УДК 624.13

В.В. КОВТУН, О.А. ДОРОФЄЄВ
Хмельницький національний університет

ГРАНИЧНИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН ДИСКРЕТНОГО СЕРЕДОВИЩА, ЩО ПРАЦЮЄ В УМОВАХ ПЛОСКОЇ ДЕФОРМАЦІЇ

Розглянуто визначальні співвідношення для описання граничного напруженого стану в точці дискретного середовища, що працює в умовах плоскої деформації.
Ключові слова: дискретне середовище; внутрішнє кулонівське тертя; дилатансія.

V.V. KOVTUN, O.A. DOROFEYEV
Khmelnytskiy National University

BOUNDARY CONDITION OF THE DISCRETE MEDIUM, OPERATING UNDER PLANE STRAIN

Formulas to describe boundary condition at a point of the discrete medium that operates under plane strain are considered in the article. The formulas of plasticity theory can not be used to describe the limited state of the discrete medium through fundamental differences in laws of plastic deformation and digital materials. Most significantly the limited state of discrete medium for the conditions of flat deformation is described by the criterion of Mohr - Coulomb. It reflects the impact of internal Coulomb friction on the deformation process of discrete medium in the marginal stage. The obtained formulas are significantly different from those dependences of the classical theory of plasticity and can be used to create the rheological model of discrete medium.
Keywords: discrete environment, internal Coulomb friction; dilatation.

Вступ

В інженерній механіці найчастіше розглядають задачі, коли дискретне або сипке середовище працює в умовах плоско-деформованого напруженого стану – в умовах плоскої деформації. В таких умовах знаходиться дискретне середовище, що контактує з протяжними інженерними об’єктами: підпірними стінами, стрічковими фундаментами, дамбами, тунелями, трубопроводами та ін.

Важливим класом задач інженерної механіки в цьому випадку є задачі щодо знаходження граничних навантажень на розрахункову область дискретного середовища. Розв’язання цих задач потребує оцінки граничного напруженого стану в кожній точці середовища за відповідним критерієм.

Постановка задачі досліджень

Метою описаних у статті досліджень є одержання співвідношень, необхідних для описання граничного напруженого стану в точці дискретного середовища, що працює в умовах плоскої деформації.

Плоска деформація характеризується тим, що уздовж протяжної осі z залишаються незмінними обриси розрахункової області, характер розподілення зовнішнього навантаження, силові та кінематичні умови на контурі області. В цьому випадку поздовжні переміщення u_z, а також деформації $\varepsilon_z = du_z / dt$ дорівнюють нулю, що суттєво спрощує описання напружено-деформованого стану.

Продемонструємо це на прикладі плоскої задачі теорії пластичності, апарат якої вважається найбільш раціональним щодо використання в механіці дискретних матеріалів.

Передусім, легко впевнитись, що напруження σ_z для умов плоскої деформації не залежать від поздовжньої координати z. З узагальненого закону Гука за умови $\varepsilon_z = 0$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] = 0, \qquad \sigma_z = \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right). \tag{1}$$

Якщо деформування пластичного тіла відбувається без зміни об’єму (коефіцієнт Пуасона $\nu = 0{,}5$), то

$$\sigma_z = 0{,}5\left(\sigma_x + \sigma_y\right). \tag{2}$$

Отже, граничний напружений стан середовища можна представити тільки через напруження в площині деформування x, y і використовувати відомі співвідношення плоскої задачі напруженого стану з урахуванням умов переходу середовища в пластичний або граничний стан.

Перехід плоскої області у граничний стан в теорії пластичності найчастіше оцінюють критерієм Сен-Венана, який можна записати через головні напруження $\sigma_{\max}$, $\sigma_{\min}$ в площині деформування x, y

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \tau_{т}, \tag{3}$$

або через напруження σ_x, σ_y, $\tau_{xy} = -\tau_{yx}$ по довільним, але ортогональним, площинкам з нормалями x, y –

$$\tau_{\max} = \left[\frac{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2}{2} + \tau_{xy}^2\right]^{1/2} = 0{,}5\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \tau_{т}, \tag{4}$$

де $\tau_т$ – границя текучості при чистому зсуві.

