_3 A^{(\mu)}_{\nu_3^*}(chr) + B_3 B^{(\mu)}_{\nu_3^*}(chr), \quad r\in(R_2,R_3).$$

Крайові умови (28) й умови спряження (29) для знаходження шести величин A_j, B_j $(j=\overline{1,3})$ дають однорідну алгебраїчну систему із шести рівнянь:

$$\begin{gathered} v^{01}_{11}(b_1R_0)A_1 + v^{02}_{11}(b_1R_0)B_1 = 0 \\ v^{11}_{j1}(b_1R_1)A_1 + v^{12}_{j1}(b_1R_1)B_1 - Y^{11}_{\alpha;j2}(b_2,R_1)A_2 - Y^{12}_{\alpha;j2}(b_2,R_1)B_2 = 0,\ j=1,2; \\ Y^{21}_{\alpha;j1}(b_2,R_2)A_2 + Y^{22}_{\alpha;j1}(b_2,R_2)B_2 - Y^{(\mu),21}_{\nu_3^*;j2}(chR_2)A_3 - Y^{(\mu),22}_{\nu_3^*;j2}(chR_2)B_3 = 0 \\ Y^{(\mu),31}_{\nu_3^*;22}(chR_3)A_3 + Y^{(\mu),32}_{\nu_3^*;22}(chR_3)B_3 = 0 \end{gathered} \tag{31}$$

Визначимо функції:

$$\delta_{j1}(b_1R_0,b_1R_1) = v^{01}_{11}(b_1R_0)v^{12}_{j1}(b_1R_1) - v^{02}_{11}(b_1R_0)v^{11}_{j1}(b_1R_1),\ j=1,2;$$
$$\delta_{\alpha;jk}(b_2;R_1,R_2) = Y^{11}_{\alpha;j2}(b_2,R_1)Y^{22}_{\alpha;k1}(b_2,R_2) - Y^{12}_{\alpha;j2}(b_2,R_1)Y^{21}_{\alpha;k1}(b_2,R_2);\ j,k=1,2$$
$$\delta^{(\mu)}_{\nu_3^*;j2}(chR_2,chR_3) = Y^{(\mu),21}_{\nu_3^*;j2}(chR_2)Y^{(\mu),32}_{\nu_3^*;22}(chR_3) - Y^{(\mu),22}_{\nu_3^*;j2}(chR_2)Y^{(\mu),31}_{\nu_3^*;22}(chR_3),$$
$$a_{\alpha;j}(\beta) = \delta_{11}(b_1R_0,b_1R_1)\delta_{\alpha;2j}(b_2;R_1,R_2) - \delta_{21}(b_1R_0,b_1R_1)\delta_{\alpha;1j}(b_2;R_1,R_2),\ j=1,2;$$
$$b^{(\mu)}_{\alpha;j}(\beta) = \delta^{(\mu)}_{\nu_3^*;22}(chR_2,chR_3)\delta_{\alpha;j1}(b_2;R_1,R_2) - \delta^{(\mu)}_{\nu_3^*;12}(chR_2,chR_3)\delta_{\alpha;j2}(b_2;R_1,R_2).$$

Алгебраїчна система (31) має ненульові розв'язки тоді й тільки тоді, коли визначник системи рівний нулю:

$$\begin{gathered} \delta^{(\mu)}_{\alpha}(\beta) \equiv a_{\alpha;1}(\beta)\delta^{(\mu)}_{\nu_3^*;22}(chR_2,chR_3) - a_{\alpha;2}(\beta)\delta^{(\mu)}_{\nu_3^*;12}(chR_2,chR_3) = \\ = b^{(\mu)}_{\alpha;2}(\beta)\delta_{11}(b_1R_0,b_1R_1) - b^{(\mu)}_{\alpha;1}(\beta)\delta_{21}(b_1R_0,b_1R_1) = 0 \end{gathered} \tag{32}$$

Ми одержали трансцендентне рівняння для обчислення власних чисел β_n ГДО $M^{(\mu)}_{\alpha}$, визначеного рівністю (25).

