МАТЕРІАЛИ

II МІЖНАРОДНОЇ НАУКОВО-ПРАКТИЧНОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ

"НАУКОВИЙ ПОТЕНЦІАЛ СВІТУ – '2005"

19-30 вересня 2005 року

Том 9

Дніпропетровськ
Наука і освіта
2005

Матеріали II Міжнародної науково-практичної конференції "Науковий потенціал світу – '2005". Том 9. - Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2005. - 82 с.

ISBN 966-7191-99-0

У збірнику містяться матеріали II Міжнародної науково-практичної конференції "Науковий потенціал світу – '2005" як вищих навчальних закладах, так і у закладах загальної освіти.

Для студентів, аспірантів та викладачів вузів.

ISBN 966-7191-99-0

Хома Г.П., Мороз В.В., Максимчук Д.М.
Хмельницький національний *університет*

ПОБУДОВА ОПЕРАТОРА А.М. САМОЙЛЕНКА ДЛЯ РІВНЯНЬ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

1. Властивості оператора Даламбера. На основі вивчення властивостей внутрішнього інтегралу (ядра Даламбера) функції

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi\,, \tag{1}$$

яка при $f \in C^{1,0}(\mathbf{R}^2)$ є класичним частинним розв'язком лінійного неоднорідного рівняння

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x,t), \tag{2}$$

можна досліджувати існування 2π –періодичних розв'язків рівняння (2). У роботі доведемо наступні властивості ядра Даламбера

$$I(x,t,\tau) = \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi \tag{3}$$

у такому класі функцій

$$B = \{f : f(x,t) = f(x,t+2\pi) = f(x+2\pi,t) = -f(-x,t)\}.$$

Лема 1*. Якщо* $f(x,t) \in C(\mathbf{R}^2) \cap B$, *то* $I(x+2\pi,t,\tau) = I(x,t,\tau)$.

Доведення. Справді, на основі (3) маємо

$$I(x+2\pi,t,\tau) = \int_{x+2\pi-t+\tau}^{x+2\pi+t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi = \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(2\pi+\eta,\tau)d\eta = I(x,t,\tau),$$

що треба було довести.

Лема 2*. Якщо* $f(x,t) \in C(\mathbf{R}^2) \cap B$, *то* $I(x,t+2\pi,\tau) = I(x,t,\tau)$.

Доведення. На основі формули (3) знаходимо, що

$$I(x,t+2\pi,\tau) = \int_{x-t-2\pi+\tau}^{x+t+2\pi-\tau} f(\xi,\tau)d\xi = \int_{x-t-2\pi+\tau}^{x-t+\tau} f(\xi,\tau)d\xi + \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi +$$

$$+ \int_{x+t-\tau}^{x+t+2\pi-\tau} f(\xi,\tau)d\xi = \int_{-2\pi}^{0} f(\xi,\tau)d\xi + \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi + \int_{0}^{2\pi} f(\xi,\tau)d\xi =$$

$$= 0 + \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi + 0 = I(x,t,\tau).$$

Лема 2 доведена.

Лема 3*. Якщо* $f(x,t) \in C(\mathbf{R}^2) \cap B$, *то* $I(x,t,\tau+2\pi) = I(x,t,\tau)$.

Доведення. На основі формули (3) знаходимо

$$I(x,t,\tau+2\pi) = \int_{x-t+\tau+2\pi}^{x+t-\tau-2\pi} f(\xi,\tau+2\pi)d\xi = \int_{x-t+\tau+2\pi}^{x-t+\tau} f(\xi,\tau)d\xi + \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi +$$

$$+ \int_{x+t-\tau}^{x+t-\tau-2\pi} f(\xi,\tau)d\xi = \int_{2\pi}^{0} f(\xi,\tau)d\xi + \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi + \int_{0}^{-2\pi} f(\xi,\tau)d\xi =$$

$$= 0 + I(x,t,\tau) + 0 = I(x,t,\tau),$$

що треба було довести.

2. Основна лема. На основі доведених лем легко встановити наступне твердження.

Основна лема. *Нехай* $f(x,t) \in C(\mathbf{R}^2) \cap B$. *Тоді оператор* P, *визначений формулою*

$$(Pf)(x,t) = \int_0^t \left(\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ds \int_{x-t+s}^{x+t-s} f(\xi,s)d\xi \right) d\tau \tag{4}$$

переводить кожну функцію f із класу B в клас B, причому

$$(Pf)(0,t)=0, \quad (x,t)\in \mathbf{R}^2,$$
$$(Pf)(\pi,t)=0, \quad (x,t)\in \mathbf{R}^2. \tag{5}$$

Доведення. Спочатку доведемо, що функція Pf, задовольняє крайові умови (5). На основі (4) при $x=0$ одержуємо

$$(Pf)(0,t)=\int_0^t\left(\int_{-(t-\tau)}^{t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}ds\int_{-(t-s)}^{t-s} f(\xi,s)d\xi\right)d\tau. \tag{6}$$

Оскільки при $f\in B$ інтеграл

$$\int_{-(t-\tau)}^{t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi\equiv 0,\ \tau\in\mathbf{R},\quad t\in\mathbf{R}, \tag{7}$$