Як видно з наведених виразів (3), (4), перехід пластичного матеріалу у граничний стан визначається тільки величиною максимальних напружень $\tau_{\max}$ і не залежить від нормальних напружень $\sigma = \sigma_0 = 0{,}5(\sigma_{\max} + \sigma_{\min})$ на площинках, де діють граничні дотичні напруження $\tau_{\max} = \tau_т$. Отже, існує безліч граничних напружених станів, які відрізняються тільки величиною σ_0, і графічно можуть бути представлені сімейством граничних кругів Мора, що мають спільні обвідні, паралельні осі σ, які обмежують зону пластичного деформування (рис. 1).

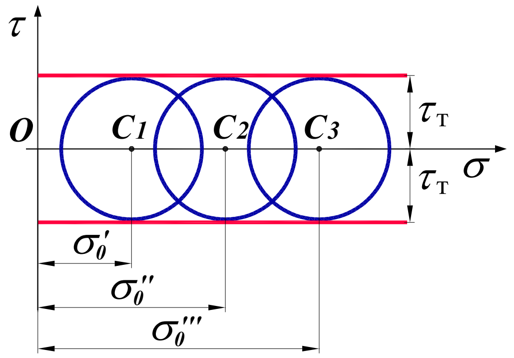

Рис. 1. Сімейство граничних кругів Мора

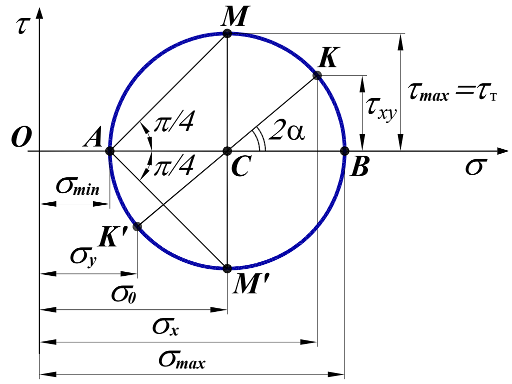

Рис. 2. Граничний круг Мора за умовою Сен-Венана

Кожний з граничних кругів повністю описує напружений стан в одній точці пластичної області через інваріанти σ_0 і $\tau_{\max} = \tau_т$.

На рисунку 2 зображений один з граничних кругів Мора. Абсциса центра C круга дорівнює середньому нормальному напруженню $\sigma_0 = 0{,}5(\sigma_x + \sigma_y)$, радіус круга – максимальному дотичному напруженню $\tau_{\max} = \tau_т$. Координати точок K і K' відповідають напруженням, що виникають по площинках, нахиленим до головних на кут α. Точки A і B відповідають головним площинкам з напруженнями $\sigma_{\min}$, $\sigma_{\max}$, а точки M і M' з координатами $\sigma_0 = 0{,}5(\sigma_x + \sigma_y)$, $\tau = \tau_{\max} = 0{,}5(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = \tau_т$ – площинкам, на яких виконується умова Сен-Венана. Ці площинки нахилені до головних під кутом 45° і в моделі жорстко-пластичного тіла асоціюються з площинками ковзання. Сукупність площинок ковзання утворює сітку ортогональних ліній ковзання (сітку характеристик в полі напружень). В кожній точці цих ліній виникають нормальні σ_0 і дотичні $\tau_т$ напруження. Отже, сітка ліній ковзання дозволяє описати граничний стан плоскої області.

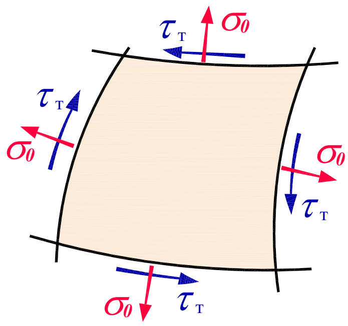

Рис. 3.
Граничний стан елемента плоскої області

Розглянемо елемент плоскої області, обмежений суміжними лініями ковзання (рис. 3). На його гранях діють напруження $\sigma_0 = 0{,}5(\sigma_{\max} + \sigma_{\min})$ і $\tau_{\max} = 0{,}5(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = \tau_т$, які є інваріантами плоского напруженого стану. Цей граничний напружений стан можна уявити як суму двох простих: всебічного рівномірного розтягу напруженнями σ_0 та чистого зсуву напруженнями $\tau_т$. За принципом суперпозиції одержуємо вирази для головних напружень

$$\sigma_{\max} = \sigma_0 + \tau_т\,;\ \sigma_{\min} = \sigma_0 - \tau_т\,, \tag{5}$$