Підставимо в систему (31) $\beta=\beta_n$ $(b_j(\beta_n)\equiv b_{jn})$ й відкинемо останнє рівняння внаслідок лінійної залежності.

Покладемо $A_1 = A_0 v^{02}_{11}(b_{1n}R_0)$, $B_1 = -A_0 v^{01}_{11}(b_{1n}R_0)$, де $A_0\neq 0$ підлягає визначенню. Перше рівняння системи переходить в тотожність. Для визначення A_2, B_2 одержуємо алгебраїчну систему:

$$Y^{11}_{\alpha;j2}(b_{2n},R_1)A_2 + Y^{12}_{\alpha;j2}(b_{2n},R_1)B_2 = -A_0\delta_{j1}(b_{1n}R_0,b_{1n}R_1),\ j=1,2 \tag{33}$$

Визначник алгебраїчної системи (33) обчислюється безпосередньо:

$$q_\alpha(\beta_n) \equiv Y^{11}_{\alpha;12}(b_{2n},R_1)Y^{12}_{\alpha;22}(b_{2n},R_1) - Y^{11}_{\alpha;22}(b_{2n},R_1)Y^{12}_{\alpha;12}(b_{2n},R_1) = c_{21}b_{2n}R_1^{-(2\alpha+1)} \neq 0$$

Алгебраїчна система (33) має єдиний розв'язок [4]:

$$A_2 = \frac{A_0}{q_\alpha(\beta_n)}\Big[\delta_{21}(b_{1n}R_0,b_{1n}R_1)Y^{12}_{\alpha;12}(b_{2n},R_1) - \delta_{11}(b_{1n}R_0,b_{1n}R_1)Y^{12}_{\alpha;22}(b_{2n},R_1)\Big], \tag{34}$$

$$B_2=\frac{A_0}{q_\alpha(\beta_n)}\Big[\delta_{11}(b_{1n}R_0,b_{1n}R_1)Y^{11}_{\alpha;22}(b_{2n},R_1)-\delta_{21}(b_{1n}R_0,b_{1n}R_1)Y^{11}_{\alpha;12}(b_{2n},R_1)\Big].$$

При відомих A_2, B_2 розглянемо алгебраїчну систему стосовно A_3, B_3:

$$Y^{(\mu),21}_{\nu^*_{3n};j2}(chR_2)A_3+Y^{(\mu),22}_{\nu^*_{3n};j2}(chR_2)B_3=A_0[q_\alpha(\beta_n)]^{-1}a_{\alpha;j}(\beta_n);\ j=1,2 \tag{35}$$

Визначник алгебраїчної системи (35) обчислюється безпочередньо:

$$Y^{(\mu),21}_{\nu^*_{3n};12}(chR_2)Y^{(\mu),22}_{\nu^*_{3n};22}(chR_2)-Y^{(\mu),21}_{\nu^*_{3n};22}(chR_2)Y^{(\mu),22}_{\nu^*_{3n};12}(chR_2)=\frac{c_{22}}{s_{(\mu)}(b_{3n})shR_2}\equiv q_{(\mu)}(\beta_n)\neq 0$$

Алгебраїчна система (35) має единий розв'язок [4]:

$$A_0=q_\alpha(\beta_n)q_{(\mu)}(\beta_n);\ \nu^*_{3n}=-1/2+ib_{3n};\ A_3=-\omega^{(\mu)}_{\alpha;2}(\beta_n),\ B_3=\omega^{(\mu)}_{\alpha;1}(\beta_n), \tag{36}$$

$$\omega^{(\mu)}_{\alpha;j}(\beta_n)=a_{\alpha;2}(\beta_n)Y^{(\mu),2j}_{\nu^*_{3n};12}(chR_2)-a_{\alpha;1}(\beta_n)Y^{(\mu),2j}_{\nu^*_{3n};22}(chR_2),\ j=1,2.$$

