Кузьменко А.Г.
Хмельницкий национальный университет,
г. Хмельницкий, Украина

РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ КОНТАКТНОЙ ТРИБОМЕХАНИКИ

1. Общая структура системы методов расчетно-экспериментальной оценки износа (РЭМОИ) [2]

1.1. В теории систем основной признак системы состоит в том, что система элементов обладает свойствами, которыми не обладает ни один из элементов. Это, в частности, то, что в марксистской философии называли законом перехода количества в качество.

Каждый метод в отдельности решает свою задачу в развитии системы. Разные методы, собранные в систему решают другие задачи принципиально отличные от частных задач, решаемых разными методами.

Главная цель в этой части трибологии состоит в том, чтобы иметь методологию достоверного **прогнозирования износа** узлов трения при использовании системы экспериментов и при использовании подсистемы теоретических методов, как основы расчетно-экспериментальной оценки износа этих узлов трения.

1.2. Система разрабатываемых методов, обеспечивающих достижение цели, условно разделяется на три основных подсистемы, а по последовательности применения на четыре этапа [2].

<u>Этап 1.</u> Разработка **методов решения контактных задач, без учета износа.** Эти методы необходимы для расчетно-экспериментальной оценки условий работы узла трения в начальной стадии его работы: давления, размеров площадки контакта, нормального и касательного перемещения (пути трения).

Знание условий работы необходимо для выполнения последующего этапа – экспериментального изучения закономерностей изнашивания в этих условиях путем проведения испытаний.

<u>Этап 2.</u> Разработка теоретических **основ проведения испытаний на износ с** эффективным **определением параметров моделей изнашивания**. Известные методы испытаний с определением параметров статически неустойчивы и требуют проведения большого количества образцов на протяжении значительного времени. Методы испытаний, разрабатываемые нами направлены на устранение этих недостатков.

Разрабатываемые методы испытаний основаны на методах решения контактных задач, с учетом износа модельных сопряжений.

<u>Этап 3.</u> Разработка **методов решения контактных задач, с учетом износа** для реальных сопряжений в узлах трения. Реализация этих методов является теоретической основой расчетов на износ узлов трения машин. При этом обязательным компонентом расчетов является использование параметров моделей изнашивания, полученных на втором этапе реализации общей методики.

<u>Этап 4.</u> Разработка **методов вероятного определения износа или оценки надежност**и узлов трения. В износе, еще больше чем в усталости, детерминированные расчеты, или расчеты по среднему, носят грубо оценочный характер. Для представления реальной картины поведения узла в эксплуатации обязательными являются оценки вероятности состояний, как частных реализаций общих процессов.

Только **комплексное использование всех этапов** дает возможность достоверно оценить эффективность применения той или иной технологии повышения износостойкости узла трения и машины вцелом.

В соответствии с этой концепцией нами в течение ряда лет ведется разработка прикладных, то есть не обязательно строгих и высокоточных и легко реализуемых на практике методов.

2. Систематизация объектов, задач и методов трибомеханики [9]

2.1. Другим базовым принципом системного анализа является наличие **систематизации** или классификации **объектов, задач и методов** в изучаемой области.

Нами предложена именно такая систематизация применительно к контактной трибомеханике SIS-KTM. Следует подчеркнуть, что контактная трибомеханика по нашему глубокому убеждению является основой общей трибологии. Поэтому предлагаемая систематизация является основной составной частью систематизации объектов, задач и методов в трибологии.

2.2. Признаки систематизации:

1) Основной первой частью SIS-KTM является систематизация **геометрических форм** контактирующих тел. Систематизация сопряжений формируется как сочетания по две разных геометрических форм поверхности.

2) При систематизации **свойств материала** тел и контакта в точке учтены: 1) деформационные свойства материала элемента; 2) степень неоднородности материала поверхности; 3) остаточные напряжения; 4) величина деформаций и перемещений; 5) свойств третьего элемента (третьего тела); 6) свойств

окружающей среды; 7) условия скольжения в точке; 8) условия изнашивания в точке (модель изнашивания).

3) **Силовые нагрузки** систематизированны по следующим признакам: 1) виды нагрузок; 2) скорость приложения нагрузок; 3) цикличность нагружения.

4) **Кинематические условия** взаимодействия контактирующих тел разделяются с учетом: 1) вида движения подвижного элемента; 2) вида закрепления подвижного элемента.

5) **Тепловые условия** контактирования различаются по: 1) граничным условиям тепловой задачи; 2) условиям теплообразования и распределения тепла в контакте.

6) Важной частью является систематизация по форме **постановки краевых контактных задач:** 1) тип, размерность задачи; 2) вид системы координат; 3) вид дифференциальных уравнений равновесия; 4) вид условий сплошности; 5) вид физических уравнений основных элементов; 6) вид физических уравнений третьего тела; 7) постановка задачи с помощью функций Грина; 8) вариационная постановка контактных задач; 9) форма постановки задачи: прямая, обратная, оптимизационная; 10) форма разрешающих уравнений.

7) **Методы решения контактных задач** с определением давлений и размеров площадки контакта (рассматриваются в этой главе подробно).

8) **Методы решения краевых задач** с определением напряженного состояния в зоне контакта.

9) **Численные, экспериментальные и приближенные методы** определения приближенного состояния.

10) **Конечные результаты и форма их представления**: 1) искомые параметры по площадке контакта: а) механические параметры; b) термодинамические и энергетические параметры; c) трибологические параметры; 2) искомые параметры в зоне контакта (на глубине); 3) форма представления результатов.

2.3. Предложенная систематизация объектов, задач и методов контактной трибомеханики необходима для развития этой отрасли знаний в следующих направлениях.

1) Первое главное направление – это **системный поиск новых нерешенных задач**. Поиск осуществляется путем перебора разных сочетаний признаков задачи: геометрических, силовых, кинематических и т.д. В частности разные задачи могут решаться разными методами. Количество нерешенных задач, определяемых этим методом перебора на несколько порядков превышает количество известных решенных задач.

2) Другим базовым направлением использования систематизации является **разработка экспертных систем**, предназначенных для оценки уровня и новизны решаемых задач, то есть распознающих смысл задач.

Наличие достаточно полной систематизации в любой заданной области науки является необходимым начальным условием для создания информационных поисков систем. Такие системы должны уметь распознавать научные тексты и их принципиальную новизну. Расширенная систематизация позволяет сформировать достаточно полный образ публикуемой задачи. Процедура распознавания образа задачи выполняется путем сравнения с образами известных задач.

Из приведенных рассуждений следует, что создавать автоматизированные поисковые системы, распознающие смысл и новизну задач, можно только имея расширенные систематизации в конкретной области. Это могут делать только глубокие профессионалы в этой области.

Иными словами просто набор программистов и лингвистов не могут создавать информационную экспертную систему с распознаванием смысла. Нужен еще высокий профессионал в изучаемой области.

3. Метод Герца [9]

3.1. Решение Г.Герца контактной задачи для тел сферической формы, выполненное 130 лет назад, является отправной точкой в развитии методов контактной механики, источник, из которого начала бить струя идей и результатов, превращаясь в мощную реку по названием контактная механика.

Новые идеи рождаются всегда на стыке двух наук: для Герца это была электродинамика и проблема твердости и прочности контакта в механике. Как видим совершенно разные области: механика твердого тела и электричество.

Совсем молодой (23 года), но исключительно оригинальный и острый ум Генриха Герца увидел, что **поля взаимодействия электростатических сферических зарядов и механическое поле напряжений в контакте сферических тел – подобны.**

Этого допущения было достаточно, чтобы определить вид функции давлений в механическом контакте. Все дальнейшее было делом математической техники. Герц показал, что найденное эллипсоидальное распределение соответствует гравитационному потенциалу, то есть соответствует механике контакта. Все последующие работы А.Н.Динника, С.П.Тимощенко, И.Я.Штаермана, Б.С.Ковальского и др.

подтверждали, доказовали или использовали допущения Герца об эллипсодиальном распределении давлений.

Изначальный **метод Герца** можно назвать **эвристическим**, то есть основанным на интуиции, ассоциациях, аналогиях и озарениях, как конечном этапе в этой цепи.

3.2. Последующие наши исследования результатов решения Герца привели к выводу, что в подавляющем большинстве случаев контакта в справочной литературе отсутствуют расчетные формулы. В связи с этим были проанализированы соотношения для определения геометрических параметров в контакте и выделены основные. Затем на основании предложенной систематизации сопряжений тел двоякой кривизны выписаны для каждого случая выражения для кривизн и сумм кривизн и вспомагательных параметров A и B.