а також для напружень по довільним ортогональним площинкам, нахиленим до головних під кутом α

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_0 + \tau_т \cos 2\alpha; \\ \sigma_y &= \sigma_0 - \tau_т \cos 2\alpha; \\ \tau_{xy} &= -\tau_{yx} = \tau_т \sin 2\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Якщо орієнтацію площинок з нормалями x, y визначати відносно площинок ковзання, у виразах (6) достатньо замінити кут α на $\beta = \alpha + 45^\circ$. Співвідношення (6) набувають вигляду

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_0 + \tau_т \sin 2\beta; \\ \sigma_y &= \sigma_0 - \tau_т \sin 2\beta; \\ \tau_{xy} &= -\tau_{yx} = -\tau_т \cos 2\beta. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Залежності (7) дозволяють одержати систему диференціальних рівнянь, що описують характеристики поля граничних напружень (лінії ковзання) як функцій σ_0, β.

Наведені співвідношення теорії пластичності не можуть бути безпосередньо використані для описання граничного стану дискретного середовища через принципові відмінності законів деформування пластичних і дискретних матеріалів [1]. Опір деформуванню дискретних матеріалів утворюють сили сухого тертя, які можуть виникати тільки в зоні стискуючих напружень. Тому критерій переходу у граничний стан дискретних матеріалів, на відміну від пластичних, повинен в першу чергу відображати вплив внутрішнього кулонівського тертя. Серед таких критеріїв, як показали спеціальні дослідження [2], найбільш достовірно граничний стан дискретного середовища для умов плоскої деформації описується критерієм Мора – Кулона.

За цим критерієм настання граничного стану дискретного середовища оцінюється не величиною максимальних дотичних напружень $\tau_{\max} = \tau_{т}$, а величиною максимального відношення дотичних і нормальних стискуючих напружень. Критерій Мора – Кулона можна записати через введені попередньо інваріанти плоского напруженого стану таким виразом

$$\frac{\tau_{\max}}{\sigma_0} = \sin\varphi = const\,, \tag{8}$$

де φ – кут внутрішнього тертя; σ_0 – середнє стискуюче напруження.

Отже, граничний стан дискретного середовища оцінюється двома параметрами: σ_0 і φ, та графічно представляється сімейством граничних кругів Мора, які мають прямолінійну обвідну, нахилену до осі σ під кутом φ (рис. 4).

Обвідна обмежує область дискретного матеріалу, у якій виникає граничний стан, а кожний з кругів описує граничний напружений стан в точці цієї області. Один з кругів, що відповідають критерію Мора – Кулона, показаний на рисунку 5. Параметри круга: радіус $R = 0{,}5(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = 0{,}5(\sigma_1 - \sigma_2)$; абсциса центра *C* – $\sigma_0 = 0{,}5(\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) = 0{,}5(\sigma_1 + \sigma_2)$. Характерною ознакою круга є те, що дотична *OM*, проведена з початку координат, нахилена до осі σ на кут φ. Точка дотику $M(\sigma_M, \tau_M)$ відповідає площинці з максимальним відношенням напружень $\dfrac{\tau_M}{\sigma_M} = \mathrm{tg}\varphi$, або площинці з максимальним відхиленням повного напруження p_M від нормалі. Точки *A* і *B* відповідають головним площинкам з напруженнями $\sigma_{\min} = \sigma_2$ і $\sigma_{\max} = \sigma_1$, а всі інші точки круга – довільним площинкам. Круг Мора (рис. 5) графічно описує граничний напружений стан в точці області за критерієм Мора – Кулона. Сам критерій (8) можна записати через параметри R і σ_0 круга

$$\frac{R}{\sigma_0} = \sin\varphi\,; \tag{9}$$

через головні стискуючі напруження σ_1, σ_2

$$\frac{R}{\sigma_0} = \frac{0{,}5(\sigma_1 - \sigma_2)}{0{,}5(\sigma_1 + \sigma_2)} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} = \sin\varphi\,, \tag{10}$$

або через напруження τ_M, σ_M по площинкам з максимальним відношенням напружень

$$\frac{\tau_M}{\sigma_M} = \frac{p_M \sin\varphi}{p_M \cos\varphi} = \mathrm{tg}\varphi\,. \tag{11}$$