Підставимо в рівності (30) визначені формулами (34), (36) величини A_j, B_j ($j=\overline{1,3}$). Одержимо функції:

$$V^{(\mu)}_{\alpha;1}(r,\beta_n)=q_\alpha(\beta_n)q_{(\mu)}(\beta_n)\Big[v^{02}_{11}(b_{1n}R_0)\cos(b_{1n}r)-v^{01}_{11}(b_{1n}R_0)\sin(b_{1n}r)\Big],$$

$$\begin{aligned}V^{(\mu)}_{\alpha;2}(r,\beta_n)=q_{(\mu)}(\beta_n)\Big[&\delta_{21}(b_{1n}R_0,b_{1n}R_1)\Big(Y^{12}_{\alpha;12}(b_{2n},R_1)r^{-\alpha}\cos(b_2\ln r)-\\&-Y^{11}_{\alpha;12}(b_{2n},R_1)r^{-\alpha}\sin(b_2\ln r)\Big)-\\&-\delta_{11}(b_{1n}R_0,b_{1n}R_1)\Big(Y^{12}_{\alpha;22}(b_{2n},R_1)r^{-\alpha}\cos(b_2\ln r)-\\&-Y^{11}_{\alpha;22}(b_{2n},R_1)r^{-\alpha}\sin(b_2\ln r)\Big)\Big],\end{aligned} \tag{37}$$

$$V^{(\mu)}_{\alpha;3}(r,\beta_n)=\omega^{(\mu)}_{\alpha;1}(\beta_n)B^{(\mu)}_{\nu^*_{3n}}(chr)-\omega^{(\mu)}_{\alpha;2}(\beta_n)A^{(\mu)}_{\nu^*_{3n}}(chr);\ \nu^*_{3n}=-1/2+ib_{3n}.$$

Згідно рівності (26) спектральна вектор-функція визначена.

Визначимо числа

$$\sigma_1=\frac{c_{11}c_{12}}{c_{21}c_{22}}\frac{R_1^{2\alpha+1}}{R_2^{2\alpha+1}}shR_2,\quad \sigma_2=\frac{c_{12}}{c_{22}}\frac{shR_2}{R_2^{2\alpha+1}},\quad \sigma_3=1,$$

вагову функцію

$$\sigma(r)=\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)\sigma_1+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\sigma_2r^{2\alpha-1}+\theta(r-R_2)\theta(R_3-r)\sigma_3shr \tag{38}$$

та скалярний добуток

$$\Big(u(r),v(r)\Big)=\int\limits_{R_0}^{R_3}u(r)v(r)\sigma(r)dr\equiv\int\limits_{R_0}^{R_1}u_1(r)v_1(r)\sigma_1dr+$$

$$+\int\limits_{R_1}^{R_2} u_2(r)v_2(r)\sigma_2 r^{2\alpha-1}dr+\int\limits_{R_2}^{R_3} u_3(r)v_3(r)\sigma_3 shr dr,$$

де $u(r)\in G$, $v(r)\in G$, G - область задання ГДО $M_\alpha^{(\mu)}$.

Скалярний добуток дозволяє визначити квадрат норми функції $V_\alpha^{(\mu)}(r,\beta_n)$:

$$\left|\left|V_\alpha^{(\mu)}(r,\beta_n)\right|\right|^2=\left(V_\alpha^{(\mu)}(r,\beta_n),V_\alpha^{(\mu)}(r,\beta_n)\right) \tag{39}$$

Згідно з роботою [6] визначимо пряме $H_\alpha^{(\mu)}$ та обернене $H_\alpha^{-(\mu)}$ скінчене гібридне інтегральне перетворення, породжене на множині I_2 ГДО $M_\alpha^{(\mu)}$:

$$H_\alpha^{(\mu)}[g(r)]=\int\limits_{R_0}^{R_3} g(r)V_\alpha^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma(r)dr\equiv\tilde{g}_n \tag{40}$$

$$H_\alpha^{-(\mu)}[\tilde{g}_n]=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{g}_n V_\alpha^{(\mu)}(r,\beta_n)\left(||V_\alpha^{(\mu)}(r,\beta_n)||^2\right)^{-1}\equiv g(r) \tag{41}$$