В итоге стали возможны расчеты параметров контакта для всех возможных сопряжений тел двоякой кривизны.

3.3. Особенности применения решения для герцевского контакта состоят в следующем:

1) Применение герцевских формул требует использования таблиц, по которым для каждого вида сопряжения определяются необходимые четыре коэффициента.

2) Герцевские формулы применимы только в случаях, когда размеры площадки контакта хотя бы на два порядка меньше размеров контактирующих тел. Это резко ограничивает количество практически важных задач, для которых необходимо иметь решение и производить расчеты.

3) Герцевское решение дает возможность рассчитывать только упругий контакт при малых деформациях.

На снятие этих особенностей и ограничений в контакте были направлены последующие исследования.

4. Метод подобия или метод приведенного радиуса (МП-метод) [9]

Этот метод возник из желания иметь метод, в котором не требуется определять некоторые дополнительно коэффициенты по таблицам – наличие таблиц затрудняет выполнение расчетов на компьютере, например, с помощью MathCad.

4.1. Сущность МП-метода заключается **в следующей гипотезе**: если в герцевские формулы для сопряжения шар-плоскость подставить некоторый эквивалентный приведенный радиус, отражающий особенности сопряжения, то можно получить результаты близко соответствующие расчетам по Герцу.

Приведенный радиус был получен из двух условий эквивалентности: 1) площадь контакта при эллиптической площадке контакта равна площади контакта при тех же условиях в контакте шара и плоскости (круговая площадка); 2) величины сближения в контакте тел двоякой кривизны и в контакте шара и плоскости в равных условиях – одинаковы.

Реализация предложенного метода и сравнение его с решением Герца показали, что степень совпадения результатов приемлема для практических расчетов.

4.2. С целью удобства практических расчетов была выполнена **систематизация задач для тел двоякой кривизны** и для каждого случая получены выражения для приведенного радиуса соответствующего сопряжения. Таким образом, по методу приведенного радиуса расчеты ведутся для любых сопряжений тел двоякой кривизны по одним формулам, при использовании соответствующего приведенного радиуса и без применения таблиц коэффициентов.

4.3. В методе эквивалентного **приведенного радиуса** этот радиус по существу соответствует **критерию подобия** в методе подобия и размерностей. Что бы это стало очевидным достаточно формулы Герца для контакта шара и плоскости представить в безразмерном виде. Например, формулу для сближения

$$u_0 = 0,8253\left(\frac{Q^2}{R_* E_*^2}\right)^{1/3}$$

можно представить в безразмерном виде

$$\frac{u_0}{R_1} = 0,8253\left(\frac{R_1}{R_*}\,\frac{Q^2}{R_1^4 E_*^2}\right)^{1/3}$$

или

$$\Pi_1 = \xi\left(\frac{\Pi_3}{\Pi_2}\right)^{1/3}, \quad \xi = 0,8253 \quad ,$$

где $П_1 = \dfrac{u_0}{R_1}$; $П_2 = \dfrac{R_*}{R_1}$; $П_3 = \dfrac{Q^2}{R_1^4 E_*^2}$;

R_1 – один из радиусов сопряжения;

R_* – приведенный радиус.

Таким образом, **точность предложенного метода находится в пределах точности общей теории подобия и размерностей.**

5. Квазигерцевский контакт (QH-метод) [9]

5.1. Квазигерцевским мы называем контакт, в котором один размер площадки контакта по герцевски мал, а второй размер – велик, то есть соизмерим с размерами тела. В случае квазигерцевского контакта расчет параметров контакта по герцевским формулам может дать результаты не совпадающие с действительностью.

Для решения квазигерцевских задач предложен новый метод (QH-метод), сущность которого реализуется следующими этапами. Покажем этапы на примере.

1. **Постановка задачи**, для шара и желоба без зазора, состоит из уравнения равновесия:

$$Q = 4\int_0^{\varphi_0}\int_0^{a_0} R_1 \sigma\left(\varphi, x\right)\cos\varphi \, d\varphi \, dx; \tag{5.1}$$

и уравнения сплошности в контакте:

$$u_{0\varphi} = u_{00}\cos\varphi . \tag{5.2}$$

2. **Идея решения** базируется на следующих допущениях:

1) функция распределения контактных давлений в направлении малого размера площадки контакта принимается эллиптической в форме:

$$\sigma\left(\varphi, x\right) = \sigma_{0\varphi}\left(1 - \left(x/a\right)^2\right)^{1/2}, \tag{5.3}$$

при этом максимальное давление и размер площадки определяется и принимается по формулам Герца для цилиндра на плоскости:

$$\sigma_{0\varphi} = 0{,}5642\left(\frac{Q_n}{l R_1 \eta}\right)^{1/2}, \tag{5.4}$$

$$a_\varphi = 1{,}131\left(\frac{Q_n}{l} R_1 \eta\right)^{1/2}, \tag{5.5}$$

где
$$u_\varphi = \frac{a_\varphi^2}{2R_1}. \tag{5.6}$$

3. **Вывод разрешающего уравнения** строится следующим образом:

1) определяя Q_n/l из (5.5) и подставляя в (5.4) получаем выражение давления через размер площадки контакта a_φ

$$\sigma_{0\varphi} = \frac{a_\varphi}{2R\eta}; \tag{5.7}$$

2) с помощью соотношений (5.2) и (5.6) находим для любого φ -го сечения зависимость текущего размера площадки a_φ от максимального a_0

$$a_\varphi = a_0\left(\cos\varphi\right)^{1/2}; \tag{5.8}$$

3) подставляя (5.8) в (5.7), получаем связь максимального давления $\sigma_{0\varphi}$ и наибольшего размера площадки контакта a_0

$$\sigma_{0\varphi} = \frac{a_0\left(\cos\varphi\right)^{1/2}}{2R\eta}; \tag{5.9}$$

4) следующий шаг в наибольшей мере отражает сущность метода: представление искомой функции в виде произведения известной функции вдоль малого размера площадки на неизвестную функцию распределения давлений вдоль большего размера площадки.

Подставляя (5.8) и (5.9) в (5.3), имеем выражение функции давлений через наибольший размер площадки контакта:

$$\sigma(\varphi, x) = \frac{a_0 (\cos\varphi)^{1/2}}{2R\eta} \left(1 - \frac{x^2}{a_0^2 \cos\varphi}\right)^{1/2}; \tag{5.10}$$

5) окончательно разрешающееся уравнение получаем, подставив (5.10) в (5.1):

$$\frac{Q\eta}{2a_0} = \int_0^{\varphi_0} \int_0^{a_\varphi} (\cos\varphi)^{1/2} \left(1 - \frac{x^2}{a_0^2 \cos\varphi}\right)^{1/2}; \tag{5.11}$$

учитывая, что в безразмерном контакте $\varphi_0 = \pi/2$, имеем уравнение относительно размера a_0 площадки контакта.

4. После интегрирования и преобразований **получаем решение в форме**:

1) для размера площадки:

$$a_0 = \left(\frac{8}{\pi^2} Q\eta\right)^{1/2}; \tag{5.12}$$

2) для максимального давления из (5.9), с учетом (5.12), имеем:

$$\sigma_{00} = \frac{1}{2}\left(\frac{8Q}{\pi^2 R^2 \eta}\right)^{1/2}. \tag{5.13}$$

5.2. При выполнении QH- методом более сложных задач, например с зазором, неизбежно приходится додумывать ходы, необходимые для получения замкнутого решения.

В результате в пятой главе QH-методом получены решения для следующих задач:

1) контакт шара и желоба с малым зазором и с натягом;
2) контакт шара и желоба на поверхности цилиндра с малым зазором;
3) контакт цилиндра и желоба на внешней поверхности цилиндра с малым зазором;
4) перекос осей цилиндров при внешнем контакте этих цилиндров.

5.3. Анализ процедуры метода показывает, что QH-метод можно рассматривать как **специальный случай** известного в математике **метода разделения переменных**.

Похожесть на метод разделения здесь состоит в том, что сомножители содержат разные координаты. Особенность, однако, состоит в том, что эти координаты связаны между собой заданной функцией.

Вместе с тем QH-метод носит универсальный характер и может быть использован для описания контактного взаимодействия в разных случаях подшипников качения и зубчатых передач с внутренним зацеплением типа Новикова, червячных и глобоидных передач и т.д.