то на основі (6) і (7) маємо $(Pf)(0,t)=0$, тобто функція Pf задовольняє першу крайову умову (5). Тепер, покладаючи $x=\pi$ у формулі (4), одержуємо

$$(Pf)(\pi,t)=\int_0^t\left(\int_{\pi-t+\tau}^{\pi+t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}ds\int_{\pi-t+s}^{\pi+t-s} f(\xi,s)d\xi\right)d\tau. \tag{8}$$

Доведемо, що при $f\in B$ інтеграл

$$\int_{\pi-t+\tau}^{\pi+t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi\equiv 0,\ \tau\in\mathbf{R},\quad t\in\mathbf{R}.$$

Справді,

$$\int_{\pi-t+\tau}^{\pi+t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi=\int_{-t+\tau}^{t-\tau} f(\pi+\eta,\tau)d\eta=\int_{-t+\tau}^{0} f(\pi+\eta,\tau)d\eta+$$
$$+\int_0^{t-\tau} f(\pi+\eta,\tau)d\eta=\int_0^{t-\tau} f(\pi-y,\tau)dy+\int_0^{t-\tau} f(\pi+\eta,\tau)d\eta\equiv 0.$$

Отже, на основі (8) і доведеної рівності маємо $(Pf)(\pi,t)\equiv 0$, $t\in\mathbf{R}$. Таким чином, виконується і друга крайова умова (5).

Нехай $f\in C(\mathbf{R}^2)\,I\ B$. Доведемо, що справедливі рівності

$$(Pf)(x,t+2\pi)=(Pf)(x,t); \tag{10}$$
$$(Pf)(x+2\pi,t)=(Pf)(x,t); \tag{11}$$
$$(Pf)(-x,t)=-(Pf)(x,t). \tag{12}$$

Справді,

$$(Pf)(x,t+2\pi)=\int_0^{t+2\pi}\left(I(x,t+2\pi,\tau)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}I(x,t+2\pi,s)ds\right)d\tau=$$
$$=\int_0^{t}\left(I(x,t,\tau)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(I(x,t,s)ds\right)d\tau+\int_t^{t+2\pi}\left(I(x,t,\tau)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}I(x,t,s)ds\right)d\tau=$$

$$=(Pf)(x,t)+\int_0^{2\pi}\left(I(x,t,\tau)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}I(x,t,s)ds\right)d\tau=$$

$$=(Pf)(x,t)+\int_0^{2\pi}I(x,t,\tau)d\tau-\frac{2\pi}{2\pi}\int_0^{2\pi}I(x,t,s)ds\equiv(Pf)(x,t).$$

Отже, виконується умова (10).

Покладаючи, $x+2\pi$ замість x у формулі (4) одержуємо

$$(Pf)(x+2\pi,t)=\int_0^t\left(\int_{x+2\pi-t+\tau}^{x+2\pi+t-\tau}f(\xi,\tau)d\xi-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}ds\int_{x+2\pi-t+s}^{x+2\pi+t-s}f(\xi,\tau)d\xi\right)d\tau=$$

$$=\int_0^t\left(\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}f(2\pi+\eta,\tau)d\eta-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}ds\int_{x-t+s}^{x+t-s}f(2\pi+\eta,s)d\eta\right)d\tau\equiv(Pf)(x,t).$$

Таким чином, виконується умова (11).

Аналогічно, маємо

$$(Pf)(-x,t)=\int_0^t\left(\int_{-x-t+\tau}^{-x+t-\tau}f(\xi,\tau)d\xi-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}ds\int_{-x-t+s}^{-x+t-s}f(\xi,s)d\xi\right)d\tau=$$

$$=-\int_0^t\left(\int_{x+t-\tau}^{x-t+\tau}f(-\eta,\tau)d\eta-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}ds\int_{x+t-s}^{x-t+s}f(-\eta,s)d\eta\right)d\tau\equiv-(Pf)(x,t),$$

що треба було довести.

3. Застосування. Тепер, використовуючи чисельно–аналітичний метод А.М.Самойленка [1] можна досліджувати крайову періодичну задачу вигляду [2, 3]

$$u_{tt}-u_{xx}=\varepsilon F(x,t,u),\ (x,t)\in\mathbf{R}^2,$$

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0,\ t\in\mathbf{R},$$

$$u(x,t+2\pi)=u(x,t),\ (x,t)\in\mathbf{R}^2.$$

Література:

1. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно–аналитические методы исследования периодических решений. –Киев: Вища школа, 1976. – 180 с.

2. Митропольский Ю. А., Хома Г. П., Громяк М. И. Асимптотические методы исследования уравнений гиперболического типа.–К.:Наук.думка, 1991.– 232с.

3. Хома Г.П., Хохлова Л.Г., Домбровський І.В., Цинайко П.В. Властивості ядра оператора Даламбера //Матеріали III Міжнародної науково–практичної конференції "Динаміка наукових досліджень '2004". –Том 66. Математика. – Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2004. – С. 19–21.