Якщо перейти до ортонормованої системи власних функцій

$$v_\alpha^{(\mu)}(r,\beta_n)=V_\alpha^{(\mu)}(r,\beta_n)\left(||V_\alpha^{(\mu)}(r,\beta_n)||\right)^{-1}$$

то правила (40), (41) набудуть вигляду:

$$H_\alpha^{(\mu)}[g(r)]=\int\limits_{R_0}^{R_3} g(r)v_\alpha^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma(r)dr\equiv\tilde{g}_n \tag{42}$$

$$H_\alpha^{-(\mu)}[\tilde{g}_n]=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{g}_n v_\alpha^{(\mu)}(r,\beta_n)\equiv g(r)\in G \tag{43}$$

Правила (42), (43) та основна тотожність

$$H_\alpha^{(\mu)}\left[M_\alpha^{(\mu)}[g(r)]\right]=-\beta_n^2\tilde{g}_n-\sum_{i=1}^{3}k_i^2\tilde{g}_{in}+(-\alpha_{11}^0)^{-1}v_{\alpha;1}^{(\mu)}(R_0,\beta_n)\sigma_1 g_0+$$

$$+(\alpha_{22}^3)^{-1}v_{\alpha;3}^{(\mu)}(R_3,\beta_n)shR_3\cdot g_R+\sum_{k=1}^{2}d_k\left[Z_{\alpha;12}^{(\mu),k}(\beta_n)\omega_{2k}-Z_{\alpha;22}^{(\mu),k}(\beta_n)\omega_{1k}\right] \tag{44}$$

складають ефективний математичний апарат для розв'язання широкого класу крайових задач.

У рівності (44) прийняті позначення:

$$d_1=\sigma_1:c_{11},\; d_2=\sigma_2 R_2^{2\alpha+1}\cdot c_{12}^{-1},\; \tilde{g}_{1n}=\int\limits_{R_0}^{R_1} g_1(r)v_{\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_1 dr,$$

$$\tilde{g}_{2n} = \int\limits_{R_1}^{R_2} g_2(r) v_{\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_2 r^{2\alpha-1}dr, \quad \tilde{g}_{3n} = \int\limits_{R_2}^{R_3} g_3(r) v_{\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_3 shr dr,$$

$$Z_{\alpha;i2}^{(\mu),k}(\beta_n) = \left(\alpha_{i2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{i2}^k\right) v_{\alpha;k+1}^{(\mu)}(r,\beta_n)\Big|_{r=R_k}; \; i,k = 1,2.$$

<u>Розв'язання</u> крайової задачі (1)-(3). Запишемо систему (1) в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{d^2}{dr^2} - q_1^2\right) u_1(r) \\ \left(B_\alpha^* - q_2^2\right) u_2(r) \\ \left(\Lambda_{(\mu)} - q_3^2\right) u_3(r) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} g_1(r) \\ g_2(r) \\ g_3(r) \end{bmatrix} \tag{45}$$

Інтегральний оператор $H_\alpha^{(\mu)}$ згідно правила (42) зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка:

$$H_\alpha^{(\mu)}[\cdots] = \Big[\int\limits_{R_0}^{R_1} \cdots v_{\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_1 dr \quad \int\limits_{R_1}^{R_2} \cdots v_{\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_2 r^{2\alpha-1} dr$$

$$\int\limits_{R_2}^{R_3} \cdots v_{\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_3 shr dr\Big] \tag{46}$$

