

**МЕТОДИКА ВИЗНАЧЕННЯ ОСОБЛИВИХ ТОЧОК ЧЕБИШЕВА
ДЛЯ СИНТЕЗУ ВАЖИЛЬНИХ ПРЯМОЛІНІЙНО-НАПРЯМНИХ МЕХАНІЗМІВ**

В роботі розглядається питання синтезу важільних прямолінійно-напрямних механізмів методами кінематичної геометрії. В шатунній площині важільних механізмів існують певні особливі точки, використання яких дозволяє отримати шатунні криві з ділянками наближено постійної кривизни, що дозволяє синтезувати кругові та прямолінійно-напрямні механізми, а на їх основі – механізми із зупинкою вихідної ланки. Однією з таких особливих точок є точка Чебишева. Розроблено аналітично-числову методику визначення таких точок, що може бути використана для проведення синтезу таких механізмів за різними критеріями.

Ключові слова: важільні механізми, напрямні механізми, точки Чебишева, зупинка.

V.O. KHARZHEVSKYI
Khmelnitskyi National University

**THE METHOD OF DETERMINATION OF THE CHEBYSHEV'S POINTS FOR THE
SYNTHESIS OF THE LINKAGE STRAIGHT-LINE MECHANISMS**

Abstract – The article is dedicated to the synthesis of the linkage path generating mechanisms which could trace a straight line by a coupler point. These mechanisms have their own wide application in machine building and can be used for the synthesis of the dwell mechanisms.

For the synthesis of the linkage path generating mechanisms methods of kinematic geometry can be applied. It is known that for the synthesis of such mechanisms special coupler plane points can be found. These points are – cubic of stationary curvature points, inflection points and, in particular – Ball's points, Burmester's points and Chebyshev's points. This article deals with the synthesis procedure of such mechanisms using Chebyshev's points: it is an important practical task to find such points for the given values of the length of the links of basic four-bar linkage. To solve this task, combined analytical and numerical method was developed.

Determination of the Chebyshev's points enables to find a wide range of straight-line linkage mechanisms with 4-th order of tangency. It provides to designer a wide range of mechanisms which can be used as a path generators and dwell mechanisms.

Keywords: linkages, path generators, Chebyshev's points, dwell.

Важільні прямолінійно-напрямні механізми та побудовані на їх основі циклові механізми із зупинкою вихідної ланки мають широке практичне використання при проектуванні сучасних вітчизняних та зарубіжних машин, про що свідчить багато прикладів їх практичного впровадження в різних галузях машинобудування. Такі механізми мають ряд переваг перед аналогічними механізмами, зокрема кулачковими, внаслідок відсутності вищих кінематичних пар у своєму складі. Однак проблема більш широкого впровадження важільних механізмів на практиці полягає у досить складній процедурі їх синтезу.

Останнім часом, у зв'язку зі стрімким розвитком комп'ютерних технологій, з'явилась можливість розв'язувати такі задачі чисельно, розробляючи для цього комбіновані аналітично-числові методи. Це дає можливість проводити багатокритеріальний синтез та оптимізацію таких механізмів за різними критеріями, а також визначити межі існування таких механізмів, що дозволяє конструктору у зручній формі отримати інформацію щодо характеристик проєктованих механізмів.

Як відомо, всі методи синтезу важільних напрямних механізмів та побудованих на їх основі механізмів із зупинкою вихідної ланки можна розділити на 2 групи – алгебраїчні методи П.Л. Чебишева [3,5,8], в яких використовується теорія функцій, що найменше відхиляються від нуля, а також методи кінематичної геометрії, започатковані німецьким вченим Л. Бурместером [7]. В даній роботі ми будемо використовувати методи кінематичної геометрії, теоретичні основи якої були закладені вченими німецької школи теорії синтезу механізмів – Л. Бурместером [7], Р. Мюллером [10], Р. Бейером [1], В. Ліхтенхельдтом [4]. Детальний огляд сучасних методів синтезу важільних механізмів, зокрема прямолінійно-напрямних, наведено у роботах [9,12].

Відповідно до методів кінематичної геометрії, для синтезу напрямних механізмів можуть бути використані особливі точки шатунної площини, які характеризуються тим, що не тільки знаходяться на шатунній кривій механізму, але й мають в цій точці рівні похідні з дотичним кругом кривизни до n -го порядку включно. Це визначає умову дотику n -го порядку з кругом кривизни або дотичною прямою.

Характерним випадком у проектуванні прямолінійно-напрямних механізмів методами кінематичної геометрії є використання точок Болла, що забезпечують дотик 3-го порядку зі своєю дотичною [1,2,6]. Однак для проектування таких механізмів можуть бути використані також точки Чебишева, що є частковим випадком точок Болла і забезпечують дотик 4-го порядку [2, 11]. На відміну від точок Болла, які існують в кожному положенні шатунної площини (за винятком двох – у нескінченності), точки Чебишева існують лише в деяких з них. В роботах [1,2,10] наведені теоретичні умови існування точок Чебишева, а дослідженню прямолінійно-напрямних механізмів на базі точок Чебишева присвячена, зокрема, робота Відовіча та Тесара [11], але наведена в ній методика має суттєві недоліки, зокрема: 1) визначення розмірів проводиться за діаграмами механізмів точок Чебишева відповідно до заданої довжини та точності прямолінійної ділянки, але на практиці прямолінійна ділянка зазвичай не збігається з теоретичною і

продовжується далі з іншою точністю (що для практики має суттєве значення); 2) неможливо правильно синтезувати механізм із заданою величиною зупинки вихідної ланки, оскільки величина зупинки буде не менше наперед заданої, але не обов'язково рівна їй; 3) наведені результати (діаграми) не передбачають випадку синтезу за наперед заданими розмірами базового механізму; 4) діаграми містять однакові, але масштабовані по всім параметрам кінематичні схеми механізмів.

