СЕКЦИЯ: ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 539.3

Діхтярук Микола Миколайович, Ярецька Наталія Олександрівна
Хмельницький національний університет
(Хмельницький, Україна)

КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ НЕСКІНЧЕНОГО СТРИНГЕРА З ОДНІЄЮ ТА ДВОМА ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕННИМИ СМУГАМИ

Анотація. *В рамках лінеаризованої теорії пружності розглядаються плоскі контактні задачі про передачу навантаження від нескінченного стрингера до однієї та до двох однакових смуг з початковими напруженнями. Дослідження проведені в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій і різних варіантів теорії малих початкових деформацій, для довільної структури пружного потенціалу. За допомогою інтегрального перетворення Фур'є одержано основні інтегро - диференційні рівняння розв'язок яких представлено у вигляді квазірегулярних нескінченних систем алгебраїчних рівнянь. Досліджено вплив наявності початкових (залишкових) напружень у смугах на закон розподілу контактних напружень по лінії контакту з нескінченним стрингером.*

Ключові слова: *лінеаризована теорія пружності, початкові (залишкові) напруження, контактна задача, інтегральне перетворення Фур'є, стрингер.*

Дихтярук Николай Николаевич, Яреццкая Наталия Александровна
Хмельницкий национальный университет
(Хмельницкий, Украина)

КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ БЕСКОНЕЧНО СТРИНГЕРА С ОДНОЙ И ДВУМЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫМИ ПОЛОСАМИ

Аннотация. *В рамках линеаризованной теории упругости рассматриваются плоские контактные задачи о передаче нагрузки от бесконечного стрингера к одной и к двум одинаковым полосам с начальными напряжениями. Исследования проведены в общем виде для теории больших начальных деформаций и различных вариантов теории малых начальных деформаций, для произвольной структуры упругого потенциала. С помощью интегрального преобразования Фурье получено основные интегро - дифференциальные уравнения, решение которых представлены в виде квазирегулярных бесконечных систем алгебраических уравнений. Исследовано влияние наличия начальных (остаточных) напряжений в полосах на закон распределения контактных напряжений по линии контакта с бесконечным стрингером.*

Ключевые слова: *линеаризованная теория упругости, начальные (остаточные) напряжения, контактная задача, интегральное преобразование Фурье, стрингер.*

Diktyaruk Nicholas N., Yaretskaya Natalia A.
Khmelnytsky National University
(Khmelnytsky, Ukraine)

CONTACT INTERACTION OF INFINITE STRINGER WITH ONE AND BY TWO STRIPS WITH INITIAL STRESSES

Abstract. *The article is devoted to the research of problems of contact interaction of infinite elastic stringer with one and two identical clamped along one edge of pre-stressed strips. In general, the research was carried out for the theory of great initial and different variants of the theory of small initial deformations within the framework of linearized theory of elasticity with the elastic potential having arbitrary structure. The integral integer-differential equations are obtained using the integral Fourier transform. Their solution is represented in the form of quasiregular infinite systems of algebraic equations. In the article alsaw was investigated the influence of the initial (residual) stresses in strips on the law of distribution of contact stresses along the line of contact with an infinite stringer.*
Keywords: *linear elasticity theory, initial (residual) stresses, contact problem, integral Fourier transform, stringer.*

Вступ. Дослідження питань контактної взаємодії тонкостінних елементів у вигляді накладок (стрингерів) і покриттів різних геометричних форм з масивними деформованими тілами є досить актуальною проблемою як в теоретичному, так і в прикладному аспекті. Під час створення конструкцій і механізмів машин для поліпшення характеристик міцності і властивостей деталей, а також можливості їх використання в умовах підвищених температур, або в присутності агресивних середовищ, широко застосовуються різні покриття і підкріплюючі елементи. Оскільки такі деталі часто є важливими елементами конструкцій, то їх руйнування може призвести до катастрофічних наслідків. Тому необхідна їх регулярна діагностика. У теоретичному плані ця проблема може бути зведена до розгляду контактних задач про взаємодію накладок і включень з пружними тілами різних форм. Одним із важливих факторів, що суттєво впливають на надійність і довговічність інженерних конструкцій і деталей машин, є наявність в них початкових (залишкових) напружень. Не зважаючи на те, що дослідження впливу початкових напружень стали активно проводитися в нашій країні та за кордоном лише в кінці XX століття, можна перерахувати багато імен, досліджень і публікацій пов'язаних з цією тематикою [1 – 8]. При строгій постановці контактних задач для пружних тіл з початковими напруженнями, виникає необхідність залучення апарату нелінійної теорії пружності, що суттєво ускладнює побудову аналітичних розв'язків. Але у випадку великих (скінченних) напружень (деформацій) можна обмежитись розглядом лінеаризованої теорії пружності [1, 2]. Історично дослідження контактних задач в рамках лінеаризованої теорії пружності складалося по двох напрямках. Перший пов'язаний з дослідженнями контактної взаємодії тіл з конкретною формою пружного потенціалу. Це праці В.М. Александрова, Н.Х. Арутюняна та їх учнів. Другий підхід започаткований академіком НАН України О.М. Гузем і його учнями – професорами С.Ю. Бабичем і В.Б. Рудницьким. Їх дослідження просторових та плоских задач контактної взаємодії тіл з початковими (залишковими) напруженнями з довільною структурою пружного потенціалу для стисливих і нестисливих матеріалів у випадку теорії скінченних (великих) і декількох варіантів теорії малих початкових (залишкових) деформацій [1 – 3, 5, 8].

У даній роботі з використанням співвідношень лінеаризованої теорії пружності [1,2] представлено розв'язки контактних задач про контактну взаємодію нескінченного стрингера з однією і двома попередньо напруженими смугами. Дослідження виконано у загальному вигляді для стисливих і нестисливих тіл для теорії великих (скінченних) початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу. Дотримуючись [2 – 6] всі дослідження проведемо в координатах початкового деформованого стану y_i, що пов'язані з лагранжевими координатами x_i співвідношеннями $y_i = \lambda_i x_i \quad (i = 1,2)$, де λ_i - коефіцієнти видовжень, що визначають переміщення початкового стану в напрямках осей координат.

Контактна взаємодія нескінченного стрингера з попередньо напруженою смугою. Нехай пружна нескінченна смуга з початковими напруженнями, яка має товщину *t* і защемлена одним краєм, знаходиться в умовах плоскої деформації. Причому, дана смуга вільним краєм підсилена нескінченно довгим стрингером, що має товщину *h* (Рис. 1).

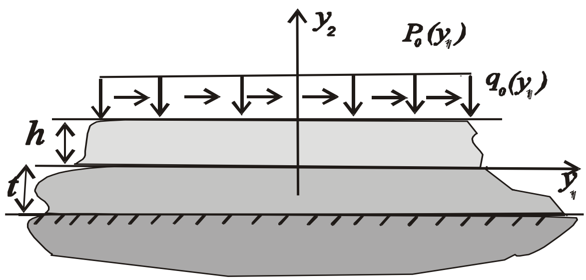

Рис. 1. Дія сил на підсилену смугу.

Вважатимемо що під дією вертикальних і горизонтальних сил інтенсивності стрингер в вертикальному напрямку згинається як звичайна балка, а в горизонтальному розтягується (стискається) як одновісно напружений стрижень. Тоді можна записати:

$$\frac{\partial u^{(1)}(y_1)}{\partial y_1} = \frac{1}{E_1 h} \int_{-\infty}^{y_1} [q(t) - q_0(t)] dt \qquad \forall y_1 \in (-\infty < y_1 < \infty) \qquad (1)$$

$$D \frac{d^4 v(y_1)}{dy_1^4} = P(y_1) - P_0(y_1) \qquad \forall y_1 \in (-\infty < y_1 < \infty) \qquad (2)$$

За умови повного контакту слід відмітити, що по лінії контакту мають виконуватись умови:

 ISSN 2524-0986

$$\frac{\partial v^{(1)}(y_1)}{\partial y_1} = \frac{\partial u_2^{(2)}(y_1)}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial u^{(1)}(y_1)}{\partial y_1} = \frac{\partial u_1^{(2)}(y_1)}{\partial y_1}, \quad (-\infty < y_1 > \infty) \quad (3)$$

де $u^{(1)}(y_1), v^{(1)}(y_1) -$ компоненти вектора переміщень в пружному стрингері, $u_1^{(2)}(y_1), u_2^{(2)}(y_1) -$ компоненти вектора переміщень в пружній смузі з початковими напруженнями.

Враховуючи контактні умови (3) разом (2), а також виразів для вертикальних і горизонтальних переміщень граничних точок вільних від защемлення, рівняння (1) для стисливих і нестисливих тіл, і дотримуючись [3], отримають вигляд:

$$u_1(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{11}(|y_1 - t|)p(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} h_{12}(y_1 - t)q(t)dt.$$

$$u_2(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{21}(y_1 - t)\, p(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} h_{22}(|y_1 - t|)q(t)dt. \quad (4)$$

де $h_{ij}(i, j = 1,2)$ – функції впливу для пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями, вирази яких задаються [3].

Врахувавши (1) – (4), отримаємо наступну систему інтегро – диференційних рівнянь:

$$D\frac{d^4}{dy_1^4}\left[\int_{-\infty}^{\infty} h_{11}(|y_1 - \tau|)p(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} h_{12}(y_1 - \tau)q(\tau)d\tau\right] = p(\tau) - p_0(\tau). \quad (5)$$

$$E_1 h\frac{d}{dy_1}\left[\int_{-\infty}^{\infty} h_{21}(y_1 - \tau)p(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} h_{22}(|y_1 - \tau|)q(\tau)d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty}[q(\tau) - q_0(\tau)]d\tau.$$

При умові, що на накладку діють тільки вертикальні сили $p_0(y_1)$, а $q_0(y_1) = 0$, то система (5) зводиться до одного інтегро – диференційного рівняння:

$$D\frac{d^4}{dy_1^4}\left[\int_{-\infty}^{\infty} h_{11}(|y_1 - \tau|)p(\tau)d\tau\right] = p(y_1) - p_0(y_1). \quad (6)$$

Рівняння (6) описує згин пружної накладки на пружній смузі з початковими (залишковими) напруженнями. У випадку, коли під дією горизонтальних сил $q_0(y_1)$ $\left(p_0(y_1) = 0\right)$ пружна накладка лише розтягується, отримаємо таке рівняння:

$$E_1 h\frac{d}{dy_1}\left[\int_{-\infty}^{\infty} h_{22}(|y_1 - \tau|)q(\tau)d\tau\right] = \int_{-\infty}^{y_1}[q(\tau) - q_0(\tau)]d\tau. \quad (7)$$

Для розв'язування системи інтегро – диференційних рівнянь (5) застосуємо інтегральні перетворення Фур'є по змінній y_1, в результаті отримаємо вирази для знаходження контактних напружень $p(y_1)$ і $q(y_1)$:

$$p(y_1)=\frac{\mu}{\pi}\left[Q\int_0^{\infty}H_{21}^{*}(\alpha)\cdot H^{-1}(\alpha)\cdot\alpha^2\sin\alpha y_1 d\alpha-P\int_0^{\infty}H_{22}^{*}H^{-1}(\alpha)\cos\alpha y_1 d\alpha\right]. \qquad (8)$$

$$q(y_1)=\frac{\mu}{\pi}\left[Q\int_0^{\infty}H_{11}^{*}(\alpha)\cdot H^{-1}(\alpha)\cos\alpha y_1 d\alpha-P\int_0^{\infty}H_{12}^{*}H^{-1}(\alpha)\sin\alpha y_1 d\alpha\right]$$

Тут величини H_{ij}^{*} $(i,j=1,2)$ виражаються через відомі функції H_{ij} $(i,j=1,2)$, які визначаються для рівних і нерівних коренів визначального рівняння [2] згідно [3, 5]. Аналогічні дії виконаємо і до інтегро – диференційних рівнянь (6) і (7), контактні напруження $p(y_1)$ та $q(y_1)$ отримаємо у вигляді:

$$p(y_1)=\frac{\mu}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H_{11}(\alpha)}{H(\alpha)}p_0(\alpha)e^{-i\alpha y_1}d\alpha;\quad q(y_1)=\frac{\mu}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H_{11}(\alpha)}{H(\alpha)}q_0(\alpha)e^{-i\alpha y_1}d\alpha; \qquad (9)$$

Контактна взаємодія нескінченного стрингера з двома попередньо напруженими смугами. Нехай нескінченні пружні смуги виготовлені з однакових стисливих або нестисливих матеріалів з потенціалом довільної структури. В даних смугах діють однакові початкові (залишкові) напруження, причому товщини смуг – *t*. По краях при *y*=±*t*, смуги защемлені, і знаходяться в умовах плоскої деформації.

Будемо вважати, що нескінченні пружні смуги з'єднані між собою нескінченним пружним стрингером з модулем пружності матеріалу E_1 та коефіцієнтом Пуассона ν_1. Нехай, також, попередньо напружені смуги завантажені горизонтальною силою $Q_0\delta(y_1)$, яка діє в середній точці стрингера. Будемо використовувати позначення: $\delta(y_1)$ – відому одиничну дельта-функцію Дірака.

Дослідження даної задачі проведемо в координатах початкового (залишкового) деформованого стану oy_1y_2 (Рис.2)

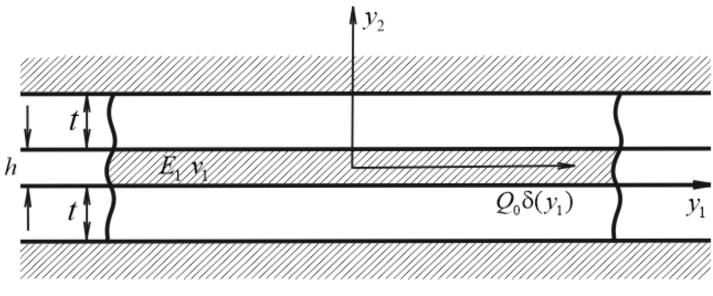

Рис. 2. Дія сили на смуги

Визначимо закон розподілу нормальних і тангенціальних контактних напружень вздовж лінії з'єднання стрингера з попередньо напруженими смугами. При розгляді даної задачі, вважаємо, що взаємодія відбувається при виконані відомих чотирьох положень, які є основними в теорії контактної

 ISSN 2524-0986

взаємодії тіл з початковими напруженнями [2]. Позначимо інтенсивності нормальних і тангенціальних контактних напружень через $p(y_1)$ і $q(y_1)$, а вертикальні і горизонтальні переміщення стрингера відповідно $v^{(1)}(y_1)$ і $u^{(1)}(y_1)$. Отже, випишемо:

$$\frac{\partial u^{(1)}(y_1)}{\partial y_1} = \frac{1}{E_1 h}\int_{-\infty}^{y_1}\left[2q(t) - Q_0\delta(t)\right]dt\,, \qquad (-\infty < y_1 < \infty) \tag{10}$$

$$\frac{\partial v^{(1)}(y_1)}{\partial y_1} = 0 \qquad \forall y_1 \in (-\infty < y_1 < \infty) \tag{11}$$

За умови повного контакту слід відмітити, що по лінії контакту мають виконуватись умови:

$$\frac{\partial v^{(1)}(y_1)}{\partial y_1} = \frac{\partial u_2^{(2)}(y_1)}{\partial y_1}\,,\ \frac{\partial u^{(1)}(y_1)}{\partial y_1} = \frac{\partial u_1^{(2)}(y_1)}{\partial y_1}\,,\ (-\infty < y_1 > \infty) \tag{12}$$

де $u^{(1)}(y_1), v^{(1)}(y_1)$ – компоненти вектора переміщень в пружному стрингері, $u_1^{(2)}(y_1), u_2^{(2)}(y_1)$ – компоненти вектора переміщень в пружних смугах з початковими напруженнями.

Враховуючи контактні умови (12) разом з (10) і (11), а також виразів для вертикальних і горизонтальних переміщень граничних точок вільних від защемлення, які було отримано на основі принципу суперпозицій у випадку рівних та нерівних коренів визначального рівняння [1, 2] для стисливих і нестисливих тіл, й враховуючи [5] мають вигляд:

$$u_1(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{11}(|y_1 - t|)p(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} h_{12}(y_1 - t)q(t)dt. \tag{13}$$

$$u_2(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{21}(y_1 - t)\,p(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} h_{22}(|y_1 - t|)q(t)dt.$$

Із (10) – (13) відносно невідомих контактних напружень, отримаємо наступну систему інтегро – диференційних рівнянь:

$$\frac{d}{dy_1}\left[\int_{-\infty}^{\infty} h_{11}(|y_1 - t|)p(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} h_{12}(y_1 - t)q(t)dt\right] = 0 \tag{14}$$

$$\frac{d}{dy_1}\left[\int_{-\infty}^{\infty} h_{21}(y_1 - t)p(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} h_{22}(|y_1 - t|)q(t)dt\right] = \int_{-\infty}^{y_1}\left[2q(t) - Q_0\delta(t)\right]dt.$$

де h_{ij} $(i, j = 1,2)$ – функції впливу для пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями [5]. Застосувавши формули Крамера та зворотнє перетворення Фур'є, отримаємо розв'язок системи інтегро - диференційних рівнянь (14). Цей розв'язок дає вирази для шуканих контактних напружень у вигляді

$$q(y_1) = \frac{Q_0}{\pi}\mu\int_0^{\infty}\frac{H_{11}^*(\alpha)}{H^*(\alpha)}\cos\alpha y_1 d\alpha \quad p(y_1) = \frac{Q_0}{\pi}\mu\int_0^{\infty}\frac{H_{11}^*(\alpha)}{H^*(\alpha)}\sin\alpha y_1 d\alpha \tag{15}$$

ISSN 2524-0986

Дослідивши на збіжність невласні інтеграли які входять в (15), врахувавши значення $H^*_{ij}(\alpha)$ і значення $H_{ij}(\alpha)$ [5], а також асимптотичні формули для $H_{ij}(\alpha)$, упускаючи громіздкі елементарні перетворення для контактних дотичних напружень (15) від дії горизонтальної зовнішньої сили $Q_0\delta(y_1)$, отримаємо при $(-\infty < y_1 > \infty)$:

$$q(y_1) = -\frac{Q_0}{2\pi}\cdot\left[c_2(\cos c_2 y_1 ci(c_2 y_1) + \sin c_2 y_1 si(c_2 y_1)) - \int_0^\infty \frac{2\mu(c_2+\alpha)H^*_{11}(\alpha) - c_2 H^*(\alpha)}{(c_2+\alpha)H^*(\alpha)}\cos\alpha y_1 d\alpha\right] \quad (16)$$

де $si(c_2 y_1) = -\int\limits_{c_2 y_1}^\infty \frac{\sin\alpha}{\alpha}d\alpha;$ $\quad ci(c_2 y_1) = -\int\limits_{c_2 y_1}^\infty \frac{\cos\alpha}{\alpha}d\alpha$ – це, відповідно, інтегральний синус і косинус.

Числовий аналіз. На основі формули (16) виконано числовий аналіз [8], результати якого представлені на графіках (рис.3,4). Всі результати отримані, для гармонічного потенціалу і потенціалу Бартенєва–Хазановича, у випадку рівних коренів визначального рівняння [2].

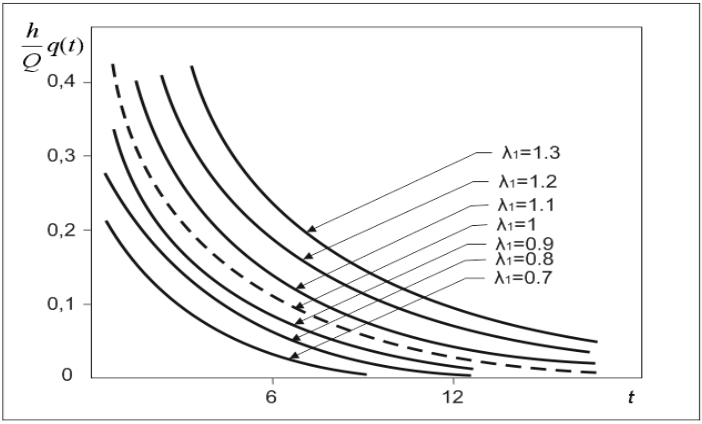

Рис. 3. Розподіл контактного напруження під срингером. Гармонічний потенціал.

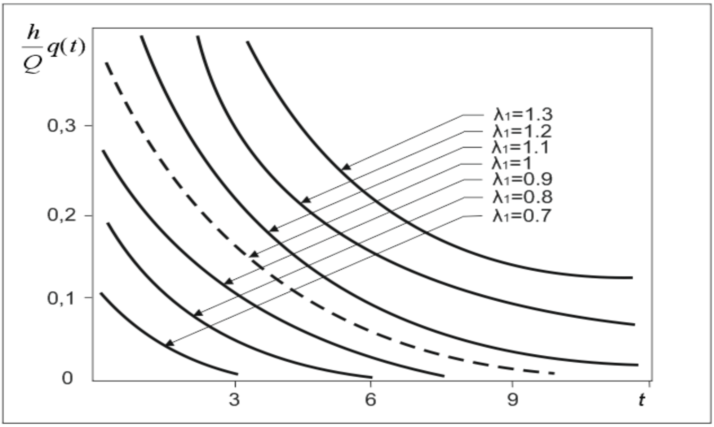

Рис. 4. Контактне напруження під срингером. Потенціал Бартенєва–Хазановича.