Застосуємо операторну матрицю-рядок (46) за правилом множення матриць до системи (45). Внаслідок основної тотожності (44) одержуємо алгебраїчне рівняння:

$$\left(\beta_n^2 + \gamma^2\right)\tilde{u}_n = \tilde{g}_n + (-\alpha_{11}^0)^{-1} v_{\alpha;1}^{(\mu)}(R_0,\beta_n)\sigma_1 g_0 + (\alpha_{22}^3)^{-1} v_{\alpha;3}^{(\mu)}(R_3,\beta_n) shR_3 g_R +$$

$$+\sum_{k=1}^{2} d_k\Big[Z_{\alpha;12}^{(\mu),k}(\beta_n)\omega_{2k} - Z_{\alpha;22}^{(\mu),k}(\beta_n)\omega_{1k}\Big], \; \gamma^2 = \max\{q_1^2; q_2^2; q_3^2\}$$

Звідси знаходимо, що функція

$$\tilde{u}_n = \frac{\tilde{g}_n}{\beta_n^2 + \gamma^2} + \frac{v_{\alpha;1}^{(\mu)}(R_0,\beta_n)}{(-\alpha_{11}^0)(\beta_n^2+\gamma^2)}\sigma_1 g_0 + \frac{v_{\alpha;3}^{(\mu)}(R_3,\beta_n)}{\alpha_{22}^3(\beta_n^2+\gamma^2)} shR_3 \cdot g_R +$$

$$+\sum_{k=1}^{2} d_k\Big[Z_{\alpha;12}^{(\mu),k}(\beta_n)(\beta_n^2+\gamma^2)^{-1}\omega_{2k} - Z_{\alpha;22}^{(\mu),k}(\beta_n)(\beta_n^2+\gamma^2)^{-1}\omega_{1k}\Big] \tag{47}$$

<u>Зауваження.</u> Якщо $\gamma^2 = q_1^2 > 0$, то $k_1^2 = 0$, $k_2^2 = q_1^2 - q_2^2 \geq 0$, $k_3^2 = q_1^2 - q_3^2 \geq 0$; якщо $\gamma^2 = q_2^2 > 0$, то $k_1^2 = q_2^2 - q_1^2 \geq 0$, $k_2^2 = 0$, $k_3^2 = q_2^2 - q_3^2 \geq 0$; якщо $\gamma^2 = q_3^2 > 0$, то $k_1^2 = q_3^2 - q_1^2 \geq 0$, $k_2^2 = q_3^2 - q_2^2 \geq 0$, $k_3^2 = 0$.

Оператор $H_\alpha^{-(\mu)}$ згідно правила (43) як обернений до (46) зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця:

$$H_\alpha^{-(\mu)}[\cdots] = \begin{bmatrix} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \cdots v_{\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta_n) \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \cdots v_{\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta_n) \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \cdots v_{\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta_n) \end{bmatrix} \tag{48}$$

Застосуємо операторну матрицю-стовпець (48) за правилом множення матриць до матриці-елемента $[\tilde{u}_n]$, де функція $\tilde{u}_n$ визначена за правилом (47). У результаті елементарних перетворень маємо єдиний розв'язок крайової задачі (1)-(3):

$$u_j(r) = \sum_{k=1}^{2} d_k \Big[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n)}{\beta_n^2+\gamma^2} Z_{\alpha;12}^{(\mu),k}(\beta_n)\omega_{2k} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n)}{\beta_n^2+\gamma^2} Z_{\alpha;22}^{(\mu),k}(\beta_n)\omega_{1k}\Big] +$$

$$+\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n)}{(-\alpha_{11}^0)(\beta_n^2+\gamma^2)} v_{\alpha;1}^{(\mu)}(R_0,\beta_n)\right)\sigma_1 g_0 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n)}{\alpha_{22}^3(\beta_n^2+\gamma^2)} v_{\alpha;3}^{(\mu)}(R_3,\beta_n)\right) shR_3 g_R +$$