Останній вираз можна трактувати як запис закону Амонтона – Кулона для елемента дискретного середовища – опір зсуву dF пропорційний нормальному стискуючому зусиллю dN. Помножимо напруження τ_M, σ_M на площу dA грані елемента та одержимо

$$\frac{\tau_M \cdot dA}{\sigma_M \cdot dA} = \frac{dF}{dN} = \mathrm{tg}\varphi, \qquad \text{або} \qquad dF = dN \cdot \mathrm{tg}\varphi\,. \tag{12}$$

Отже, критерій Мора – Кулона відображає вплив внутрішнього кулонівського тертя на процес деформування дискретного середовища у граничній стадії.

Враховуючи, що настання граничного стану дискретного середовища за критерієм Мора – Кулона пов'язується з величиною відношень напружень, іноді зручно представити його через відносний інваріант $\xi = \sigma_1/\sigma_2$

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} = \frac{\xi - 1}{\xi + 1} = \sin\varphi\,. \tag{13}$$

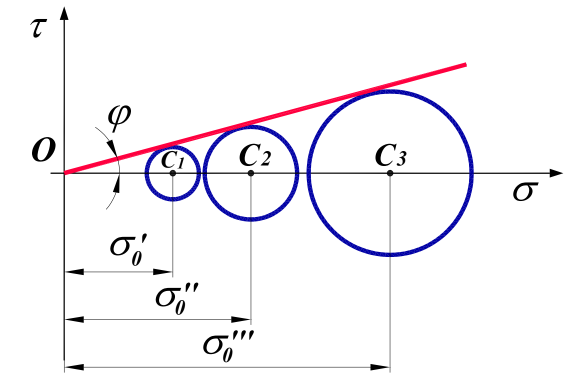

Рис. 4. Сімейство кругів Мора, що описують граничний стан області дискретного середовища

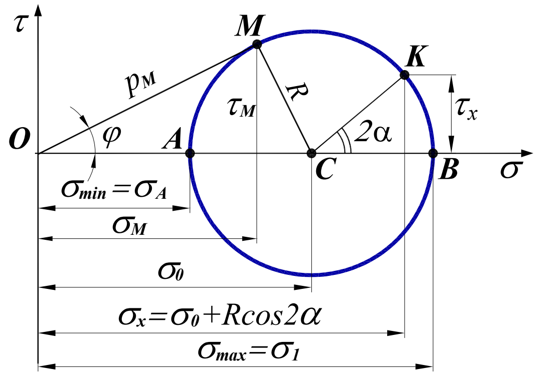

Рис. 5.Граничний круг напружень за умовою Мора – Кулона

Наведені вирази (8)...(13) описують умову переходу дискретного середовища у граничний стан через спеціально введені, зручні для представлення напруженого стану цього специфічного середовища інваріанти.

Для повного описання плоского граничного стану достатньо разом з цими виразами використати відомі результати графічного чи аналітичного розв’язання прямої та оберненої плоскої задачі теорії напруженого стану, або спеціальні співвідношення по спряжених площинках [3].

Наприклад, з граничного круга Мора (рис. 5) безпосередньо одержуємо вирази для головних напружень σ_1, σ_2 через параметри σ_0, φ

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_0 + R = \sigma_0 + \sigma_0 \sin\varphi = \sigma_0(1+\sin\varphi);\\ \sigma_2 &= \sigma_0 - R = \sigma_0 - \sigma_0 \sin\varphi = \sigma_0(1-\sin\varphi),\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

або для напружень, що виникають по довільній площинці з нормаллю *r*, повернутою відносно головної осі *1* на кут α. Цим напруженням на рис. 5 відповідають координати точки *K*

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma_0 + R\cos 2\alpha = \sigma_0 + \sigma_0 \sin\varphi\cdot\cos 2\alpha = \sigma_0(1+\sin\varphi\cdot\cos 2\alpha);\\ \tau_r &= R\sin 2\alpha = \sigma_0 \sin\varphi\cdot\sin 2\alpha.\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Для описання граничного стану дискретного середовища важливим є визначення напружень τ_M, σ_M по площинкам з максимальним відхиленням повного напруження p_M від нормалі. З круга Мора одержуємо

$$\begin{aligned}\sigma_M &= \sigma_0 - R\sin\varphi = \sigma_0 - \sigma_0\sin^2\varphi = \sigma_0\left(1-\sin^2\varphi\right) = \sigma_0\cos^2\varphi;\\ \tau_M &= R\cos\varphi = \sigma_0\sin\varphi\cos\varphi = 0{,}5\sigma_0\sin 2\varphi.\end{aligned} \tag{16}$$

Легко впевнитись, що одержані вирази відповідають закону Амонтона – Кулона (11), (12) – закону внутрішнього сухого тертя, який є визначальним для описання напружено-деформованого стану дискретного середовища.