6. Метод подобия в контактных задачах с износом (МПw – метод) [9]

6.1. Шар-плоскость

1. **Постановка задачи**. В контакте шара с плоскостью при наличии износа, в условиях допущения о равномерном распределении давлений в любой момент процесса, состоит из трех уравнений:

- равновесия:

$$\sigma(s) = \frac{Q}{\pi a^2(s)}, ; \tag{6.1}$$

- сплошности в контакте:

$$u_{w0}(s) = \frac{a^2(s)}{2R}, ; \tag{6.2}$$

- соотношения модели установившегося износа:

$$\frac{du_w}{ds} = k_w \sigma^m. \tag{6.3}$$

2. **Прямая задача** или задача определения размеров площадки контакта при известных параметрах модели изнашивания k_w, m сводится к дифференциальному уравнению и имеет решение:

$$a^{2m+2}(s) = Rk_w(2m+2)(Q/\pi)^m s. \tag{6.4}$$

3. **Обратная задача** или задача определения параметров k_w, m модели изнашивания при известной из эксперимента зависимости площадки контакта от пути трения в виде степенной функции:

$$a(s) = cs^{\beta}, \tag{6.5}$$

имеет вид

$$m = \frac{1-2\beta}{2\beta}, \tag{6.6}$$

$$k_w = \frac{c^{2m+2}\beta}{R(Q/\pi)^m}. \tag{6.7}$$

6.2. Показано, что **для контакта тел двоякой кривизны с износом** – постановка и решение задачи описывается уравнениями по форме совпадающими с уравнениями (6.1) - (6.7). Для получения действительных уравнений и решения достаточно в соотношения, содержащие реальный радиус шара подставить приведенный эквивалентный радиус:

$$\frac{1}{R_*^2} = \left(\frac{1}{R_{11}} + \frac{1}{R_{21}}\right)\left(\frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{22}}\right), \tag{6.8}$$

полученный из условий равенства площадей контакта и максимального износа.

6.3. Точность результатов, получаемых при использовании метода приведенного радиуса соответствует точности метода теории подобия и размерностей. Умножив слева и справа (6.8) на R_{11}^2 имеем критерий подобия $\Pi_1 = R_{11}/R_*$:

$$\left(\frac{R_{11}}{R_*}\right)^2 = \left(1 + \frac{R_{11}}{R_{21}}\right)\left(\frac{R_{11}}{R_{12}} + \frac{R_{11}}{R_{22}}\right), \tag{6.9}$$

$$\Pi_1^2 = (1+\Pi_2)(\Pi_3+\Pi_4), \tag{6.10}$$

где $\Pi_2 = R_{11}/R_{21}$; $\Pi_3 = R_{11}/R_{12}$; $\Pi_4 = R_{11}/R_{22}$ критериальное уравнение подобия для размера площадки контакта можно получить из (7.4) в виде:

$$\left(\frac{a}{R_{11}}\right)^{2m+2} = \frac{R_*}{R_{11}}\frac{s}{R_{11}}(2m+2)\frac{k_w(Q/\pi)^m}{R_{11}^m}, \tag{6.11}$$

где $\Pi_1 = R_{11}/R_*$ является одним из критериев подобия.

7 Квазигерцевский контакт в задачах с износом (QHw-метод) [9]

7.1. QHw-метод решения контактной задачи с учетом износа обобщается после рассмотрения примера: качение неизнашиваемого тора по изнашиваемому цилиндру с образованием желоба. Основное допущение состоит в том, что б площадка контакта в начале u_{axb} при износе имеет прямоугольную форму с размерами $a \cdot b$. Это допущение соответствует усреднению давлений по площадке контакта.

В соответствии с допущением постановка задачи об износе цилиндра складывается, как обычно, из соотношений:

- условия равновесия:

$$\sigma(s) = \frac{Q}{4a(s)b(s)}, ; \tag{7.1}$$

- условия сплошности в контакте:

$$u_{w0} = \frac{a^2(s)}{2R_3}, ; \tag{7.2}$$

- соотношения модели изнашивания:

$$\frac{du_w(s)}{ds} = k_w \sigma^m(s). \tag{7.3}$$

7.2. В соответствии с общей идеей QH-метода в направлении малого размера площадки контакта $2в$ распределение давления принимается по Герцу (контакт параллельных цилиндров), а в направлении большего размера площадки функция давлений определяется из выполненного решения.

По Герцу размер $в$ площадки контакта в направлении качения определяется по зависимости:

$$в = \frac{B}{a^{1/2}};\ B = 1,128\left(\frac{QR_{пр}}{2\eta}\right). \tag{7.4}$$

Из рассмотрения соотношений (7.1) - (7.3) задача сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению вида:

$$\frac{k_w R_3 \left(Q/4\right)^m}{a^m в^m} = a\frac{da}{ds}. \tag{7.5}$$

После подстановки (7.5) в (7.4) получаем окончательное дифференциальное уравнение задачи:

$$k_w R_3 \left(\frac{Q}{4B}\right)^m = a^{\frac{m}{2}+1}\frac{da}{ds}, \tag{7.6}$$

из решения, которого находим выражение для определения размера a площадки контакта:

$$a^{\frac{m}{2}+2} = k_w R_3 \left(\frac{Q}{2B}\right)^m \left(\frac{m}{2}+2\right)s, \tag{7.7}$$

и далее определяется максимальное давление в контакте:

$$\sigma = \frac{Q}{4B\sqrt{a}}. \tag{7.8}$$

Такова схема решения задачи с учетом износа для квазигерцевского контакта.

С использованием этой схемы решается также обратная задача с определением параметров k_w, m модели изнашивания при известной из эксперимента функции $a(s)$.

7.3. Этим методом решены задачи с износом для: 1) тора и полого цилиндра; 2) при качении с проскальзыванием выпуклого изнашиваемого конического тора по выпуклому изнашиваемому вращающемуся цилиндру; 3) тоже по полому цилиндру; 4) износ выпуклого цилиндра при качении с проскальзыванием шара; 5) износ шаром желоба на выпуклом вращающемся цилиндре.

Выполненные решения обратных задач являются теоретической основой: 1) методов испытаний на износ шара по желобу с определением параметров моделей изнашивания; 2) методов расчетного определения износа шарикоподшипников.

8. Метод алгебраических уравнений в контактной механике [3]

1^0. Традиционно контактная задача сводится к интегральному уравнению Фредгольма первого рода типа:

$$\int_0^a \sigma\left(x'\right) k\left(x - x'\right) dx' = u\left(x\right). \tag{8.1}$$

В результате вся традиционная теория решения контактных задач это прикладная теория решения интегральных уравнений. Главная особенность уравнений Фредгольма неустойчивость их решения.

Еще И.Я.Штаерман [4] обратил внимание на то, что, если учитывать деформации локального слоя поверхности (например, шероховатости), то уравнение контактной задачи сводится к уравнению Фредгольма второго рода:

$$k\sigma\left(x\right) + \lambda\int_0^a \sigma\left(x'\right)k\left(x - x'\right) dx' = u\left(x\right), \tag{8.2}$$

решение которого устойчиво.

Если деформации тел пренебрежимо малы по сравнению с деформациями поверхностного слоя, то интегральное уравнение (8.2) вырождается в алгебраическое.

$$u\left(x\right) = k\sigma\left(x\right). \tag{8.3}$$

Это наиболее простая модель контактного взаимодействия тел была еще в 1798 году предложена академиком РАН Фуссом Н.И. и далее развивалась Винклером Е. (1867г.), как гипотеза линейной податливости основания (виклеровского основания). Обычно коэффициент податливости в (8.3) определяется экспериментально. Горбунов-Посадов М.И. [5] развивал методы определения при использовании теории деформаций полупространства.

1. Эффективность применения алгебраической модели $u = k\sigma$ нормальной податливости основания, решающим образом зависит от способа и точности определения коэффициента податливости.

Альтернативной экспериментальному определению коэффициента явилась идея **определять коэффициент нормальной податливости кольцевого слоя из решения соответствующей осесимметричной задачи** теории упругости, например, для слоя в жесткой обойме. Сравнение решений контактных задач выполненных сведением к алгебраическим уравнениям, с некоторыми известными строгими решениями показало их достаточно высокую точность и перспективность.

В первом разделе книги [3] даны решения 9 практически полезных контактных задач, выполненных МАУ с использованием модели (8.3).

2. Для решения контактных задач с учетом трения предложена **алгебраическая модель касательной податливости** основания. Коэффициент податливости в этой модели также определяется из решения соответствующей осесимметричной задачи для слоя в жесткой обойме при действии касательных сил. При использовании этой модели и закона трения Амонтона сведением к алгебраическим уравнениям решено 7 практически полезных контактных задач, в том числе и задача для качающегося шарнира.

3. При наличии микро и макронеровностей к податливости основания слоя добавляется **податливость слоя шероховатостей**. Нелинейность зависимости податливости от давления затрудняет получение конечных формул. Для преодоления этой трудности нелинейная степенная зависимость заменена кусчно-линейной моделью. Сведением к алгебраическим уравнениям решено 4 контактных задачи с учетом микро и макронеровностей слоя.

4. В случае **пластического деформирования** зависимость податливости основания от давления также нелинейная. Путем замены степенной нелинейности кусочно-линейной функцией контактная задача сводится к нелинейным алгебраическим уравнениям, допускающим замкнутые решения. При использовании алгебраической модели податливости пластически деформируемого основания выполнено решение и исследование 9 контактных задач.

5. При решении контактных задач для вала и полого цилиндра с учетом **перекоса осей** использована, как модель, так и допущение о независимости сечений вдоль вала или о том, что в каждом сечении задача рассматривается как плоская. При таком моделировании пространственного контакта МАУ решено 7 вариантов задач с учетом перекоса осей.

6. В случае **слоя переменной толщины** коэффициент податливости изменяется по площадке контакта. Учет изменения коэффициента податливости можно выполнить, подставляя в формулы для расчета коэффициентов переменную толщину. Действуя, таким образом, получаем модель, с помощью которой задачи сводятся к алгебраическим уравнениям. По этой методике рассмотрены 4 контактных задачи.

7. Модель переменной толщины основания, обобщается на случай **соединений с натягом** вала и некруглых деталей. Оценка погрешности в сравнении с точными решениями показала достаточно высокую точность решений этих задач МАУ. Для соединений с натягом решено 10 практически важных задач.

8. Метод алгебраических уравнений распространяется и на случаи, когда при тонком слое контакт происходит по малой площадке контакта, то есть на **герцевский контакт**. Особенность составления алгебраических уравнений в этом случае в отличие от подшипникового контакта состоит в выборе прямоугольных координат и соответствующих уравнений сплошности. В этом разделе выполнено решение и исследование 5 контактных задач.

9. В **роликоопорах (колесах)** к контактным перемещениям добавляются изгибные перемещения ступицы. В этом случае модель контактной податливости дополняется изгибной составляющей, которая учитывается по теории изгиба тонких колец. При точном рассмотрении задача сводится к интегральному уравнению Фредгольма, а при использовании алгебраической модели контактной податливости к тригонометричному уравнению. В этом разделе решены 3 принципиально разных задачи.

10. Контакт вала и проушины с учетом изгиба в общей постановке сводится к интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода с известными проблемами его решения. Применение алгебраической модели податливости сводит задачу к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода, которое удобно решать численно.

Путем упрощения расчетной изгибной схемы с заменой распределенного давления на сосредоточенную силу при одновременном использовании алгебраической модели контактная задача сводится к нелинейному тригонометрическому уравнению, которое легко решается численно. При этом рассмотрены случаи как с одной, так и с двумя возможными площадками контакта.

11. При использовании алгебраической модели податливости плоская **упруго-гидродинамическая задача** для подшипника скольжения сведена к обобщенному уравнению Рейнольдса. Численный анализ решения этого уравнения позволил выяснить особенности распределения давлений. В частности установлено, что при малой толщине слоя смазки влиянием смазки на распределение давления можно пренебречь.

Предложенный подход позволил приближенно рассмотреть алгоритм и численное решение пространственной УГД-задачи для подшипника скольжения с учетом перекоса вала. В результате численного анализа, в частности, установлено, что при малой толщине пленки распределение нагрузки вдоль вала близко к линейному.

12. Алгебраическая модель податливости основания обобщается на случай осесимметричного распределения напряжений. Подробно рассмотрены осесимметричные задачи **для сферического слоя** и получены коэффициенты податливости для этого случая.

На основе модели решены прямым и обратным контактные задачи для сферических тел, покрытых тонкими слоями для большой и малой площадок контакта, в линейной и нелинейной постановках как для полой сферы. Так и для полупространства, всего решено 6 принципиально разных задач.

13. Найдено принципиально новое продолжение в развитии алгебраических моделей. Оказалось, что для полупространства достаточно точные решения можно получить, вводя **в модель** зависимость податливости от **размера площадки контакта типа** $u = k\sigma a$. При использовании этой модели МАУ решены 2 задачи: шар-плоскость и цилиндр-плоскость. Даны оценки точности этих решений.

14. По пути исследования и развития метода получены новые результаты.

1. при исследовании алгебраических моделей податливости полупространства построенных на основе решений Бусинеска и Черутти получены некоторые интересные результаты. Показано, что **модель**, учитывающая размер площадки контакта $(u = k\sigma a)$ **принципиально соответствует интегрированию решения Бусинеска** по круговой площадке с равномерным давлением. **Решение Черутти** в окрестности действия касательной сосредоточенной силы **содержит явный дефект** опрокидывания точки приложения силы. Окрестность точки приложения нормальной сосредоточенной силы находится в состоянии всестороннего сжатия при отсутствии объемных деформаций;

2) при анализе решений некоторых задач, выполненных методом интегральных уравнений найдена форма осесимметричного индентора при котором на полупространстве **давления распределены равномерно;**

3. дана объективная сравнительная **оценка метода** алгебраических уравнений путем сравнения с точными решениями, выполненными методом интегральных уравнений, как для частных, так и общих задач для тел двоякой кривизны. Установлено, что сравнительная точность решений для МАУ в этом случае по давлениям составляет (1–15 %), по размерам площадки контакта (1 - 14 %). При выполнении основных и вспомогательных исследований получены новые результаты при решении 9 задач.

15. Широкий и очень важный для человека является класс контактных задач связанных с давлениями на элементы поверхности человеческого тела. С точки зрения механики это задачи с большими контактными перемещениями. При построении решений контактных задач МАУ в случае больших перемещений возникает необходимость в дальнейшем развитии моделей податливости и вариантов метода алгебраических уравнений.

Развитие моделей податливости выполнено в направлении разработки обобщения **комбинированной модели типа** $u = k_1\sigma + k_2\sigma a$ с учетом винклеровской модели и модели, учитывающей масштабный фактор. Рассмотрение средних перемещений в первом элементе модели привело к варианту метода алгебраических уравнений, который получил название методом по этапного решения контактных задач и метода средних давлений. Развитие моделей и методов позволило в этом разделе рассмотреть 15 принципиально новых задач.

В качестве практического приложения полученных решений в этом разделе предложен способ оценки жесткостной комфортности воздействия внешних опор на элементы поверхности тела человека. Показано, что внешние давления на элементы тела человека комфортны, если не превышают кровяное артериальное давление в этих элементах.

16. Разработан метод **определения угла контакта, давления и износа** подшипников скольжения **без разборки.** Сущность метода в использовании эффекта повышения жесткости сопряжения вал-втулка с увеличением износа.

Сначала без износа снимается диаграмма вдавливания вала и определяется коэффициенты податливости втулки. Затем по диаграмме вдавливания вала в изношенную втулку определяется давление и износ. Методика может служить основной диагностирования без разборки опор скольжения машин. В процессе создания развития и использования метода алгебраических уравнений в замкнутом виде, то тесть до получения практически применимых формул, решено 100 задач.

Заметим, что точное решение одной-двух задач методом интегральных уравнений требует несколько лет упорной работы на уровне кандидатской диссертации. Из сказанного следует, безусловно, высокая эффективность метода алгебраических уравнений в контактной механике.

9. Вариационно-экспериментальный метод, пластический контакт [4]

9.1. Вариационные принципы в механике твердого деформируемого тела (МТДТ)

1. Любая точка деформируемого тела описывается 15 величинами: 6 компонентов тензора напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$; 6 компонентов тензора деформаций $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$; 3 компонента вектора перемещений u, v, w_c.

Соответствующая краевая задача МТДТ содержит 15 постановочных уравнений:
- 3 дифференциальных уравнений равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3;$$

- 6 геометрических соотношений:

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,\,j} + u_{j,\,i})/2, \quad i, j = 1, 2, 3;$$

- 6 физических соотношений, в случае упругости это соотношения закона Гука:

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{ij}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3.$$

Эту систему уравнений необходимо решать при некоторых граничных условиях:
- силовых:

$$\sigma_{ij} n_i = x_i;$$

- или кинематических:

$$u_i = \overline{u}_i.$$

Решение краевой задачи в такой полной постановке достаточно сложная и громоздкая процедура.

2. Все обратимые физические явления удается описать с помощью вариационных принципов. Вариационные принципы – это утверждения о том, что реально существующие процессы описываются функционалами, которые имеют стационарные значения.

Применительно к задачам теории упругости известны тринадцать вариационных принципов или функционалов. Многообразие принципов объясняется тем, что принцип определяется варьируемой искомой величиной, а их всего 15.

Для примера, если в качестве варьируемых величин берутся перемещения, то имеет место принцип возможных перемещений или функционал Лагранжа.

С помощью функционала Лагранжа краевая задача теории упругости сводится к минимизации функционала полной энергии деформирования по перемещениям (или по деформациям).

$$F_L = \int_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} dV - \int_S x_i \delta u_i ds.$$

При минимизации этого функционала автоматически удовлетворяются дифференциальным уравнениям равновесия и силовым граничным условиям, необходимо удовлетворять только граничным условиям в переменных.

В случае упругой задачи функционал энергии является квадратичным, а его минимизация по Ритцу приводит к линейной системе алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов в искомых функциях.

9.2. Метод интегральных уравнений в контактной механике

1. Контактными называют задачи, в которых в качестве исходных данных заданы: 1) геометрия поверхностей; 2) силы взаимодействия; 3) свойства материалов контактирующих тел.

Задача состоит в определении функции давлений $\sigma(x)$ и размеров площадки контакта $a(Q)$.

В основе вывода интегрального уравнения задачи лежат два основных соотношения: 1) условие сплошности в контакте: $u_i(x) = u_i$;

2) условие равновесия тел под действием внешних сил и контактных давлений.

2. При использовании решений теории упругости при действии сосредоточенных сил на поверхность контактирующих тел (решения Фламана или Бусинеска) условие сплошности в контакте сводится к интегральному уравнению Фредгольма 1-го или 2-го ряда типа:

$$\sigma(x) - \lambda \int_a^в \sigma(x')k(x - x')dx' = f(x).$$

Это интегральное уравнение необходимо решать при выполнении условия равновесия:

$$Q = \int_s \sigma(x) ds.$$

Вся история, начиная от Герца, решения контактных задач это в большинстве случаев решение интегрального уравнения задачи относительно давления $\sigma(x)$, с учетом условия равновесия. Одна из дополнительных сложностей в решении контактных задач– это глубокая нелинейность системы уравнений.

9.3. Метод наименьших квадратов в решении интегральных уравнений

1. Метод наименьших квадратов (МНК) решения интегральных уравнений, например, уравнения Фредгольмавторого или 1-го рода типа:

$$\int_a^{в} \sigma(s)k(x-s)ds = f(x),$$

по С.Г.Михлину [8] заключается в следующем.

1) решение отыскивается в форме ряда по известным функциям $\varphi_i(x)$ с точностью до неизвестных коэффициентов c_i :

$$\sigma(x) = \sum^{n} c_i \varphi_i(x);$$

2) после подстановки этого выражения в интегральное уравнение, имеем выражение для невязки или несоответствия точному решению в виде:

$$\varepsilon = f(x) - \int_a^{в} (\Sigma c_i \varphi_i(x)) k(x-s)ds;$$

3) интеграл по dx от квадрата этой невязки и составляет основную квадратичную функцию задачи многих c_i переменных:

$$F = \int_a^{в} \varepsilon^2(x, c_i)dx;$$

4) условие экстремума функции:

$$\frac{\partial F(c_i)}{\partial c_j} = 0,$$

сводит исходную задачу к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\Sigma a_{ij} c_j = b_j.$$

5) решая систему относительно c_i , получаем решение интегрального уравнения (3.4.1).

9.4. Вариационно-экспериментальный метод решения контактных задач

1. Все предыдущее это изложение известных методов реализации вариационного подхода в механике и математике. Далее кратко излагается **предложенный нами вариационно-экспериментальный метод**, который отличается от ранее известных введением в функционал главной экспериментальной зависимости. Минимизируя функционал находим решение соответствующее этому эксперименту.

Контактная задача теории упругости сводится к совместному решению системы из двух уравнений сплошности в форме интегрального уравнения и равновесия в форме уравнения типа:

$$\int_a^{в} \sigma(s)k(x-s)ds = f(x), \quad Q = \iint \sigma(x, y)dxdy.$$

Традиционный путь решения в основной части состоит в решении интегрального уравнения, при использовании условия равновесия как ограничения.

При этом функция f(x) предполагается известной из геометрии контактирующих тел.

2. Первая часть идеи ВЭМ состоит в том, чтобы в качестве основного уравнения для решения контактной задачи взять не интегральное уравнение, а условие равновесия.

По-существу, это тоже интегральное уравнение, так как неизвестная функция находится под законом интеграла. Но это интегральное уравнение особого типа.

Вторая часть идеи ВЭМ состоит в превращении левой части уравнения равновесия из константы в функцию. С этой целью мы полагаем, что из эксперимента можно найти функцию

$$Q = cu_0^n,$$

где u_0 – максимальные нормальные перемещения в контакте. Эта функция отражает весь процесс нагружения, а не только одну точку процесса.

3. Подставляя далее в условие равновесия:

$$cu_0^n = \iint \sigma(x, y)dxdy,$$

Получаем условие равновесия в любой момент нагружения.

В условиях, когда функция давлений $\sigma(x,\ y)$ неизвестна и может быть взята приближенной, выражение

$$\varepsilon = cu_0^n - \iint \sigma(x,\ y)dxdy\ ,$$

отражает невязку или несогласованность эксперимента и искомой функции.

Следуя традиционному требованию положительной определенности невязки и методу наименьших квадратов, сформулируем квадрат невязки:

$$\varepsilon^2 = \left[cu_0^n - \iint \sigma(x,\ y)dxdy\right]^2 ,$$

и далее, желая усреднить квадрат невязки, берем от него интеграл.

В результате получаем **квадратичный функционал контактной задачи:**

$$F = \int_0^{u_0} \left[cu_0^n - \int\int^{u_0} \sigma(x,\ y)dxdy\right]^2 du_0\ .$$

4. Традиционная постановка контактной задачи содержит два уравнения-сплошности и равновесия и две неизвестных функции давлений $\sigma(x)$ и размеров площадки контакта $a(Q)$.

В рассматриваемой здесь задаче ВЭМ **постановка не содержит условия сплошности**. Соответственно искомой является одна функция давлений.

При наличии необходимой экспериментальной зависимости, размеры площадки контакта известны и условия сплошности удовлетворяются автоматически.

5. Процедура минимизации функционала задачи (3.5.7) выполняется традиционно с помощью **метода Ритца**. Искомая функция представляется в виде усеченного ряда, взятого из ряда, обладающего свойством полноты.

Для простоты рассмотрим плоскую задачу. Тогда искомую функцию можно представить в виде:

$$\sigma(x) = \Sigma c_i \varphi_i(x)\ .$$

После подстановки в функционал, имеем функцию многих переменных c_i:

$$F(c_i) = \int_0^{u_0} \left[(cu_0^n) - \int_0^{u_0} \Sigma c_i \varphi_i(x)\, dx\right]^2 dx\ .$$

Из условия минимума функции:

$$\frac{\partial F(c_i)}{\partial c_j} = 0\ ,$$

приходим к разрешающей системе относительно величин c_i, с помощью которых определяется искомое напряжение.

6. Одной из **существенных особенностей решения** контактных задач ВЭМ является процедура приведения функционала к одним переменным, к одной системе координат.

В процессе нагружения и деформирования участвуют несколько разных величин: u_0 – максимальное сближение поверхностей; a – размер площадки контакта; x – координата точки контакта. В случае контакта индентора и плоскости эти величины согласовываются геометрическими соотношениями в контакте. В других случаях использования ВЭМ для решения диаграмм нагружения с координатами тела один из первых этапов использования метода.

10. Напряжения и деформации в контакте [5]

Контактная механика условию делится на две большие части: 1) решение контактных задач с определением давлений, перемещений и деформаций в контакте; 2) решение задач о напряженном состоянии в зоне контакта с определением компонентов тензоров напряжений и деформаций.

Методы и результаты, полученные в работах [3, 4] относятся к первой части контактной механики. В книге [5] излагаются методы и результаты исследования напряженного состояния в контакте, относящиеся ко второй части контактной механики.

На ряду с применением известных методов отмечены два оригинальных направления.

10.1. Прямые методы определения напряжений в контакте

1. Под прямыми мы понимаем методы, в которых для определения компонентов тензора напряжений в некоторых симметричных точках области не используется полная система уравнений краевой задачи, а используется только некоторые соотношения Коши и обобщенный закон Гука.

При построении решений прямыми методами используется тот факт, что после решения контактной задачи для контактных точек становятся известными, как нормальные контактные перемещения (условия в перемещениях), так и контактные давления (условия в напряжениях). Это наводит на мысль расширении классификации задач теории упругости и введении понятия о **четвертой основной задачи**: одновременно задние на участке контакта и напряжений и деформаций.

2. Однако главным в этом факте является не столько введение нового типа задач, сколько обнаружившаяся простота их решений для некоторых особых, в частности, самых нагруженных точек. Оказывается что для этих точек число неизвестных в задаче таково, что они могут быть определены из соотношений физического закона Гука. Этот путь в определении напряжений и недостающих деформаций оказался настолько эффективным, что его обоснованно можно называть методом решения задач.

3. Прямым методом определяются напряжения и деформации в опасных точках поверхности не только в задачах теории упругости, но и в задачах теории пластичности. При этом вместо закона Гука используется физические уравнения соответствующей теории пластичности.

4. Прямым методом **решены задачи** о напряженном состоянии в упругом и пластическом контакте **двух выпуклых цилиндров** и одного **выпуклого другого вогнутого цилиндров.** Получены простые расчетные формулы удобные для практического использования.

5. При рассмотрении прямым методом напряженного состояния в пластическом контакте **шара и плоскости** потребовалось предварительно решение вопроса о распределении нормальных и тангенциальных деформаций по площадке контакта с трением со сцеплением и без трения.

Ответ на этот вопрос является неоднозначным. Использовано несколько подходов: 1) расчет по средним деформациям; 2) вычисление деформаций по соотношениям Коши; 3) прямым вычислением деформаций из геометрических соотношений.

Выполнено определение напряженного состояния в пластическом контакте шара и плоскости как на стадии нагружкения, так и при разгрузке позволило получить простые практически полезные зависимости.

10.2. Механика контактной среды и МКЭ

1. Задачи контактного взаимодействия характеризуются **многократной нелинейностью**: 1) односторонние связи; 2) переменная площадка контакта; 3) трение и проскальзывание; 4) наличие шероховатостей; 5) пластические деформации. Наличие нелинейностей затрудняет аналитическое решение задач. Поэтому предпочтение в ряде случаев отдается численным метода, в частности МКЭ.

2. Однако основная сложность в описании контактного взаимодействия при наличии трения и учете касательной податливости состоит в **необходимости иметь** теорию этого взаимодействия или **теорию двумерного** и, прежде всего, **анизотропного трения**. То есть возникает необходимость в построении соотношений некоторой сплошной среды расположенной в тонком слое между контактирующими поверхностями. Эта среда в дальнейшем именуется контактной средой.

3. Основное свойство контактной среды это нелинейная зависимость между касательными силами и сдвигами перемещениями (деформациями). Эти перемещения на этапе нелинейности реализуются путем проскальзывания. Теория контактной среды построена по аналогии с теорией пластической среды. При этом вместо ассоциированной закона течения Друкера вводится и используется **ассоциированный закон проскальзывания.** С помощью этого закона выводятся **основные физические соотношения контактной среды** в перемещениях и обратные им соотношения, как в приращениях, так и для конечных величин для изотропного и ортотропного слоев.

4. Наличие полной системы уравнений для контактного слоя позволило вывести матрицу жесткости плоского и пространственных контактных элементов с учетом нелинейности и ортотропности среды.

5. На основе нелинейной матрицы конечного контактного элемента разработаны **итерационные методы решения контактных задач** при разных схемах учета нелинейности: по методу дополнительных напряжений; по методу дополнительных деформаций; и по методу переменной жесткости.

6. Далее методология построения контактной среды распространена на контактную среду, обладающую свойствами, изменяющимися во времени, то есть при наличии **ползучести и износа** в контакте.

Получены основные уравнения реологической контактной среды и разработаны итерационные алгоритмы решения контактных задач не основе МКЭ разными методами.

11. Методы испытаний на износ с определением параметров моделей изнашивания [7]

1. Проблема создания системы эффективных **методов испытаний** пар трения на износ является одной из **базовых проблем трибологии**, определяющих прогресс в этой области.

Испытания на износ должны заканчиваться определением параметров моделей изнашивания. Только наличие параметров модели для каждой пары трения позволяет количественно определить износ в узлах трения машин, оценивать их ресурс.

Износ в узлах трения зависит от множества условий, главным среди которых является удельное давление между телами в контакте. Получение экспериментальной зависимости износа от давления традиционными методами требует испытаний лабораторных образцов при разных нагрузках.

В условиях разброса трибологических и механических свойств поверхности это приводит к статистическому подходу как единственно возможному в этом случае. Статистический подход всегда требует испытаний значительного количества образцов, времени и средств.

2. В работе предлагается, в отличие от традиционных испытаний при постоянном удельном давлении, **испытывать образцы в условиях переменных контактных давлений**. В этих условиях идет сложный процесс изнашивания и в явном виде зависимость износа от давления прямым изменением износа получить нельзя.

Однако если при этом описать с помощью дифференциального уравнения протекающий процесс и в качестве исходной взять функцию зависимости износа от пути трения, представляется возможным свести задачу определения параметров модели изнашивания к решению обратной контактной задачи с износом.

Главное преимущество предложенного подхода заключается в принципиальной возможности **определения параметров модели** изнашивания **по испытаниям одного образца** в случае установившегося износа, и по испытаниям двух образцов в случае неустановившегося износа.

В результате становится возможным определить не усредненные, а фактические параметры модели изнашивания в точке (или на малой площадке) поверхности контакта.

3. Реализация предложенной идеи потребовала решения контактных задач с износом для пары трения, для двух тел, принятых за образцы при испытаниях. В качестве образцов для испытаний приняты тела с простой поверхностью правильной формы: плоскость, шар, цилиндр, конус, клин.

Точное решение контактных задач с учетом упругости, пластичности и ползучести в контакте при современном уровне развития методов принципиально возможно, в частности, численными методами. Однако эти решения громоздки, их применение в практике испытаний затруднено.

В связи с этим в данной работе предложен приближенный подход, основанный на базовом допущении об **абсолютной жесткости контактирующих тел,** то есть принимается, что тела не деформируются. Это допущение дает приемлемые результаты в случае, когда перемещения от износа существенно превышают перемещения от деформаций. Расчеты показывают, что в подавляющем числе случаев испытаний это допущение приемлемо.

4. Решение контактных задач с учетом износа в условиях принятого допущения в замкнутом виде, как оказалось, также не простая задача.

Анализ первых решений, выполненных с использованием принятого допущения, показал, что принятые допущения о жесткости контактирующих изнашиваемых тел эквивалентно принятию **допущения о равномерном распределении давления** по площадке контакта в любой момент изнашивания.

Это означает, что составление и решение дифференциальных уравнений процесса изнашивания можно выполнять, принимая в качестве основной функцию **средних давлений** на площадке контакта от пути трения и других параметров.

5. Постановка прямой контактной задачи с учетом принятого допущения включает: 1) соотношение модели изнашивания; 2) условие сплошности контакте; 3) условие равновесия.

Существенную роль в постановке и решении задачи играет **определение пути трения** для всех контактирующих и изнашиваемых точек. В общем случае пути трения одного и другого контактирующих тел связаны между собой. Эта связь вводится в дифференциальные уравнения процессов и влияет на тип получаемых уравнений.

Так в случае описания износа подвижного тела, путь трения определяется его перемещением независимо от пути трения для точек неподвижного тела. В этом случае, как правило, задача сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными (ОДУ–РП).

В случае износа неподвижного тела путь трения для его точек контакта зависит от изменяющегося размера площадки контакта и от пути трения подвижного тела. В этом случае задача обычно сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению, в полных дифференциалах (ОДУ–ПД). К такому же типу уравнений сводятся задачи при рассмотрении процесса износа одновременно подвижного и неподвижного контактирующих тел.

В случае неустановившегося процесса изнашивания вид дифференциальных уравнений и сложность их решения зависят от принятой модели переходного процесса: модель старения, наследственная модель или модель упрочнения в износе.

6. В постановке обратной контактной задачи к соотношениям модели изнашивания сплошности и равновесия добавляется экспериментальная функция изнашивания или зависимость износа от пути трения и других параметров. Задача состоит в определении параметров модели изнашивания.

Предложено два подхода (метода) решения обратных задач.

Первый подход является **методом обращения решения прямой задачи** (МО–РПЗ). В этом методе решение прямой задачи записывается для двух точек экспериментальной зависимости и сводится к двум нелинейным уравнениям относительно параметров модели изнашивания. Этот метод обычно используется в случае, если начальная площадка контакта отлична от нуля.

Другой подход является **прямым методом решения обратной задачи** (ПМ–РОЗ). В этом методе решения прямой задачи не требуется. Разрешающее уравнение задачи получается на основе интегрального выражения модели изнашивания. Решающую роль здесь играет представление экспериментальной зависимости в виде степенной аппроксимации.

В результате задача сводится к одному нелинейному алгебраическому уравнению с двумя неизвестными параметрами и произвольно изменяющимся аргументами. Из условия выполнимости уравнения при любых значениях аргумента получается замкнутое решение и простые формулы для определения параметров модели.

7. Главной **особенностью любой обратной задачи** является неустойчивость решения (определения параметров модели) к соответствию экспериментальных данных выбранной модели.

Опыты показали, что необходим способ или метод оценки этого соответствия. В противном случае затруднена интерпретация полученных значений параметров модели (например, их отрицательные значения и т.д.).

С целью оценки устойчивости и точности результатов расчетно-экспериментального определения параметров модели **разработана теория сенситивов или теория чувствительности функций** к изменениям экспериментальных данных.

Применение теории сенситивов позволяет при использовании степенной аппроксимации экспериментальных данных оценить диапазон существования значений параметров аппроксимации, при которых значения параметров модели изнашивания устойчиво достоверны.

8. Использование переменной площадки контакта в процессе изнашивания не является единственным способом испытаний при переменном давлении.

Другим направлением в реализации идей проведения испытаний при переменных давлениях явилась разработка **релаксационного метода** испытаний на износ. Сущность метода заключается в том, что в нагружающую систему испытываемых образцов вводится упругий элемент. При этом нагружение осуществляется фиксированным перемещением в системе. По мере износа образцов сила, действующая в упругой системе уменьшается или релаксируется. По изменению силы можно судить о величине износа.

Основные достоинства релаксационного метода заключается в возможности определить износ без разборки – путем измерения изменений силы. Этот метод удобен для автоматизации процесс испытаний на износ.

9. Общим признаком для процессов **изнашивания и контактной ползучести** является зависимость состояния системы от времени (пути трения).

Контактная ползучесть имеет место в узлах полимерных антифрикционных материалах оловянистых баббитов, в узлах трения, работающие при высоких температурах и др.

При наличии одновременно износа и контактной ползучести выход из строя узла трения может произойти как по причине износа, так и ползучести, и при протекании обоих процессов одновременно. При выборе материалов для таких узлов необходимо иметь как трибологические, так и креповые свойства материалов.

Разработанные в некоторых разделах работы способы определения параметром контактной ползучести и моделей износа позволяют оценивать состояние узлов трения с учетом этих факторов на стадии выбора материалов и расчета ресурса.

12. Контактная механика и расчеты на износ опор скольжения [6]

Износ деталей машин в сопряжениях является основной причиной потери их работоспособности. Целенаправленное совершенствование узлов трения неизбежно проходит этапы конструирования и расчетов. Если расчеты на прочность прошли все этапы развития и стали рабочим инструментом при создании машин, то расчеты на износ находятся на стадии исследований закономерностей, разработки методов и экспериментальной проверки. Долгое время ведущие специалисты в трибологии (например, в частности Б.И. Костецкий) полагали, что создание методов расчетов на износ практически нереально.

Данная работа является итогом длительных исследований по созданию методов расчетов и испытаний на износ одного из самых распространенных узлов трения – радиальных цилиндрических опор скольжения.

12.1. Проблема расчетов на износ

1. Общая методология расчетов и испытаний на износ включает три главных этапа: 1) расчеты начальных условий в контакте: давлений, размеров площадки контакта, и сближения; 2) экспериментальное определение параметров моделей изнашивания пары трения в рабочих условиях; 3) расчеты узла трения на износ с использованием результатов первого и второго этапа.

Основой расчетов на износ являются решения контактных задач для сопряжения с учетом удаления части поверхностей в процессе изнашивания. Это наиболее трудоемкая часть исследований при разработке методов расчета.

● Полагаем, что предложенная и изученная схема исследований и расчетов узлов трения на износ будет определять дальнейшие работы в данном направлении.

(● – жирной точкой отмечаются направления перспективных исследований).

2. Множество задач контактной механики характеризуется многообразием геометрических форм, силовых и кинематических условий, свойств материалов, моделей изнашивания, методов решений и т.д. Разработка эффективных методов расчетов на износ узлов трения требует четкой **систематизации контактных задач и методов их решения**. Представленная в работе систематизация является попыткой дать некоторую упорядоченную структуру множества задач контактной механики.

В основе иерархии задач лежит систематизация геометрических правильных форм контактирующих тел. Двумерная квадратная матрицам выпуклых и полых поверхностей контактирующих тел размером 37 × 37 дает представление о более чем тысяче возможных сочетаниях этих форм. Каждое из контактирующих тел обладает значительным количеством свойств разной природы: микро и макро неровности (6); деформационные свойства (12); неоднородность (7); наличие остаточных напряжений (3); условия трения в точке (5); модели изнашивания (6); размерность тела (6). Это дает также квадратную матрицу 55 × 55, или вместе с матрицей форм дает матрицу 92 x 92.

Если к этому добавить вектор общих свойств и условий, общих для двух тел: свойства третьего тела (16); свойства окружающей среды (4); виды действующих нагрузок (5); направление сил (6); скорость приложения сил (3); цикличность нагружения (4); направление движения (7); характер движения (5); вид закрепления тела (7); вид системы координат (6); вид физических уравнений основных тел (10); и третьего тела (8); форма постановки задачи и разрешающих уравнений (12); методы решения краевых и контактных задач (27); искомые параметры в контакте (27); то в итоге имеем трехмерную матрицу возможных задач 55 × 55 × 142.

Это означает, что число возможных задач контактной механики оценивается величиной около полумиллиона. Из этого следует необходимость, как в систематизации задач, так и в разработке методов их решения.

●Предложенная систематизация не является полной и исчерпывающей. Возможны уточнения этой систематизации, особенно в части методов решений и их систематизации в справочные руководства.

3. Задачи контактной механики с учетом износа отличаются повышенной сложностью, обусловленной их многократной нелинейность. Анализ известных решений показывает, что при всей необозримости многообразия объектом рассмотрения является всего **несколько наиболее известных задач**. Причиной этого является как отсутствие систематизации и представлений о многообразии практически нужных решений, так и сложность анализа печатной информации.

●Предложенная систематизация делает возможной постановку задачи о создании автоматизированной системы поиска и обработки информации о решенных задачах. Без систематизации создание такой автоматизированной компьютерной системы невозможно. В то же время наличие системы требует разработки алгоритмов и программ поисковой экспертной системы, основанной на достижениях как лингвистического, так и механо-математического анализа

4. Модели процессов изнашивания являются неотъемлемой обязательной частью разрабатываемых методов расчета узлов трения на износ. Предложенные модели основаны на аналогии между процессами ползучести в механики деформируемых тел. Аналогия состоит в общности зависимостей ползучести и износа от времени.

●В [6] реализована главным образом, модель в форме зависимости интенсивности износа от давления и пути трения. Для учета влияния множества других факторов предложено две перспективных формы: в виде суммы (аддитивная) и в виде произведения (мультипликативная) функций зависящих от разных факторов. В дальнейшем особого внимания заслуживает использование безразмерных комплексов от множества факторов, используемых в теории подобия и размерностей.

12.2. Аналитические методы

5. Контактные задачи для цилиндрических опор без учета износа сводятся к интегральным уравнениям с постоянными пределами (Фредгольма), а с учетом износа к интегральным уравнениям с переменными пределами (Вольтерра). Использование винклеровской модели основания приводит к интегральным уравнениям второго рода. **Особенность уравнений с износом** состоит в том, что **каждая точка, вступающая в контакт в процессе износа имеет свое начало временной координаты**.

При выборе аналитического методы решения уравнений, как правило, выбирают наиболее простые случаи, в частности, обходящие указанную особенность: **релаксационные задачи** (при заданном фиксированном перемещении); задачи с обратной парой вращения; задачи с использованием алгебраических моделей изнашивания. Во всех других случаях решение достигается путем отыскания специальных преобразований приводящих к аналитическому решению. Значительную пользу здесь оказывает **преобразование Лапласа,** переводящее интегральное уравнение в алгебраическое, а после решение последнего после обратного преобразования к конечному результату.

В этой главе рассмотрены также некоторые другие классы задач: обратная контактная задача с износом с определением параметров моделей изнашивания; подшипник из неоднородного по износу слоя; износ втулки бесконечной толщины; применение тригонометрического усеченного ряда для учета податливости.

●Выполненные решения дают представление о возможностях получить аналитическое решение для разных классов задач с износом. Перспективным здесь является повышение точности и обоснование корректности выполненных решений.

6. При износе превышающем упругие контактные перемещения податливостью опоры можно пренебречь. Для жесткого контакта уравнения и решение задачи упрощаются, и доводится до простых расчетных формул. При учете податливости в подавляющем большинстве случаев задача сводится к интегралам, которые в элементарных функциях не берутся. Для этих случаев предложено разлагать подынтегральные функции в степенные ряды. Полученные при этом расчетные формулы достаточно точны и могут использоваться в расчетах.

●Перспективными являются способы, сочетающие преобразование Лапласа для интегральных уравнений Вольтерра в сочетании с представлениями опор скольжения в виде жесткого основания.

7. Особый класс узлов трения представляют собой **подшипники качения с неподвижным внутренним кольцом** на оси и вращающимся наружным кольцом. При пульсирующей нагрузке сопряжение внутреннего кольца с осью при малых смещениях испытывает особый вид износа – фреттинг-коррозию. Величина износа в этом случае определяется величиной относительного проскальзывания цилиндрических поверхностей кольца и оси. Контактная задача в этом случае сводится к интегральному уравнению с учетом трения. На первом этапе решается уравнение без износа и определяется величина микропроскальзывания, а на втором определяется износ. Главной особенностью здесь является учет касательной податливости и шероховатости контактирующих тел. Подробные методические примеры указывают на достоверность полученных результатов решения задачи.

●Выполненное решение является основой для разработки основ проектирования, расчета и методов борьбы с фреттинг коррозией в сопряжениях внутреннего кольца подшипника качения с неподвижной осью – самым распространенным сопряжением колес транспортных средств, таких, как автомобили, автобусы, троллейбусы и др.

8. Установить закономерности контактного взаимодействия в некоторых случаях дают возможность конструктивные методы повышения износостойкости узла трения. К таким задачам относится контакт вала и подшипника **при сопряжении с натягом, при наличии износа**. Наличие постоянной площадки контакта и релаксирования давлений по мере износа позволило в этом случае получить точное решение интегрального уравнения при наличии радиальной нагрузки.

●Сопряжения вала и подшипника с малым натягом является перспективным конструкторским решением, особенно в случаях, когда требуется повышенная точность позиционирования вала. Применение современных антифрикционных материалов с малым коэффициентом трения в этом случае не является препятствием для использования этого решения на практике.

9. Проблема продления срока службы **замков буровых колонн** едва ли не самая острая в буровой технике. Причиной этого является сверхтяжелые условия взаимодействия замка и обсадной трубы или абразивной поверхности скважины из песка и камня. К жестким абразивным условиям износа добавляются также сверхвысокие контактные давления от потери устойчивости колонны под действия веса ее при бурении. Постановка и решение задачи облегчено тем, что контакт идет по малой площадке контакта при большом зазоре. Задача сведена к дифференциальному уравнению, которое при $m = 1$ решено точно, а при m №1 приближенно. Рассмотрены различные случаи кинематики движения замка по обсадной трубе: при одностороннем скольжении и при круговом скольжении. Примеры расчетов с учетом реальных условий показывают степень достоверности решений.

●Разработанная методика расчетов на износ замков буровых колонн позволяет определить эффективность мероприятий по повышению срока службы замков на стадии разработки этих мероприятий, и при широкой эксплуатационной проверке. Это может дать существенную экономию средств, выделяемых на борьбу с износом замков.

10. К особым или специальным условиям мы здесь относим следующее: **учет одновременного износа вала и втулки; обратная пара трения; износ при возвратно–поступательном** (качательном) движении; износ при периодической нагрузке. В некоторых указанных случаях в частности для жесткого контакта, удается получить простые расчетные формулы, в других получить решение в квадратурах или интегралах, которые не берутся. Решения в этих случаях выполняется численно. Наиболее кинематически сложный случай имеет место при качательном режиме работы узла. При этом как уравнения, так и решения, зависят от величины узлов качания в некотором диапазоне амплитуд.

●Постановки и решения задач этой главы подчеркивают и расширяют диапазон разного рода задач и методов их общей систематизации часто требуют новых постановок и решений.

12.3. Итерационный метод ОФП

11. Число контактных задач с износом, для которых найдены аналитические решения, достаточно ограничено. Сложность и многократная нелинейность контактных задач требуют применения численных методов. Алгоритмы численных методов решения интегральных методов широко распространены и хорошо известны. Однако применение подавляющего большинства этих методов либо неэффективно, либо вообще затруднено. В условиях многократной нелинейности для реализации и модификации оказался наиболее эффективным **итерационный метод функциональных поправок Соколова**. Метод оказался настолько удачным, что уже первое приближение дает удовлетворительную точность.

12. Модификация метода здесь состоит главным образом, **в адаптации его основных положений для многократно нелинейных контактных задач с учетом износа**. Сначала на примере общего случая степенной нелинейной модели изнашивания показана процедура метода, как для кинематической, так и силовой форм нагружения, и показан алгоритм итерационной процедуры. Затем показан алгоритм решения задачи с учетом перекоса и переменных коэффициентов трения. Даны оценки точности итерации.

●Из всех численных методов решения интегральных уравнений для многократно–нелинейных задач метод осреднения функциональных поправок следует признать наиболее эффективным, вобравшим в себя все лучшие стороны известных итерационных методов решения интегральных уравнений.

13. Еще один новый класс контактных задач рассмотрен методом ОФП на примере износа проушины. Отличительной особенностью этого класса задач является учет изгиба цилиндрической поверхности опоры. Опора, рассматривается как кольцо, изгибающееся по теории тонких колец с одновременным контактным деформированием винклеровского основания. Интегральное уравнение задачи с учетом трения и износа и усложненное изгибными деформациями успешно решено МОФП. Даны примеры численного решения.

●Учет изгиба основания опоры скольжения существенно расширяет круг контактных задач с износом, эффективно решаемых итерационным методом. Это дает возможность рассчитывать на износ гибкие элементы узлов в частности, пластинчатых цепей.

14. Итерационный метод **ОФП по структуре и по основной идее** ближе всего располагается к решению интегрального **уравнения с вырожденным ядром** (то есть представленным в виде произведения функций). При этом использовано приближенное представление интеграла с выносом среднего интеграла от искомой функции. В этой части процедура совпадает с приближенным операционным исчислением (ПОИ) Мальцева.

С другой стороны процедура ПОИ по форме близка к первому члену итерационной процедуры Лаврентьева. В итоге следует, что итерационный метод ОФП Соколова интегрировал в себе идеи метода вырожденного ядра, приближенного операционного исчисления, и итерационного метода Лаврентьева. Очевидно, этот симбиоз и является основной причиной высокой эффективности метода ОФП.

●При рассмотрении итерационных методов, особенно ОФП, возникает мысль об общности между математическим аппаратом теории автоматического регулирования и алгоритмами итерационных методов. Здесь связь итераций через ключевую формулу соответствует обратной связи в ТАУ. Если установить четкие соотношения этой связи, то возможно установить простые условия сходимости.

Выводы

Разработаны, исследованы и использованы на практике система следующих принципиально новых методов решения задач контактной трибомеханики:

1) метод алгебраических уравнений;
2) вариационно-экспериментальный метод;
3) обобщенный метод подобия и приведенного радиуса в задачах без износа и с износом;
4) метод решения квазигерцевских задач как без учета, так и с учетом износа;
5) предложенные методы реализованы в расчетах подшипников скольжения;
6) для расчетов напряженного состояния в опасных точках и предложены прямые методы, не требующие рассмотрения полной системы уравнений;
7) обосновано рассмотрение механического контакта как пятого вида взаимодействия в физике.

Литература

1. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Контактные задачи в трибологии. – М.: Машиностроение, 1988. – 256 с.

2. Кузьменко А.Г. Методи розрахунків і випробувань на зношування та надійність. – Хмельницький: ТУП, 2002. – 151 с.

3. Кузьменко А.Г. Метод алгебраических уравнений в контактной механике. – Хмельницкий: ХНУ, 2006. – 447 с.

4. Кузьменко А.Г. Пластический контакт. Вариационно-экспериментальный метод. Хмельницкий: ХНУ, 2009. – 390 с.

5. Кузьменко А.Г. Напряжения в контакте. – Хмельницкий: ХНУ, 2008. – 349с.

6. Кузьменко А.Г., Любин А.Г. Контактная механика и расчеты на износ опор скольжения. – Хмельницкий: ХНУ, 2008. – 550 с.

7. Кузьменко А.Г. Прикладная теория методов испытаний на износ: Хмельницкий: ХНУ, 2008. – 579 с.

8. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.

9. Кузьменко А.Г. Развитие методов контактной трибомеханики. – Хмельницький: ХНУ, 2010. – 270 с.

Надійшла 30.03.2011