$$+\int_{R_0}^{R_1}\Big[\sum_{n=1}^{\infty} v_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n) v_{\alpha;1}^{(\mu)}(\rho,\beta_n)(\beta_n^2+\gamma^2)^{-1}\Big] g_1(\rho)\sigma_1 d\rho + \int_{R_1}^{R_2}\Big[\sum_{n=1}^{\infty} v_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n) \times \tag{49}$$

$$\times \frac{v_{\alpha;2}^{(\mu)}(\rho,\beta_n)}{\beta_n^2+\gamma^2}\Big] g_2(\rho)\sigma_2\rho^{2\alpha-1} d\rho + \int_{R_2}^{R_3}\Big[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n)}{\beta_n^2+\gamma^2} v_{\alpha;3}^{(\mu)}(\rho,\beta_n)\Big] g_3(\rho)\sigma_3 sh\rho d\rho, \quad j=\overline{1,3}$$

Порівнюючи розв'язки (24) та (49) в силу теореми єдиності, отримуємо такі формули підсумовування функціональних рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n) Z_{\alpha;12}^{(\mu),k}(\beta_n)(\beta_n^2+\gamma^2)^{-1} = d_k^{-1} R_{\alpha;2k}^{(\mu),j}(r,q);\ k=1,2, j=\overline{1,3} \tag{50}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n) Z_{\alpha;22}^{(\mu),k}(\beta_n)(\beta_n^2+\gamma^2)^{-1} = -d_k^{-1} R_{\alpha;1k}^{(\mu),j}(r,q);\ k=1,2, j=\overline{1,3} \tag{51}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_{\alpha;1}^{(\mu)}(R_0,\beta_n)}{(-\alpha_{11}^0)(\beta_n^2+\gamma^2)} v_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n) = \sigma_1^{-1} W_{\alpha;1j}^{(\mu)}(r,q);\ j=\overline{1,3} \tag{52}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_{\alpha;3}^{(\mu)}(R_3,\beta_n)}{\alpha_{22}^3(\beta_n^2+\gamma^2)} v_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n) = (shR_3)^{-1} W_{\alpha;3j}^{(\mu)}(r,q);\ j=\overline{1,3} \tag{53}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n) v_{\alpha;k}^{(\mu)}(\rho,\beta_n)(\beta_n^2+\gamma^2)^{-1} = \sigma_k^{-1}\mathcal{H}_{\alpha;jk}^{(\mu)}(r,\rho,q);\; j,k=\overline{1,3} \qquad (54)$$

Функції Гріна $W_{\alpha;1j}^{(\mu)}(r,q)$ визначені формулами (20), функції Гріна $W_{\alpha;3j}^{(\mu)}(r,q)$ визначені формулами (21), функції Гріна $R_{\alpha;mk}^{(\mu),j}(r,q)$ умов спряження визначені формулами (22), функції впливу $\mathcal{H}_{\alpha;jk}^{(\mu)}(r,\rho,q)$ визначені формулами (23).

Основна теорема. Якщо вектор-функція $f(r) = \{g_1''(r); B_\alpha^*[g_2(r)]; \Lambda_{(\mu)}[g_3(r)]\}$ неперервна на множині I_2, функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови (2) й умови спряження (3) та виконується умова (19) однозначної розв'язності крайової задачі (1)-(3), то мають місце формули (50)-(54) підсумовування поліпараметричних функціональних рядів за власними елементами гібридного диференціального оператора $M_\alpha^{(\mu)}$, визначеного рівністю (25).

1. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. - М.: Физматгиз. 1959. - 468с.

2. Конет І.М., Ленюк М.П. Інтегральні перетворення типу Мелера-Фока. - Чернівці: Прут, 2002. - 248с.

3. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. - М.: Наука, 1965. - 328с.

4. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. - М.: Наука, 1971. - 432с.

5. Ленюк М.П., Шинкарик М.І. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1. - Тернопіль: Економ. думка, 2004. - 368с.

6. Ленюк М.П., Шинкарик М.І. Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені класичними диференціальними операторами математичної фізики. Том 2. - Тернопіль: Економ. думка, 2012. - С. 308.