На рис. 3, 4 проілюстровано вплив початкових напружень у пружних смугах на закон розподілу контактних напружень під стрингером від дії тангенціальної сили $Q_0\delta(y_1)$ для безрозмірних величин $hQ^{-1}q(t)$, де $hQ^{-1}q(t)$ – безрозмірні контактні тангенціальні напруження. Значенню $\lambda_1 = 1$ (пунктирна лінія на рис.3,4) – відповідає класичній теорії пружності та співпадає з результатами роботи [9]; $\lambda_1 = 0{,}7;0{,}8;0{,}9$ – відповідають початковим напруженням стиску, а $\lambda_1 = 1{,}1;1{,}2;1{,}3$ – напруженням розтягу; t – безрозмірна координата початкового напруженого стану в пружних смугах.

Висновки. Одержані результати проведеного дослідження є цінним для розрахунку конструкцій та деталей машин з початковими (залишковими) напруженнями, які перебувають в контактній взаємодії на міцність, надійність та довговічність, оскільки вони дозволяють більш точніше прогнозувати механічну поведінку конструкцій, в яких використовуються підкріплюючі елементи. Отримані результати можуть бути використані для оцінки меж застосування лінеаризованої теорії пружності.

У статті в рамках лінеаризованої теорії пружності дано постановку і отримано розв'язки задач контактної взаємодії однієї та двох однакових пружних смуг з початковими напруженнями підкріплених пружним нескінченним стрингером. Дослідження проведені в загальному вигляді для теорії великих (скінченних) і двох варіантів малих початкових деформацій у випадку довільної структури пружного потенціалу. Запропоновано новий спосіб розв'язування даного типу контактних задач для смуг з початковими (залишковими) напруженнями, підкріплених нескінченою пружною накладкою з використанням інтегральних перетворень Фур'є.

Одержано основні сингулярні інтегро-диференційні рівняння, розв'язок яких представлений у вигляді квазірегулярних нескінчених систем алгебраїчних рівнянь. Виявлено механічний ефект аналогічний раніше проведеним дослідженням [2 – 7], який полягає в тому, що у випадку коли λ_1, наближається до значень поверхневої нестійкості матеріалу, – виникають явища резонансного характеру як усмугах, так і у стрингері. Це полягає у тому, що напруження та переміщення у тілах, які взаємодіють, різко змінюють свої значення.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ ТА ЛІТЕРАТУРИ

1. Гузь, А.Н. Контактное взаимодействие упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями / А.Н. Гузь, С.Ю. Бабич, В.Б. Рудницкий // Развитие идей Л.А. Галина в механике. – М. – Ижевск. Институт компьютерных исследований, 2013. – 480 с.
2. Гузь А.Н., Рудницкий В.Б. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями [Текст]. – Хмельницький, вид. ПП Мельник. – 2006. – 710 с.
3. Rudnitskii V.B., Dikhtyaruk N.N. A prestressed elastic strip with elastic reinforcements / V.B. Rudnitskii, N.N. Dikhtyaruk// International Applied Mechanics. - November 2002, Volume 38, Issue 11, pp 1354–1360.
4. Dikhtyaruk, N.N. Equilibrium of a prestressed strip reinforced with elastic plates. // International Applied Mechanics. – 2004, Volume 40, Issue 3, pp 290–296.
5. Rudnitskii V. B., Dikhtyaruk N. N. Interaction Between an Infinite Stringer and Two Identical Prestressed Strips: Contact Problem. / V.B. Rudnitskii, N.N. Dikhtyaruk// International Applied Mechanics. – 2017. – 53, №2. – p 149–155.
6. Dikhtyaruk M. M. Load transfer from the infinite stringer to the two jammed along one edge identical stripes with initial (residual) stresses / M. M. Dikhtyaruk // Visnyk TNTU. — 2016, — 83, № 3, — s. 51-60.
7. Yaretskaya, N. A. Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses / N. A. Yaretskaya // International Applied Mechanics. – 2014. – 50, №4. – Pp. 378–388.
8. Рудницький В.Б.,Ярецька Н.О.,Венгер В.О.Застосування ІТ технологій в механіці деформованого твердого тіла /В.Б. Рудницький, Н.О. Ярецька, В.О. Венгер// Problems of Tribology. – 2017, №2.–Хмельницький: ХНУ. – с. 32-40.
9. Melan, E. Ein Beitrag zur Theorie geschweiss der Verbindungen. / Melan E. // Ingenieur Archiv, – 1932. 3, N 2. – s. 126 – 128.