Таким чином, метою даної роботи є розробка універсального аналітично-числового методу для визначення положення точок Чебишева в шатунній площині важільних механізмів, що дозволяє проводити проектування прямолінійно-напрямних та побудованих на їх основі механізмів із зупинкою вихідної ланки.

Розглянемо важільний прямолінійно-напрямний механізм, на базі якого можна побудувати механізм із зупинкою вихідної ланки (рис. 1). Механізм працює наступним чином: до кривошипа OA приєднано діаду $AB-BC$ 2-го класу 1-го виду (за класифікацією Ассура-Артоболевського), шатунна точка D якої описує шатунну криву, що на певній ділянці має наближено-прямолінійну ділянку. Під час проходження точкою D цієї ділянки, вихідна ланка приєднаної групи 5-го виду (та її точка E) буде мати наближений вистій в одному з крайніх положень. Питання полягає у методі вибору положення точки у шатунній площині, яка б забезпечувала дотик якомога більш високого порядку, що теоретично має забезпечувати триваліші ділянки наближення.

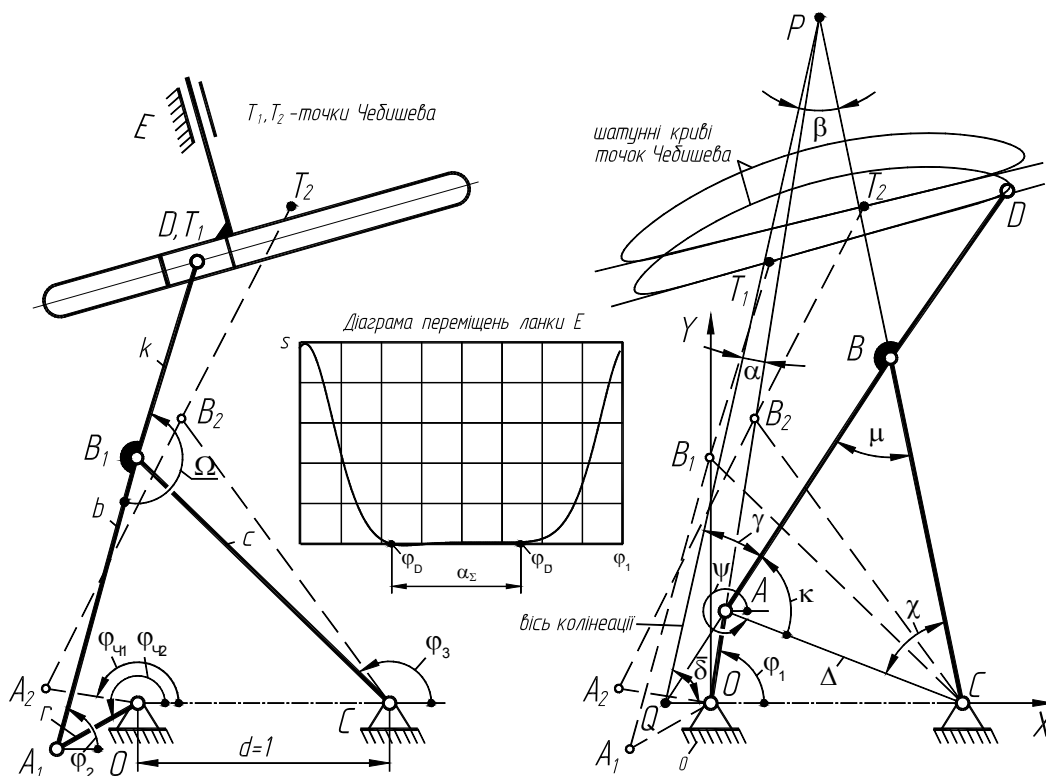


Рис. 1. Використання точок Чебишева для синтезу важільних механізмів із зупинкою вихідної ланки

Один із засновників теорії кінематичної геометрії нескінченно близьких положень плоскої фігури, німецький вчений Рейнгольд Мюллер розробив ряд математичних методів синтезу важільних напрямних механізмів, зокрема, з дотиками високих порядків (від 3-го до 5-го). Так, саме Мюллером вперше розроблена методика визначення точок Бурместера для шатунної площини, в яких спостерігається дотик 4-го порядку з кругом кривизни. Для того, щоби мати можливість систематично вивчати питання, пов'язані з дотиком 3-го порядку кривої з дотичною або кругом кривизни, Мюллер розглядав чотири нескінченно близьких положень плоскої фігури, та, продовжуючи ці дослідження, розглядав рух через п'ять нескінченно близьких положень. Для цього Мюллером була розроблена спеціальна теорія полюсів повороту та полюсів звороту вищих порядків [1, 10]. Для координат полюсів повороту та полюсів звороту ним були виведені рекурентні формули, якщо рух задається за допомогою центроїд. Зокрема, для плоского шарнірного чотириланкового механізму ним були визначено умову того, щоби в положенні системи, що розглядається, траєкторія деякої точки шатунної площини (рулетти) мала б з дотичною прямою дотик 4-го порядку. Я. Геронімус у роботі [2] називав такі особливі точки точками Чебишева. Відповідно до Мюллера [1,10], має виконуватись наступна умова (рис. 1):

$$2 \operatorname{ctg} \bar{\delta} = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \gamma (1 + \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta). \quad (1)$$

Проте ця умова не дозволяє провести визначення положення точок Чебишева у шатунній площині механізму, а лише показує умову, яка буде виконуватись при теоретичному існуванні точок Чебишева в даному положенні механізму. Далі ми розглянемо розроблену аналітично-числову методика визначення точок Чебишева, а умову (1) будемо використовувати для графічної перевірки правильності отриманих результатів.

Методику визначення положення точок Чебишева у шатунній площині розглянемо на прикладі шарнірного чотириланкового механізму. Оскільки, як було вже зазначено, точка Чебишева характеризується рівністю перших чотирьох похідних шатунної кривої та дотичної прямої в даній точці, ця умова, очевидно, може бути записана як рівність перших двох похідних від кривизни шатунної кривої (кривизна шатунної кривої виражається через другу похідну від переміщень шатунної точки). Зокрема, як зазначено у [2], умовами наявності точки Чебишева в шатунній площині буде:

$$K = 0; K' = \frac{dK}{d\varphi_1} = 0; K'' = \frac{d^2K}{d\varphi_1^2} = 0. \quad (2)$$

Кривизна шатунної кривої, як відомо, визначається за формулою:

$$K = \frac{x'_D y''_D - x''_D y'_D}{\sqrt{[x'^2_D + y'^2_D]^3}}. \quad (3)$$

Умова $K = 0$ забезпечить наявність точки розпрямлення (перегину) кривої, тобто виродження круга кривизни у дотичну пряму. Перша похідна від кривизни шатунної кривої механізму:

$$K' = \frac{dK}{d\varphi_1} = \frac{x'_D y'''_D - x'''_D y'_D}{\sqrt{[x'^2_D + y'^2_D]^3}} - \frac{3(x'_D y''_D - x''_D y'_D)(x'_D x''_D + y'_D y''_D)}{\sqrt{[x'^2_D + y'^2_D]^5}}. \quad (4)$$

Умова $K' = 0$ забезпечить виконання умови дотику не нижче 3-го порядку зі своїм кругом кривизни або дотичною лінією (забезпечить умову знаходження точки на кривій Бурместера – кривій кругових точок). Як відомо [2], одночасне виконання умов $K = K' = 0$ визначає точку Болла.

Друга похідна від кривизни шатунної кривої $K'' = d^2K/d\varphi_1^2$:

$$K'' = \frac{x'_D y^{IV}_D - x^{IV}_D y'_D + x''_D y''_D - x''_D y''_D - x^{IV}_D y'_D}{\sqrt{[x'^2_D + y'^2_D]^3}} - \frac{3(x'_D y'''_D - x'''_D y'_D)(x'_D x''_D + y'_D y''_D)}{\sqrt{[x'^2_D + y'^2_D]^5}} - \frac{3(x'_D y''_D - x''_D y'_D)(x'_D x''_D + y'_D y''_D)}{\sqrt{[x'^2_D + y'^2_D]^5}} \times \left[\frac{x''_D^2 + y''_D^2 + x'_D x'''_D + y'_D y'''_D}{x'_D x''_D + y'_D y''_D} + \frac{x'_D y'''_D - x'''_D y'_D}{x'_D y''_D - x''_D y'_D} - \frac{5(x'_D x''_D + y'_D y''_D)(x'_D x''_D + y'_D y''_D)}{(x'_D x''_D + y'_D y''_D)(x'^2_D + y'^2_D)} \right]; \quad (5)$$

Як видно з наведених формул (3)-(5), для визначення точок Чебишева необхідно визначити похідні від переміщень шатунної точки D механізму до 4-го порядку включно.

Визначимо координати точки A кривошипа та перші чотири похідні від кута φ_1 , що є параметром та однозначно визначає його положення ($0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi$):

$$\begin{aligned} x_A &= r \cos \varphi_1; x'_A = -r \sin \varphi_1; x''_A = r \sin \varphi_1; x'''_A = r \cos \varphi_1; x^{IV}_A = -r \sin \varphi_1; \\ y_A &= r \sin \varphi_1; y'_A = r \cos \varphi_1; y''_A = -r \sin \varphi_1; y'''_A = -r \cos \varphi_1; y^{IV}_A = r \sin \varphi_1. \end{aligned} \quad (6)$$

Визначимо величину допоміжної лінії Δ , кута δ та кута передачі μ :

$$\Delta = \sqrt{(d - x_A)^2 + y_A^2}; \mu = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - \Delta^2}{2bc}\right); \delta = \arccos\left(\frac{b^2 + \Delta^2 - c^2}{2b \cdot \Delta}\right); \quad (7)$$

Визначимо величину кутів φ_2 та φ_3 , що визначають положення шатуна та коромисла:

$$\varphi_2 = \psi + \delta; \varphi_3 = \psi - \kappa + \pi,$$

де

$$\kappa = \pi - \delta - \mu; \psi = \arctg(d - x_A / y_A). \quad (8)$$

Переміщення точки B механізму визначаємо наступним чином:

$$x_B = x_A + b \cos \varphi_2; y_B = y_A + b \sin \varphi_2. \quad (9)$$

Координати шатунної точки D визначаємо за аналогічними формулами (як додаткову точку шатуна):

$$x_D = x_B + k \cos(\varphi_2 + \Omega - \pi); y_D = y_B + k \sin(\varphi_2 + \Omega - \pi). \quad (10)$$

Перша та друга похідні від кутів φ_2 та φ_3 :

$$\varphi'_2 = \frac{x'_A \cos \varphi_3 + y'_A \sin \varphi_3}{b \sin(\varphi_2 - \varphi_3)}; \varphi'_3 = \frac{-x'_A \cos \varphi_2 - y'_A \sin \varphi_2}{c \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}; \quad (11)$$

$$\varphi_2'' = \frac{x_A'' \cos \varphi_3 + y_A'' \sin \varphi_3 - b(\varphi_2')^2 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) + c(\varphi_3')^2}{b \sin(\varphi_2 - \varphi_3)}; \quad (12)$$

$$\varphi_3'' = \frac{-x_A'' \cos \varphi_2 - y_A'' \sin \varphi_2 - c(\varphi_2')^2 \cos(\varphi_3 - \varphi_2) + b(\varphi_2')^2}{c \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}; \quad (13)$$

Для визначення похідних високих порядків (до четвертих включно) від переміщень шатунної точки D механізму, необхідно, зокрема, визначити третю та четверту похідні від кутів φ_2 та φ_3 , що визначають положення ланок механізму:

$$\varphi_2''' = \frac{d^3 \varphi_2}{d\varphi_1^3}, \varphi_3''' = \frac{d^3 \varphi_3}{d\varphi_1^3}, \varphi_2^{IV} = \frac{d^4 \varphi_2}{d\varphi_1^4}, \varphi_3^{IV} = \frac{d^4 \varphi_3}{d\varphi_1^4}. \quad (14)$$

Очевидно, що пряме обчислення похідних цих величин, записаних у формі (12), (13) не є доцільним, оскільки в цьому випадку отримаємо досить громіздкий розв'язок (про що свідчать результати проведених розрахунків за допомогою символічного процесору системи Mathcad). Для спрощення розрахунків, зробимо заміну у такому вигляді:

$$\varphi_2'' = A + B - C + D; \quad \varphi_3'' = F_1 + F_2 + F_3 - F_4, \quad (15)$$

де, пропускаючи проміжні перетворення, замінюючи коефіцієнти можна записати таким чином:

$$A = \frac{x_A'' \cos \varphi_3}{b \sin(\varphi_2 - \varphi_3)}; \quad B = A \operatorname{tg} \varphi_3 \operatorname{tg} \varphi_1; \quad C = \operatorname{ctg}(\varphi_2 - \varphi_3) \varphi_2'^2; \quad D = \frac{c \varphi_3'^2}{b \sin(\varphi_2 - \varphi_3)}; \quad (16)$$

$$F_1 = \frac{b \cos \varphi_2}{c \cos \varphi_3} A; \quad F_2 = \frac{B}{A} \operatorname{ctg} \varphi_3 \operatorname{tg} \varphi_2 F_1; \quad F_3 = \left(\frac{\varphi_3'}{\varphi_2'} \right)^2 C; \quad F_4 = D \left(\frac{b \varphi_2'}{c \varphi_3'} \right)^2; \quad (17)$$

Вираз для обчислення третьої похідної від кута φ_2 тоді запишеться таким чином:

$$\varphi_2''' = A' + B' - C' + D', \quad (18)$$

похідні від коефіцієнтів A, B, C, D визначаються як $A' = \frac{dA}{d\varphi_1}, B' = \frac{dB}{d\varphi_1}, C' = \frac{dC}{d\varphi_1}, D' = \frac{dD}{d\varphi_1}$:

$$A' = -A(\operatorname{tg} \varphi_1 + \varphi_3' \operatorname{tg} \varphi_3 + \operatorname{ctg}(\varphi_2 - \varphi_3)(\varphi_2' - \varphi_3')); \quad B' = \frac{A'B}{A} + \frac{2B}{\sin 2\varphi_1} + \frac{2\varphi_3' B}{\sin 2\varphi_3}; \quad (19)$$

$$C' = \left[\frac{2\varphi_2''}{\varphi_2'} + \operatorname{ctg}(\varphi_2 - \varphi_3)(\varphi_2' - \varphi_3') \right] C + \varphi_2'^2 (\varphi_2' - \varphi_3'); \quad D' = \left[\frac{2\varphi_2''}{\varphi_2'} - \operatorname{ctg}(\varphi_2 - \varphi_3)(\varphi_2' - \varphi_3') \right] D; \quad (20)$$

Третю похідну від кута φ_3 , що визначає положення коромисла, можна записати наступним чином:

$$\varphi_3''' = F_1' + F_2' + F_3' - F_4', \quad (21)$$

де відповідні похідні від коефіцієнтів F_1, F_2, F_3, F_4 :

$$F_1' = \left(\frac{A'}{A} - \varphi_2' \operatorname{tg} \varphi_2 + \varphi_3' \operatorname{tg} \varphi_3 \right) F_1; \quad F_2' = \left(\frac{F_1'}{F_1} + \frac{B'}{B} - \frac{A'}{A} + \frac{2\varphi_2'}{\sin 2\varphi_2} - \frac{2\varphi_3'}{\sin 2\varphi_3} \right) F_2; \\ F_3' = \left(\frac{C'}{C} - \frac{2\varphi_2''}{\varphi_2'} + \frac{2\varphi_3''}{\varphi_3'} \right) F_3; \quad F_4' = \left(\frac{D'}{D} - \frac{2\varphi_2''}{\varphi_2'} + \frac{2\varphi_3''}{\varphi_3'} \right) F_4; \quad (22)$$

Четверта похідна від кута φ_2 , що визначає положення шатуна b механізму:

$$\varphi_2^{IV} = A'' + B'' - C'' + D''; \quad (23)$$

Запишемо вирази для обчислення відповідних похідних:

$$A'' = A \left[(\varphi_2' - \varphi_3')^2 - \operatorname{ctg}(\varphi_2 - \varphi_3)(\varphi_2'' - \varphi_3'') + (\operatorname{ctg}(\varphi_2 - \varphi_3))^2 (\varphi_2' - \varphi_3')^2 - \left(\frac{\varphi_3'}{\cos \varphi_3} \right)^2 - \operatorname{tg}^2 \varphi_1 - 1 \right] - \\ - A' \left[\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{ctg}(\varphi_2 - \varphi_3)(\varphi_2' - \varphi_3') \right] - \operatorname{tg} \varphi_3 (A \varphi_3'' + A' \varphi_3'); \quad (24)$$

$$B'' = \frac{A'B' + A''B}{A} - \frac{A'^2 B}{A^2} + \frac{2B' - 4B \cdot \operatorname{ctg}(2\varphi_1)}{\sin(2\varphi_1)} + \frac{2B\varphi_3'' + 2B'\varphi_3' - 4B\varphi_2'' \operatorname{ctg}(2\varphi_3)}{\sin(2\varphi_3)}; \quad (25)$$

$$C'' = C_1 \left(\frac{\varphi_2'''}{\varphi_2''} + \frac{C'}{C} \right) - C \left(2 \left(\frac{\varphi_2''}{\varphi_2'} \right)^2 - \operatorname{ctg}(\varphi_2 - \varphi_3) (\varphi_2'' - \varphi_3'') + \frac{(\varphi_2' - \varphi_3')^2}{\sin^2(\varphi_2 - \varphi_3)} \right) - C' \operatorname{ctg}(\varphi_2 - \varphi_3) (\varphi_2' - \varphi_3'); \quad (26)$$

$$D'' = 2 \left[\frac{D\varphi_3''' + D'\varphi_3''}{\varphi_3'} - D \left(\frac{\varphi_3''}{\varphi_3'} \right)^2 \right] + D \left(\frac{\varphi_2' - \varphi_3'}{\sin(\varphi_2 - \varphi_3)} \right)^2 - D \operatorname{ctg}(\varphi_2 - \varphi_3) (\varphi_2' - \varphi_3') \left(\frac{\varphi_2'' - \varphi_3''}{\varphi_2' - \varphi_3'} + \frac{D'}{D} \right); \quad (27)$$

Четверта похідна від кута φ_3 , що визначає положення коромисла c механізму:

$$\varphi_3^{IV} = F_1'' + F_2'' + F_3'' - F_4''; \quad (28)$$

де $F_1'' = \frac{d^2 F_1}{d\varphi_1^2}; F_2'' = \frac{d^2 F_2}{d\varphi_1^2}; F_3'' = \frac{d^2 F_3}{d\varphi_1^2}; F_4'' = \frac{d^2 F_4}{d\varphi_1^2}$, які після відповідних перетворень та спрощень,

запишуться наступним чином:

$$F_1'' = \left(\frac{F_1'}{F_1} + \frac{A''}{A'} - \frac{A'}{A} \right) \left(\frac{A'}{A} F_1 \right) - \left(\frac{\varphi_2''}{\varphi_2'} + \frac{F_1'}{F_1} + \frac{2\varphi_2'}{\sin 2\varphi_2} \right) (\varphi_2' \operatorname{tg} \varphi_2 F_1) + \left(\frac{\varphi_3''}{\varphi_3'} + \frac{F_1'}{F_1} + \frac{2\varphi_3'}{\sin 2\varphi_3} \right); \quad (29)$$

$$F_2'' = \frac{F_1' F_2'}{F_1} \left(\frac{F_1''}{F_1'} + \frac{F_2'}{F_2} - \frac{F_1'}{F_1} \right) + \frac{B' F_2'}{B} \left(\frac{F_2'}{F_2} + \frac{B''}{B'} - \frac{B'}{B} \right) - \frac{A' F_2'}{A} \left(\frac{F_2'}{F_2} + \frac{A''}{A'} - \frac{A'}{A} \right) + \frac{2\varphi_2' F_2'}{\sin 2\varphi_2} \left(\frac{\varphi_2''}{\varphi_2'} + \frac{F_2'}{F_2} - 2\varphi_2' \operatorname{ctg} 2\varphi_2 \right) - \frac{2\varphi_3' F_2'}{\sin 2\varphi_3} \left(\frac{\varphi_3''}{\varphi_3'} + \frac{F_2'}{F_2} - 2\varphi_3' \operatorname{ctg} 2\varphi_3 \right); \quad (30)$$

$$F_3'' = \frac{C' F_3'}{C} \left(\frac{F_3'}{F_3} + \frac{C''}{C'} - \frac{C'}{C} \right) - \frac{2\varphi_2' F_3'}{\varphi_2'} \left(\frac{\varphi_2''}{\varphi_2'} + \frac{F_3'}{F_3} - \frac{\varphi_2''}{\varphi_2'} \right) + \frac{2\varphi_3' F_3'}{\varphi_3'} \left(\frac{\varphi_3''}{\varphi_3'} + \frac{F_3'}{F_3} - \frac{\varphi_3''}{\varphi_3'} \right); \quad (31)$$

$$F_4'' = \frac{D' F_4'}{D} \left(\frac{F_4'}{F_4} + \frac{D''}{D'} - \frac{D'}{D} \right) - \frac{2\varphi_3' F_4'}{\varphi_3'} \left(\frac{\varphi_3''}{\varphi_3'} + \frac{F_4'}{F_4} - \frac{\varphi_3''}{\varphi_3'} \right) + \frac{2\varphi_2' F_4'}{\varphi_2'} \left(\frac{\varphi_2''}{\varphi_2'} + \frac{F_4'}{F_4} - \frac{\varphi_2''}{\varphi_2'} \right); \quad (32)$$

Швидкості, прискорення та похідні високих порядків точки B механізму:

$$x'_B = x'_A - b\varphi_2' \sin \varphi_2; y'_B = y'_A + b\varphi_2' \cos \varphi_2; \quad (33)$$

$$x''_B = x''_A - b\varphi_2'' \sin \varphi_2 - b(\varphi_2')^2 \cos \varphi_2; y''_B = y''_A + b\varphi_2'' \cos \varphi_2 - b(\varphi_2')^2 \sin \varphi_2; \quad (34)$$

$$x'''_B = b(\varphi_2')^3 \sin \varphi_2 - 3b\varphi_2' \varphi_2'' \cos \varphi_2 + x'''_A - b\varphi_2''' \sin \varphi_2; \quad (35)$$

$$y'''_B = y'''_A - 3b\varphi_2' \varphi_2'' \sin \varphi_2 - b(\varphi_2')^3 \cos \varphi_2 + b\varphi_2''' \cos \varphi_2; \quad (36)$$

$$x^{IV}_B = x^{IV}_A + b \cos \varphi_2 \left[(\varphi_2')^4 - 4\varphi_2' \varphi_2'' - 3(\varphi_2'')^2 \right] + b \sin \varphi_2 \left[6\varphi_2'' (\varphi_2')^2 - \varphi_2^{IV} \right]; \quad (37)$$

$$y^{IV}_B = y^{IV}_A + b \sin \varphi_2 \left[(\varphi_2')^4 - 4\varphi_2' \varphi_2'' - 3(\varphi_2'')^2 \right] - b \cos \varphi_2 \left[6\varphi_2'' (\varphi_2')^2 - \varphi_2^{IV} \right]; \quad (38)$$

Швидкості, прискорення та похідні високих порядків точки D механізму (шатунної точки):

$$x'_D = x'_B - k\varphi_2' \sin(\varphi_2 + \Omega - \pi); y'_D = y'_B + k\varphi_2' \cos(\varphi_2 + \Omega - \pi); \quad (39)$$

$$x''_D = x''_B - k\varphi_2'' \sin(\varphi_2 + \Omega - \pi) - k(\varphi_2')^2 \cos(\varphi_2 + \Omega - \pi); \quad (40)$$

$$y''_D = y''_B + k\varphi_2'' \cos(\varphi_2 + \Omega - \pi) - k(\varphi_2')^2 \sin(\varphi_2 + \Omega - \pi). \quad (41)$$

$$x'''_D = 3k\varphi_2' \varphi_2'' \cos(\varphi_2 + \Omega) + x'''_B + k \sin(\varphi_2 + \Omega) \left[\varphi_2''' - (\varphi_2')^3 \right]; \quad (42)$$

$$y'''_D = 3k\varphi_2' \varphi_2'' \sin(\varphi_2 + \Omega) + y'''_B - k \cos(\varphi_2 + \Omega) \left[\varphi_2''' - (\varphi_2')^3 \right]. \quad (43)$$

$$x^{IV}_D = x^{IV}_B - k \cos(\varphi_2 + \Omega) \left[(\varphi_2')^4 - 4\varphi_2' \varphi_2'' - 3(\varphi_2'')^2 \right] - k \sin(\varphi_2 + \Omega) \left[6\varphi_2'' (\varphi_2')^2 - \varphi_2^{IV} \right]; \quad (44)$$

$$y^{IV}_D = y^{IV}_B - k \sin(\varphi_2 + \Omega) \left[(\varphi_2')^4 - 4\varphi_2' \varphi_2'' - 3(\varphi_2'')^2 \right] + k \cos(\varphi_2 + \Omega) \left[6\varphi_2'' (\varphi_2')^2 - \varphi_2^{IV} \right]; \quad (45)$$

Слід зазначити, що в процесі виведення формул (16-46), з метою отримання більш компактних результатів використовувались відомі формули для перетворення тригонометричних виразів:

$$\begin{aligned}
 1 + \operatorname{tg}^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x}, \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), n \in \mathbb{Z}; \\
 1 + \operatorname{ctg}^2 x &= \frac{1}{\sin^2 x}, \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}; \\
 \sin x \cos x &= \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)).
 \end{aligned}
 \tag{46}$$

Таким чином, при проведенні розрахунків в розробленому програмному забезпеченні передбачено виключення з розрахунку точок, що відповідають положенням кривошипа, що кратні $\pi/2$ (оскільки розраховані значення внаслідок проведених тригонометричних перетворень прямують до нескінченності), замість них приймалися середні значення сусідніх положень. Оскільки розрахунки проводились з досить малим кроком $\varphi_1 = 0,1^\circ$ (для 3600 положень механізмів), така заміна є досить рівноцінною.

Формули (6)-(45) дозволяють визначити в аналітичному вигляді всі величини, що входять у формулу для другої похідної по кривизні шатунної кривої $K'' = d^2 K / d\varphi_1^2$.

Враховуючи аналітичні залежності, наведені вище, послідовність визначення точок Чебишева в шатунній площині шарнірного чотириланкового механізму буде наступною:

1. Вихідними параметрами для розрахунку є параметри механізму, а саме: довжина кривошипа $r = l_{OA}$, шатуна $b = l_{AB}$, а також коромисла $c = l_{BC}$. Відстань між нерухомими шарнірами механізму прийнята за одиницю: $d = l_{OC} = 1$ (щоби уникнути синтезу однакових, але масштабованих кінематичних схем).

2. Оскільки точки Чебишева є частковим випадком точок Болла, для яких виконуються умови (2), то, використовуючи методу, викладену у [6], спочатку проводимо визначення кривої Болла для механізму із заданими розмірами ланок r, b, c : крива представляє собою геометричне місце точок, які послідовно стають точками Болла при зміні положення шатунної площини, що визначається кутом повороту кривошипа φ_1 .

3. За формулою (5) проводимо розрахунок другої похідної від кривизни шатунної кривої K'' для механізмів кривої Болла. Приклад результатів проведеного розрахунку для механізмів із заданими довжинами шатуна b та коромисла c наведено на рисунку 2. Зазначимо, що на даній діаграмі показані значення K'' в діапазоні $-10 \leq K'' < 10$, оскільки в першу чергу нас цікавлять механізми, для яких виконується умова $K'' = 0$.

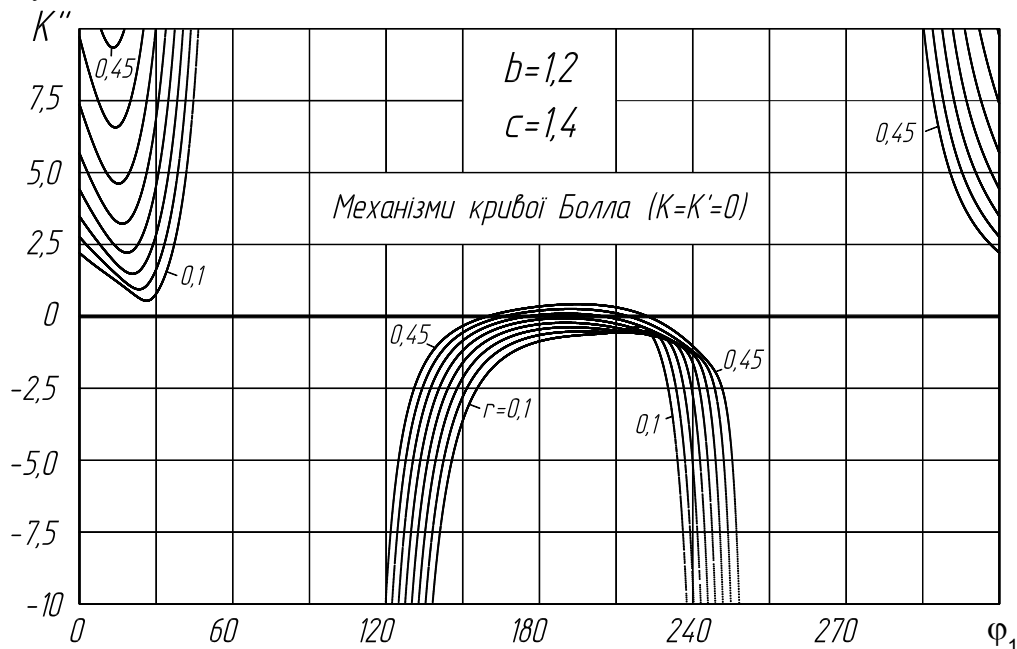


Рис. 2. Приклад діаграми $K''(\varphi_1)$ для визначення точок Чебишева

4. Наступним кроком є чисельна процедура визначення точок, для яких виконується умова $K'' = 0$. На рис. 2 наведено діаграму, з якої видно, що точки Чебишева можуть бути знайдені не для всіх базових чотириланкових механізмів. Наприклад, для заданих розмірів шатуна та коромисла ($b = 1,2; c = 1,4$) точки Чебишева для механізмів з довжинами кривошипів $r < 0,3$ не існують, а для більших

значень можна знайти дві точки Чебишева – причому це справедливо лише для цього конкретного випадку. В загальному випадку кількість знайдених точок буде різною і є предметом для подальших досліджень. Механізми точок Чебишева, знайдені по рис. 2 для $r = 0,37$, зображено з рис. 1: в даному прикладі обидва синтезовані механізми забезпечують вистой вихідної ланки великої тривалості ($\alpha_{\Sigma} > 150^\circ$).

З метою додаткової перевірки правильності отриманих результатів, для синтезованих механізмів проводилась графічна перевірка відповідно до умови (1), виведеної Р. Мюллером в класичній роботі [10].

Таким чином, в роботі розроблено аналітично-числовий метод визначення особливих точок шатунної площини – точок Чебишева, які забезпечують проектування важільних прямолінійно-напрямних механізмів та побудованих на їх основі механізмів із зупинкою вихідної ланки, який в подальшому може бути використаний для визначення меж існування таких механізмів з метою проведення багатокритеріального оптимізаційного синтезу.

Література

1. Бейер Р. Кинематический синтез механизмов. Основы теории метрического синтеза механизмов / Р. Бейер. – М. : Машгиз, 1959. – 318 с.
2. Геронимус Я. Л. Геометрический аппарат теории синтеза плоских механизмов / Я. Л. Геронимус. – М. : Гос. издательство физ.-мат. литературы, 1962. – 400 с.
3. Киницкий Я.Т. Шарнирные механизмы Чебышева с выстоем выходного звена / Я. Т. Киницкий. – К. : Вища школа, 1990. – 232 с.
4. Лихтенхельдт В. Синтез механизмов / В. Лихтенхельдт. – М. : Наука, 1964. – 228 с.
5. Саркисян Ю.Л. Аппроксимационный синтез механизмов / Ю. Л. Саркисян. – М. : Наука, 1982. – 303 с.
6. Харжевський В.О. Чисельно-аналітичний метод синтезу важільних механізмів з зупинкою вихідної ланки на базі несиметричного шарнірного чотириланкового механізму з використанням точок Болла / В.О. Харжевський, Я. Т. Киницкий // Вісник Технол. у-ту Поділля. – 2003. – № 4. – С. 43–54.
7. Burmester L. Lehrbuch der Kinematik / L. Burmester. – Leipzig, 1888. – 297 p.
8. Funk W. Unsymmetric Tchebysheff-type Straight-line Mechanisms / W. Funk, V. Gassmann //Proc. Tenth World Congress on the Theory of Mechanisms and Machines, vol. 1 Oulu, Finland, 1999, C. 222-226.
9. McCarthy J. Geometric Design of Linkages / J. McCarthy. – New York : Springer-Verlag, 2000. – 319 p.
10. Müller R., Beiträge zur Theorie des ebenen starren Gelenkvierecks, Festschrift Herzogl. Techn. Hochschule Carola Wilhelmina Braunschweig, 1897, C. 41-84.
11. Vidosic J., Tesar D. Selection of four-bar mechanisms having required approximate straight-line outputs. Part I. The general case of the Ball-Burmester point /Journal of mechanisms, 2(1), 1967, pp. 23-44.
12. Wang D. Kinematic Differential Geometry and Saddle Synthesis of Linkages /Wang D., Wang W. – John Wiley & Sons Singapore Pte. Ltd., 2015. – 450 p.

References

1. Bejer R. Kinematischej sintez mekhanizmov. Osnovy teorii metricheskogo sinteza mekhanizmov / R. Bejer. – М. : Mashgiz, 1959. – 318 s.
2. Geronimus Ja. L. Geometricheskij apparat teorii sinteza ploskikh mekhanizmov / Ja. L. Geronimus. – М. : Gos. izdatel'stvo fiz.-mat. literatury, 1962. – 400 s.
3. Kinickij Ja.T. Sharnirnye mekhanizmy Chebysheva s vystoem vykhodnogo zvena / Ja. T. Kinickij. – К. : Vishha shkola, 1990. – 232 s.
4. Likhtenkhel'dt V. Sintez mekhanizmov / V. Likhtenkhel'dt. – М. : Nauka, 1964. – 228 s.
5. Sarkisjan Ju.L. Approksimacionnyj sintez mekhanizmov / Ju. L. Sarkisjan. – М. : Nauka, 1982. – 303 s.
6. Kharzhevskiy V.O. Chysel'no-analitychnyy metod syntezu vazhil'nykh mekhanizmov z zupynkoyu vykhidnoyi lanky na bazi nesymetrychnoho sharnimoho chotyrylankovoho mekhanizmu z vykorystanniam tochk Bolla / V.O . Kharzhevskiy, Ya. T. Kinyts'ky // Visnyk Tekhnol. u-tu Podillya. – 2003. – # 4. – S. 43–54.
7. Burmester L. Lehrbuch der Kinematik / L. Burmester. – Leipzig, 1888. – 297 p.
8. Funk W. Unsymmetric Tchebysheff-type Straight-line Mechanisms / W. Funk, V. Gassmann //Proc. Tenth World Congress on the Theory of Mechanisms and Machines, vol. 1 Oulu, Finland, 1999, C. 222-226.
9. McCarthy, J., Geometric Design of Linkages, 2nd edition / McCarthy J., Soh G., Springer-Verlag, New York, 2011 – 448 p.
10. Müller R. Beiträge zur Theorie des ebenen starren Gelenkvierecks, Festschrift Herzogl. Techn. Hochschule Carola Wilhelmina Braunschweig, 1897, C. 41-84.
11. Vidosic J., Tesar D. Selection of four-bar mechanisms having required approximate straight-line outputs. Part I. The general case of the Ball-Burmester point /Journal of mechanisms, 2(1), 1967, pp. 23-44.
12. Wang D. Kinematic Differential Geometry and Saddle Synthesis of Linkages /Wang D., Wang W. – John Wiley & Sons Singapore Pte. Ltd., 2015. – 450 p.

Рецензія/Peer review : 26.5.2015 р.

Надрукована/Printed : 15.5.2015 р.
Рецензент: д.т.н., проф. Киницкий Я.Т.