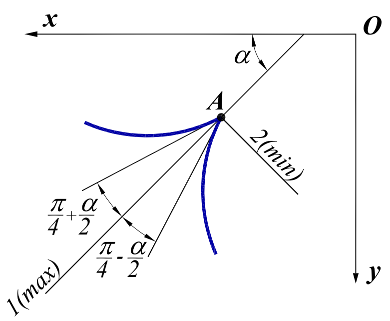

Рис. 6. Орієнтація ліній ковзання

Площинки з максимальним відношенням напружень $\dfrac{\tau_M}{\sigma_M}$ нахилені до головних під кутами $\dfrac{\pi}{4} \pm \dfrac{\varphi}{2}$ і асоціюються з площинками ковзання в точці дискретного середовища. Сукупність площинок ковзання в площині деформування утворюють сітку неортогональних ліній ковзання, які перетинаються під кутами $\dfrac{\pi}{2} \pm \varphi$. В кожній точці цих ліній виникають напруження σ_M, τ_M. Це дозволяє, використавши співвідношення (15), (16), одержати рівняння ліній ковзання – ліній характеристик поля граничних напружень.

Розглянемо точку *A* перетину двох ліній ковзання в декартовій системі координат *x*, *y* (рис. 6). Головна вісь *1*, що відповідає головному напруженню $\sigma_{\max}$ утворює з віссю *x* кут α, а дотичні до ліній ковзання – кути $\beta = \alpha \pm \left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\varphi}{2}\right)$.

Рівняння ліній ковзання в системі координат *xOy* отримуються підстановкою у вирази (15) замість α кута β. Система цих диференціальних рівнянь детально досліджена В.В. Соколовським [4] і використана ним для розв’язання інженерних задач статики сипкого середовища.

Висновки

Наведені в статті співвідношення описують граничний напружений стан дискретного середовища, що працює в умовах плоскої деформації. Співвідношення суттєво відрізняються від аналогічних залежностей класичної теорії пластичності і можуть бути використані для створення реологічної моделі дискретного середовища.

Література

1. Ковтун В.В. Визначальні співвідношення механіки дискретного середовища / В.В. Ковтун // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2008. – № 5. – С. 69–76.
2. Ковтун В.В. Исследование прочности сыпучих материалов в условиях плоской деформации / В.В. Ковтун, Е.В. Багрий, В.Т. Бугаев // Будівельні конструкції. – 2004. – Вып. 61, т. 1. – С. 109–116.
3. Ковтун В.В. Напруження по потенціальних площинках ковзання у сипкому середовищі / В.В. Ковтун // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2010. – № 1. – С. 7–12.
4. Соколовский В.В. Статика сыпучей среды / Соколовский В.В. – М. : Наука, 1960. – 272 с.

References

1. V.V. Kovtun, "Vyznachal'ni spivvidnoshennya mekhaniky dyskretnoho seredovyshcha", Herald of Khmelnytskyi National University. Technical sciences, 2008, Issue 5. S. 69–76.
2. V.V. Kovtun, E.V. Bahryy, V.T. Buhaev, Yssledovanye prochnosty sыpuchykh materyalov v uslovyyakh ploskoy deformatsyy, Budivel'ni konstruktsiyi. 2004. Issue 61. t. 1. S. 109–116.
3. V.V. Kovtun, "Napruzhennya po potentsial'nykh ploshchynkakh kovzannya u sypkomu seredovyshchi", Herald of Khmelnytskyi National University. Technical sciences, 2010. Issue 1. S. 7–12.
4. V.V. Sokolovskyy, Statyka sypuchey sredy, M.: Nauka, 1960. 272 s.

Рецензія/Peer review : 15.8.2015 р. Надрукована/Printed :28.6.2015 р.
Рецензент: