технологічних виробів.

Література

1. Зозуля В.Д. Применение шлифовальных металлоабразивных отходов в порошковой металлургии / В.Д. Зозуля // Порошковая металлургия. – 1988. – №3. – С. 92–95.
2. Бондаренко Б.И. Разработка технологии получения композиционного порошка из шламовых отходов подшипникового производства / [Б.И. Бондаренко, В.П. Якубовский, Д.Н. Федоров, Е.П. и др.] // Экотехнологии и ресурсосбережение. – 2002. – № 4. – С. 32–35.
3. Вернигоров Ю.М. Магнитовибрационная переработка шлама шлифовального производства / Вернигоров Ю.М. // Материалы V международной конференции „Сотрудничество для решения проблемных отходов" (2–3 апреля, 2008 г., Харьков). – Х., 2008. – С. 100–102.
4. Исследование технологических режимов получения порошков из шлифовального шлама на всех этапах его утилизации / [Т.Н. Гальчук, Н.И. Усыченко, В.Д. Рудь та ін.] // Реологические модели и процессы деформирования пористых и композиционных материалов: семинар, 7–14 сентября 1992 р.: тезисы докладов семинара. – IX, 1992. – С. 25–29.
5. Рудь В.Д. Использование отходов подшипникового производства в порошковой металлургии / В.Д. Рудь, Т.Н. Гальчук, О.Ю. Повстяной // Порошковая металлургия. – 2005. – № 1/2. – С. 106–112.
6. Порошковая металлургия сталей и сплавов / [Ж.И. Дзнеладзе, Р.П. Щеголева, Л.С. Голубева та ін.]. – М. : Металлургия, 1978. – 264 с.
7. Гальчук Т.Н. Кинетика измельчения в шаровой мельнице порошков, полученных из отходов шарикоподшипникового производства / Т.Н. Гальчук, В.Д. Рудь // Порошковая металлургия. – 2011. – № 5/6. – С. 20–26.
8. Рудь В.Д. Дослідження процесів подрібнення металевих порошків / В.Д. Рудь, Т.Н. Гальчук // Наукові нотатки: Міжвузівський збірник (за напрямом „Інженерна механіка"). – Луцьк, 2009. – Вип. 25. – С. 306–310.

Надійшла 12.6.2012 р.
Рецензент: д.т.н. Савчук П.П.

УДК 519.832.3+519.7+519.85

В.В. РОМАНЮК
Хмельницкий национальный университет

ПРЕИМУЩЕСТВО ПРИНЦИПА ГАРАНТИРОВАНО МИНИМАЛЬНЫХ АБСОЛЮТНЫХ ОТКЛОНЕНИЙ И МАКСИМАЛЬНОЕ СУЖЕНИЕ КОНТИНУУМА ОПТИМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ В ЗАДАЧЕ УСТРАНЕНИЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЧЕТЫРЁХМОДЕЛЬНОЙ $\{2\sigma, 3\sigma, 4\sigma\}$-НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ

Формулируется и решается задача устранения однопараметрической четырёхмодельной неопределённости, в которой положительные отклонения второго, третьего и четвёртого модельных значений от первого оказались в соотношении $2:3:4$. *На этом примере показано преимущество минимаксного принципа устранения модельной неопределённости и неприменимость среднего арифметического. Решено строгую задачу устранения неопределённости путём сужения континуального подмножества тетраэдра всех стратегий к одноэлементному множеству по максимальному приближению его к равновероятному распределению.*

There is formulated and solved a problem of removing single-parameter four-model uncertainty, in which positive deviations of the second, third and fourth model values from the first appeared at a ratio of $2:3:4$***. With this example it has been testified the preference of the minimax principle of removing model uncertainty and inapplicability of the arithmetic mean. There has been solved the strict problem of removing uncertainty by contracting the continual subset of the tetrahedron of all strategies in a single-element set on approaching it maximally to the uniform distribution.***

Ключевые слова: неопределённость, устранение неопределённостей, модельная неопределённость, четырёхмодельная неопределённость, среднее арифметическое, принцип гарантировано минимальных абсолютных отклонений, матричная игра, оптимальная стратегия, минимакс, континуум оптимальных стратегий.

Вступление и предварительная постановка проблемы

Модельные неопределённости возникают, главным образом, в математическом описании на эмпирическом уровне различных физических, химических, технических, экономических, экологических явлений и процессов, в образовании которых задействовано большое количество факторов, по-разному влияющих на сущность исследуемых объектов в определённые моменты времени. Описывая одно и тоже явление или объект, различные математические модели в каждый момент наблюдения (измерения или контроля) дают практически непересекающиеся множества значений его параметра (или параметров). Следовательно, сведение этих множеств к единой совокупности решающих значений неповторяющихся параметров является приоритетной задачей для исследователя.

Анализ известных подходов по устранению неопределённостей

Самыми простыми модельными неопределённостями являются однопараметрические. Примером четырёхмодельной неопределённости с одним параметром является проблема оценивания степени относительного износа инструмента обработки или функционирующей детали (рабочей поверхности), где задействованы абразивная, адгезивная, диффузионная и окислительная модели изнашивания [1]. Некоторые (нестрого формулируемые или нестрогие) задачи устранения неопределённостей (ЗУН) состоят в выборе оценки из множества, границами которого служат минимальное и максимальное из зафиксированных значений исследуемого параметра (ЗЗИП). В других же ЗУН (строго формулируемых или строгих) требуется осуществить выбор только лишь среди ЗЗИП. Если для решения нестрогих ЗУН можно применять принцип математического ожидания (среднего арифметического), то для решения строгих ЗУН он, вообще говоря, неприменим вовсе [2, 3].

Формулировка целей работы и задач

Пусть $\{v_i\}_{i=1}^{4}$ является множеством зафиксированных в некий момент наблюдения (измерения или контроля) значений параметра, описываемого одновременно четырьмя различными математическими моделями. Покажем, что в случае соотношения $2:3:4$ между тремя из этих значений решение нестрогой ЗУН с применением принципа гарантировано минимальных абсолютных отклонений (ПГМАО)

$$u_{kj} = \left| v_k - v_j \right| \quad \forall\ k = \overline{1,\,4} \quad \text{и} \quad \forall\ j = \overline{1,\,4} \tag{1}$$

более приемлемо, чем решение нестрогой ЗУН с помощью среднего арифметического $\bar{v} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} v_i$. Также решим строгую ЗУН $\hat{v} \in \{v_i\}_{i=1}^{4}$, используя ПГМАО. Для достижения сформулированных целей необходимо выполнить нестрогую и строгую постановку ЗУН, исследовав возможность и результат их решения с помощью среднего арифметического, после чего показать превосходство ПГМАО (1).

Нестрогая задача устранения однопараметрической четырёхмодельной $\{2\sigma,\,3\sigma,\,4\sigma\}$-неопределённости

Итак, имеется множество

$$\{v_i\}_{i=1}^{4} = \{v_1,\ v_1 + 2\sigma,\ v_1 + 3\sigma,\ v_1 + 4\sigma\}, \quad v_1 \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0\,, \tag{2}$$

где значение v_i в (2) является величиной параметра объекта, описываемого в данный момент времени с помощью i-й математической модели, $i = \overline{1,\,4}$. Нестрогая задача устранения такой однопараметрической четырёхмодельной $\{2\sigma,\,3\sigma,\,4\sigma\}$-неопределённости состоит в формировании оценки $\hat{v}$ исследуемого параметра v как

$$\hat{v} \in \left[\min\left(\{v_i\}_{i=1}^{4}\right);\ \max\left(\{v_i\}_{i=1}^{4}\right) \right], \tag{3}$$

то есть необходимо фактически выбрать

$$\hat{v} \in [v_1;\ v_1 + 4\sigma] \tag{4}$$

согласно с некоторым критерием оптимального (наилучшего в известном смысле) выбора. При этом, поскольку выбор совершается в условиях полной неопределённости, для заданного допустимого максимального абсолютного отклонения (ДМАО) $\delta_v^{(\max)} > 0$ должно быть

$$\left| \hat{v} - v \right| \leqslant \delta_v^{(\max)}. \tag{5}$$

Критерий принятия (5) оценки $\hat{v}$ исследуемого параметра с неизвестным действительным значением v понимается как требование

$$\max_{i=\overline{1,\,4}} \left\{ \left| \hat{v} - v_i \right| \right\} \leqslant \delta_v^{(\max)}, \tag{6}$$

то есть максимально возможная ошибка в оценке параметра не должна превышать ДМАО $\delta_v^{(\max)}$.

Для среднего арифметического

$$\overline{v} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} v_i = v_1 + \frac{9}{4}\sigma \tag{7}$$

по данным (2) соответствующая оценка $\hat{v} = \overline{v}$ даёт ограничение

$$\max_{i=\overline{1,\,4}} \left\{ \left| \overline{v} - v_i \right| \right\} = \max\left\{ \frac{9}{4}\sigma,\ \frac{1}{4}\sigma,\ \frac{3}{4}\sigma,\ \frac{7}{4}\sigma \right\} = \frac{9}{4}\sigma \tag{8}$$

касательно минимального значения $\delta_v^{(\max)}$. А именно, для $\delta_v^{(\max)} < \frac{9}{4}\sigma$ применение среднего арифметического в устранении $\{2\sigma,\ 3\sigma,\ 4\sigma\}$-неопределённости (2) неудовлетворительно по требованию (6).

Применение ПГМАО (1) состоит в применении минимаксной (оптимальной) стратегии второго игрока (СВИ) в матричной 4×4-игре

$$\left\langle \left\{ m_k \right\}_{k=1}^{4},\ \left\{ s_j \right\}_{j=1}^{4},\ \left[u_{kj} \right]_{4\times 4} \right\rangle, \tag{9}$$

где чистая стратегия m_k первого игрока означает то, что именно k-я математическая модель со значением её параметра v_k является основной, а чистая стратегия s_j второго игрока означает выбор им оценки $\hat{v} = v_j$ или, что то же самое, принятие j-й модели как основной. Конечно же, кортеж (9) означает на самом деле не одну, а бесконечное множество 4×4-игр

$$\left\langle \left\{ m_k \right\}_{k=1}^{4},\ \left\{ s_j \right\}_{j=1}^{4},\ \sigma\cdot\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle,\quad \sigma > 0\,. \tag{10}$$

Но все игры (10) аффинно эквивалентны игре

$$\left\langle \left\{ m_k \right\}_{k=1}^{4},\ \left\{ s_j \right\}_{j=1}^{4},\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle, \tag{11}$$

поэтому сейчас решим в смысле оптимальной стратегии второго игрока именно игру (11). Применяя метод задачи линейного программирования, построим по отношению к увеличенной на единицу матрице игры (11) расширенную 5×9-матрицу $\mathbf{G}_0 = \left[g_{zw} \right]_{5\times 9}$, в которой элементы $\left\{ g_{z1} \right\}_{z=1}^{4}$ являются свободными членами в ограничениях, элементы $\left\{ g_{5w} \right\}_{w=2}^{5}$ равны коэффициентам изначальной целевой функции, элементы с шестого по девятый столбик получаются из введения этих столбиков в качестве базисных, а элемент g_{51} указывает значение целевой функции, взятое с противоположным знаком. Имея

$$\mathbf{G}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 0 & \frac{12}{5} & \frac{18}{5} & \frac{24}{5} & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{4}{5} & \frac{12}{5} & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{6}{5} & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & 1 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 1 & \frac{5}{24} & 0 & 0 & -\frac{1}{24} \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{6} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & \frac{5}{24} \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}, \tag{12}$$

получаем оптимальную СВИ

$$\breve{\mathbf{Q}} = [\breve{q}_1 \;\; \breve{q}_2 \;\; \breve{q}_3 \;\; \breve{q}_4] = \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Замечая, что на первой итерации в базис можно ввести элемент g_{15}, получим

$$\mathbf{G}_0 \sim \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{12}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & -\frac{3}{5} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{18}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & -\frac{2}{5} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{24}{5} & \frac{12}{5} & \frac{6}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 1 & \frac{5}{24} & 0 & 0 & -\frac{1}{24} \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{6} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & \frac{5}{24} \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}, \tag{14}$$

откуда снова выплывает (13). Но введём в базис на первой итерации элемент g_{14}. Тогда

$$\mathbf{G}_0 \sim \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 1 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{15}{4} & \frac{5}{4} & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{9}{2} & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & 0 & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{18} & 0 & 0 & -\frac{1}{18} \\ \frac{2}{9} & 0 & -\frac{4}{3} & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{2}{9} & 1 & 0 & -\frac{5}{9} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{1}{6} & 0 & 1 & -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{9} & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & 0 & 0 & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}, \tag{15}$$

где оптимальной СВИ оказывается

$$\breve{\mathbf{Q}} = [\breve{q}_1 \;\; \breve{q}_2 \;\; \breve{q}_3 \;\; \breve{q}_4] = \left(\frac{1}{9}+\frac{2}{9}\right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & 0 & \frac{2}{9} & 0 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & 0 & \frac{2}{9} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Вводя в базис на первой итерации элемент g_{13}, получим

$$\mathbf{G}_0 \sim \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{8}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{10}{3} & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & -4 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{12} & 0 & 0 & -\frac{1}{12} \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & 2 & 4 & \frac{1}{3} & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{1}{6} & 0 & 1 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}, \qquad (17)$$

откуда выйдет ещё один вариант оптимальной СВИ

$$\breve{\mathbf{Q}} = [\breve{q}_1 \quad \breve{q}_2 \quad \breve{q}_3 \quad \breve{q}_4] = \left(0 + \frac{1}{3}\right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0], \qquad (18)$$

а при введении в базис на первой итерации элемента g_{43} снова закончим процедуру решения

$$\mathbf{G}_0 \sim \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & 4 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 2 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 2 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{12} & 0 & 0 & \frac{5}{12} \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \qquad (19)$$

в две итерации, опять получив (18):

$$\breve{\mathbf{Q}} = [\breve{q}_1 \quad \breve{q}_2 \quad \breve{q}_3 \quad \breve{q}_4] = \left(\frac{1}{3} + 0\right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0].$$

Следовательно, в игре (11), как и в каждой из игр (10), второй игрок обладает континуумом $\breve{\mathcal{Q}}$ своих оптимальных стратегий, который получается линейной комбинацией точек (13), (16) и (18) на тетраэдре

$$\mathcal{Q} = \left\{ \mathbf{Q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4] \in \mathbb{R}^4 : q_j \in [0; 1] \ \forall\ j = \overline{1, 4}, \ \sum_{j=1}^{4} q_j = 1 \right\}, \qquad (20)$$

где

$$\breve{\mathbf{Q}} = [\breve{q}_1 \quad \breve{q}_2 \quad \breve{q}_3 \quad \breve{q}_4] \in \breve{\mathcal{Q}} =$$

$$= \left\{ \breve{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \frac{1-\alpha}{6}(2+\lambda) & \alpha & \frac{2-2\alpha}{3}(1-\lambda) & \frac{1-\alpha}{2}\lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \alpha \in [0; 1], \lambda \in [0; 1] \right\} \subset \mathcal{Q}. \qquad (21)$$

Применим теперь оптимальную СВИ в общем виде из (21) для получения оценки $\breve{v}$ исследуемого параметра v в форме ожидаемого значения по вероятностному распределению в (21):

$$\breve{v}\left(\breve{\mathbf{Q}}\right) = \sum_{j=1}^{4} \breve{q}_j v_j = \frac{1-\alpha}{6}(2+\lambda)v_1 + \alpha v_2 + \frac{2-2\alpha}{3}(1-\lambda)v_3 + \frac{1-\alpha}{2}\lambda v_4 =$$

$$= \frac{1-\alpha}{6}(2+\lambda)v_1 + \alpha(v_1 + 2\sigma) + \frac{2-2\alpha}{3}(1-\lambda)(v_1 + 3\sigma) + \frac{1-\alpha}{2}\lambda(v_1 + 4\sigma) =$$

$$= \frac{1-\alpha}{3}v_1 + \frac{1-\alpha}{6}\lambda v_1 + \alpha v_1 + 2\sigma\alpha + \frac{2-2\alpha}{3}v_1 - \frac{2-2\alpha}{3}\lambda v_1 + 2\sigma - 2\sigma\alpha - \lambda(2\sigma - 2\alpha\sigma) + \frac{1-\alpha}{2}\lambda v_1 + \lambda(2\sigma - 2\alpha\sigma) =$$

$$= v_1\left(\frac{1-\alpha}{3} + \frac{1-\alpha}{6}\lambda + \alpha + \frac{2-2\alpha}{3} - \frac{2-2\alpha}{3}\lambda + \frac{1-\alpha}{2}\lambda\right) + 2\sigma =$$

$$= v_1\left(\frac{1-\alpha+3\alpha+2-2\alpha}{3}+\frac{1-\alpha-4+4\alpha+3-3\alpha}{6}\lambda\right)+2\sigma = v_1+2\sigma\,. \qquad (22)$$

Здесь, вообще говоря, требование вида (5) для заданного ДМАО $\delta_v^{(\max)}$ имеет вид

$$\min_{\mathbf{Q}\in\breve{\mathbf{Q}}}\left(\max_{i=\overline{1,4}}\left\{\left|\tilde{v}(\mathbf{Q})-v_i\right|\right\}\right)\leqslant\delta_v^{(\max)}, \qquad (23)$$

однако в силу того, что оценка $\hat{v}=\tilde{v}(\breve{\mathbf{Q}})$ по (22) не зависит от формы оптимальной стратегии (21) из континуума $\breve{\mathbf{Q}}$, требование (23) всё равно сводится к виду (6):

$$\min_{\mathbf{Q}\in\breve{\mathbf{Q}}}\left(\max_{i=\overline{1,4}}\left\{\left|\tilde{v}(\breve{\mathbf{Q}})-v_i\right|\right\}\right)=\max_{i=\overline{1,4}}\left\{\left|\tilde{v}(\breve{\mathbf{Q}})-v_i\right|\right\}=$$

$$=\max_{i=\overline{1,4}}\left\{\left|v_1+2\sigma-v_i\right|\right\}=\max\{2\sigma,\,0,\,\sigma,\,2\sigma\}=2\sigma=\frac{v_4-v_1}{2}\,. \qquad (24)$$

Как видим, при использовании ПГМАО (1) с оценкой (22) получается меньшая левая часть (24) в требовании (6) по сравнению с левой частью (8) в этом же требовании. Поэтому нестрогая задача устранения (4) однопараметрической четырёхмодельной $\{2\sigma, 3\sigma, 4\sigma\}$-неопределённости, решаемая по обобщающему среднее арифметическое (7) и ПГМАО (1) критерию

$$\hat{v}\in\arg\min_{\{\bar{v},\,\tilde{v}(\breve{\mathbf{Q}})\}}\left\{\max_{i=\overline{1,4}}\left\{\left|\bar{v}-v_i\right|\right\},\ \max_{i=\overline{1,4}}\left\{\left|\tilde{v}(\breve{\mathbf{Q}})-v_i\right|\right\}\right\}, \qquad (25)$$

даёт оценку

$$\hat{v}\in\arg\min_{\{\bar{v},\,\tilde{v}(\breve{\mathbf{Q}})\}}\left\{\frac{9}{4}\sigma,\,2\sigma\right\}=\left\{\tilde{v}(\breve{\mathbf{Q}})\right\}=\{v_1+2\sigma\}=\{v_2\}\,. \qquad (26)$$

Справедливо заметить, что оценка (26) как решение нестрогой задачи устранения однопараметрической четырёхмодельной $\{2\sigma, 3\sigma, 4\sigma\}$-неопределённости совпадает с зафиксированным в некий момент наблюдения значением параметра v_2 (или получаемым из второй математической модели).

Строгая задача устранения однопараметрической четырёхмодельной $\{2\sigma, 3\sigma, 4\sigma\}$-неопределённости

В рамках строгой задачи устранения однопараметрической четырёхмодельной $\{2\sigma, 3\sigma, 4\sigma\}$-неопределённости необходимо осуществить выбор

$$\hat{v}\in\{v_1,\,v_1+2\sigma,\,v_1+3\sigma,\,v_1+4\sigma\} \qquad (27)$$

оценки $\hat{v}$ исследуемого параметра v лишь из множества $\{v_i\}_{i=1}^{4}$ зафиксированных (модельных) значений. И совершенно очевидно, что для решения задачи выбора (27) среднее арифметическое (7) неприменимо. Что же касается ПГМАО (1), то он предоставляет в распоряжение исследователя чистую оптимальную СВИ (18), согласно с которой

$$\hat{v}=v_2=v_1+2\sigma \qquad (28)$$

при выборе (27). Примечательно, что здесь использование ПГМАО (1) при решении (как нестрогой, так и строгой) задачи устранения однопараметрической четырёхмодельной $\{2\sigma, 3\sigma, 4\sigma\}$-неопределённости приводит к одному и тому же результату. Однако такой инвариантный выбор (28) для многократно повторяющейся $\{2\sigma, 3\sigma, 4\sigma\}$-неопределённости в случае строгого выбора (27) является нежелательным, поскольку вероятностное распределение на множестве $\{v_i\}_{i=1}^{4}$ неизвестно (а именно к нему будет стремиться распределение относительных частот фиксируемых четырёх значений при неограниченном повторении условий возникновения такой неопределённости). Кроме того, при многократных повторах такой неопределённости крайне желательно, чтобы все четыре элемента множества $\{v_i\}_{i=1}^{4}$ имели свои ненулевые вероятности из $\breve{\mathbf{Q}}$. Значения этих вероятностей неизвестно даже приблизительно, однако во множестве $\breve{\mathbf{Q}}$ существует их некая совокупность, которую можно определить, отталкиваясь от наиболее нейтрального варианта. И, хотя изначально было отклонено допущение о равновероятном распределении (РВР), таким наиболее нейтральным вариантом является именно РВР

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}. \tag{29}$$

Заметим, что (29) не является элементом множества $\tilde{\mathcal{Q}}$, поскольку ранее уже была установлена приоритетность ПГМАО (1) перед средним арифметическим. Таким образом, для решения строгой задачи устранения однопараметрической четырёхмодельной $\{2\sigma, 3\sigma, 4\sigma\}$-неопределённости необходимо найти элемент

$$\tilde{\mathbf{Q}}^{*} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_1^{*} & \tilde{q}_2^{*} & \tilde{q}_3^{*} & \tilde{q}_4^{*} \end{bmatrix} \in \tilde{\mathcal{Q}} =$$
$$= \left\{ \tilde{\mathbf{Q}} = \left[\frac{1-\alpha}{6}(2+\lambda) \quad \alpha \quad \frac{2-2\alpha}{3}(1-\lambda) \quad \frac{1-\alpha}{2}\lambda \right] \in \mathbb{E}^4 : \alpha \in [0;1], \lambda \in [0;1] \right\} \subset \mathcal{Q} \tag{30}$$

такой, чтобы его координаты $\left\{ \tilde{q}_j^{*} \right\}_{j=1}^{4}$ располагались максимально близко к РВР (29). Для этого следует решить задачу

$$\arg \min_{\tilde{\mathbf{Q}} \in \tilde{\mathcal{Q}}} \left\{ \sum_{j=1}^{4} \left(\tilde{q}_j - \frac{1}{4} \right)^2 \right\} = \arg \left(\min_{[\tilde{q}_1 \ \tilde{q}_2 \ \tilde{q}_3 \ \tilde{q}_4] \in \tilde{\mathcal{Q}}} \left\{ \sum_{j=1}^{4} \left(\tilde{q}_j - \frac{1}{4} \right)^2 \right\} \right). \tag{31}$$

Но, кстати, выбор единственного элемента из континуума оптимальных стратегий $\tilde{\mathcal{Q}}$ в смысле максимальной близости его координат к РВР (29) можно осуществить иначе, решив задачу

$$\arg \min_{\tilde{\mathbf{Q}} \in \tilde{\mathcal{Q}}} \left\{ \sum_{j=1}^{4} \sum_{i=1}^{j-1} \left(\tilde{q}_i - \tilde{q}_j \right)^2 \right\} = \arg \left(\min_{[\tilde{q}_1 \ \tilde{q}_2 \ \tilde{q}_3 \ \tilde{q}_4] \in \tilde{\mathcal{Q}}} \left\{ \sum_{j=1}^{4} \sum_{i=1}^{j-1} \left(\tilde{q}_i - \tilde{q}_j \right)^2 \right\} \right), \tag{32}$$

которая усматривается эквивалентной задаче (31) вследствие единичной суммы компонент искомого квазиравновероятного распределения (30). Оказывается, такая эквивалентность относится не только к формулировке задач (31) и (32), но и к их решениям.

Теорема. Задачи (31) и (32) по нахождению стратегии (30) для решения строгой задачи устранения однопараметрической четырёхмодельной $\{2\sigma, 3\sigma, 4\sigma\}$-неопределённости по множеству (2) имеют общее решение, являющееся при том единственным.

Доказательство. Для задачи (31) получаем:

$$\sum_{j=1}^{4} \left(\tilde{q}_j - \frac{1}{4} \right)^2 = \left(\frac{1}{6}(1-\alpha)(2+\lambda) - \frac{1}{4} \right)^2 + \left(\alpha - \frac{1}{4} \right)^2 + \left(\frac{1}{3}(2-2\alpha)(1-\lambda) - \frac{1}{4} \right)^2 + \left(\frac{1}{2}(1-\alpha)\lambda - \frac{1}{4} \right)^2 =$$
$$= \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6}\lambda - \frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{6}\alpha\lambda \right)^2 + \left(\alpha - \frac{1}{4} \right)^2 + \left(\frac{5}{12} - \frac{2}{3}\lambda - \frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{3}\alpha\lambda \right)^2 + \left(\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\alpha\lambda - \frac{1}{4} \right)^2 = f(\alpha, \lambda), \tag{33}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(\alpha, \lambda) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{j=1}^{4} \left(\tilde{q}_j - \frac{1}{4} \right)^2 = -\frac{10}{9} + \frac{14}{9}\lambda - \frac{13}{9}\lambda^2 + \frac{28}{9}\alpha - \frac{14}{9}\alpha\lambda + \frac{13}{9}\alpha\lambda^2, \tag{34}$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} f(\alpha, \lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \sum_{j=1}^{4} \left(\tilde{q}_j - \frac{1}{4} \right)^2 = -\frac{7}{9} + \frac{14}{9}\alpha + \frac{13}{9}\lambda - \frac{26}{9}\alpha\lambda - \frac{7}{9}\alpha^2 + \frac{13}{9}\alpha^2\lambda, \tag{35}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} f(\alpha, \lambda) = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \sum_{j=1}^{4} \left(\tilde{q}_j - \frac{1}{4} \right)^2 =$$
$$= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(-\frac{10}{9} + \frac{14}{9}\lambda - \frac{13}{9}\lambda^2 + \frac{28}{9}\alpha - \frac{14}{9}\alpha\lambda + \frac{13}{9}\alpha\lambda^2 \right) = \frac{28}{9} - \frac{14}{9}\lambda + \frac{13}{9}\lambda^2, \tag{36}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} f(\alpha, \lambda) = \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \sum_{j=1}^{4} \left(\tilde{q}_j - \frac{1}{4} \right)^2 =$$
$$= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(-\frac{7}{9} + \frac{14}{9}\alpha + \frac{13}{9}\lambda - \frac{26}{9}\alpha\lambda - \frac{7}{9}\alpha^2 + \frac{13}{9}\alpha^2\lambda \right) = \frac{13}{9} - \frac{26}{9}\alpha + \frac{13}{9}\alpha^2, \tag{37}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial \alpha} f(\alpha, \lambda) = \frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial \alpha} \sum_{j=1}^{4} \left(\tilde{q}_j - \frac{1}{4} \right)^2 =$$

$$=\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(-\frac{10}{9}+\frac{14}{9}\lambda-\frac{13}{9}\lambda^2+\frac{28}{9}\alpha-\frac{14}{9}\alpha\lambda+\frac{13}{9}\alpha\lambda^2\right)=\frac{14}{9}-\frac{26}{9}\lambda-\frac{14}{9}\alpha+\frac{26}{9}\alpha\lambda\,, \tag{38}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\lambda}f(\alpha,\lambda)=\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\lambda}\sum_{j=1}^{4}\left(\breve{q}_j-\frac{1}{4}\right)^2=$$

$$=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(-\frac{7}{9}+\frac{14}{9}\alpha+\frac{13}{9}\lambda-\frac{26}{9}\alpha\lambda-\frac{7}{9}\alpha^2+\frac{13}{9}\alpha^2\lambda\right)=\frac{14}{9}-\frac{26}{9}\lambda-\frac{14}{9}\alpha+\frac{26}{9}\alpha\lambda\,. \tag{39}$$

Находим нули первых производных (34) и (35):

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}f(\alpha,\lambda)=0\,, \tag{40}$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}f(\alpha,\lambda)=0\,, \tag{41}$$

если

$$-\frac{10}{9}+\frac{14}{9}\lambda-\frac{13}{9}\lambda^2+\frac{28}{9}\alpha-\frac{14}{9}\alpha\lambda+\frac{13}{9}\alpha\lambda^2=0\,, \tag{42}$$

$$-\frac{7}{9}+\frac{14}{9}\alpha+\frac{13}{9}\lambda-\frac{26}{9}\alpha\lambda-\frac{7}{9}\alpha^2+\frac{13}{9}\alpha^2\lambda=0\,, \tag{43}$$

откуда

$$\alpha=\alpha^*=\frac{9}{35}\,,\quad \lambda=\lambda^*=\frac{7}{13}\,. \tag{44}$$

Далее, использовав (36) — (39),

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}f(\alpha,\lambda)\right|_{\alpha=\alpha^*=\frac{9}{35},\,\lambda=\lambda^*=\frac{7}{13}}=\left.\left(\frac{28}{9}-\frac{14}{9}\lambda+\frac{13}{9}\lambda^2\right)\right|_{\alpha=\alpha^*=\frac{9}{35},\,\lambda=\lambda^*=\frac{7}{13}}=\frac{35}{13}>0\,, \tag{45}$$

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}f(\alpha,\lambda)\right|_{\alpha=\alpha^*=\frac{9}{35},\,\lambda=\lambda^*=\frac{7}{13}}=\left.\left(\frac{13}{9}-\frac{26}{9}\alpha+\frac{13}{9}\alpha^2\right)\right|_{\alpha=\alpha^*=\frac{9}{35},\,\lambda=\lambda^*=\frac{7}{13}}=\frac{8788}{11025}\,, \tag{46}$$

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial\lambda\partial\alpha}f(\alpha,\lambda)\right|_{\alpha=\alpha^*=\frac{9}{35},\,\lambda=\lambda^*=\frac{7}{13}}=\left.\left(\frac{14}{9}-\frac{26}{9}\lambda-\frac{14}{9}\alpha+\frac{26}{9}\alpha\lambda\right)\right|_{\alpha=\alpha^*=\frac{9}{35},\,\lambda=\lambda^*=\frac{7}{13}}=0\,, \tag{47}$$

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\lambda}f(\alpha,\lambda)\right|_{\alpha=\alpha^*=\frac{9}{35},\,\lambda=\lambda^*=\frac{7}{13}}=\left.\left(\frac{14}{9}-\frac{26}{9}\lambda-\frac{14}{9}\alpha+\frac{26}{9}\alpha\lambda\right)\right|_{\alpha=\alpha^*=\frac{9}{35},\,\lambda=\lambda^*=\frac{7}{13}}=0 \tag{48}$$

и определитель

$$\begin{vmatrix}\left.\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}f(\alpha,\lambda)\right|_{\alpha=\alpha^*=\frac{9}{35},\,\lambda=\lambda^*=\frac{7}{13}} & \left.\frac{\partial^2}{\partial\lambda\partial\alpha}f(\alpha,\lambda)\right|_{\alpha=\alpha^*=\frac{9}{35},\,\lambda=\lambda^*=\frac{7}{13}}\\ \left.\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\lambda}f(\alpha,\lambda)\right|_{\alpha=\alpha^*=\frac{9}{35},\,\lambda=\lambda^*=\frac{7}{13}} & \left.\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}f(\alpha,\lambda)\right|_{\alpha=\alpha^*=\frac{9}{35},\,\lambda=\lambda^*=\frac{7}{13}}\end{vmatrix}=\frac{676}{315}>0\,, \tag{49}$$

то есть (44) являются координатами точки минимума функции (33). Подставляя (44) в (30), получаем единственное решение

$$\breve{\mathbf{Q}}^*=\begin{bmatrix}\frac{11}{35} & \frac{9}{35} & \frac{8}{35} & \frac{1}{5}\end{bmatrix} \tag{50}$$

задачи (31). В свою очередь, для задачи (32) получаем:

$$\sum_{j=1}^{4}\sum_{p=1}^{j-1}\left(\breve{q}_p-\breve{q}_j\right)^2=\left(\breve{q}_1-\breve{q}_2\right)^2+\left(\breve{q}_1-\breve{q}_3\right)^2+\left(\breve{q}_1-\breve{q}_4\right)^2+\left(\breve{q}_2-\breve{q}_3\right)^2+\left(\breve{q}_2-\breve{q}_4\right)^2+\left(\breve{q}_3-\breve{q}_4\right)^2=$$

$$=\left(\frac{1}{6}(1-\alpha)(2+\lambda)-\alpha\right)^2+\left(\frac{1}{6}(1-\alpha)(2+\lambda)-\frac{1}{3}(2-2\alpha)(1-\lambda)\right)^2+\left(\frac{1}{6}(1-\alpha)(2+\lambda)-\frac{1}{2}(1-\alpha)\lambda\right)^2+$$

$$+\left(\alpha-\frac{1}{3}(2-2\alpha)(1-\lambda)\right)^2+\left(\alpha-\frac{1}{2}(1-\alpha)\lambda\right)^2+\left(\frac{1}{3}(2-2\alpha)(1-\lambda)-\frac{1}{2}(1-\alpha)\lambda\right)^2=$$

$$=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\lambda-\frac{4}{3}\alpha-\frac{1}{6}\alpha\lambda\right)^2+\left(-\frac{1}{3}+\frac{5}{6}\lambda+\frac{1}{3}\alpha-\frac{5}{6}\alpha\lambda\right)^2+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\lambda-\frac{1}{3}\alpha+\frac{1}{3}\alpha\lambda\right)^2+$$

$$+\left(\frac{5}{3}\alpha-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\lambda-\frac{2}{3}\alpha\lambda\right)^2+\left(\alpha-\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2}\alpha\lambda\right)^2+\left(\frac{2}{3}-\frac{7}{6}\lambda-\frac{2}{3}\alpha+\frac{7}{6}\alpha\lambda\right)^2=h(\alpha,\lambda), \tag{51}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}h(\alpha,\lambda)=\frac{\partial}{\partial\alpha}\sum_{j=1}^{4}\sum_{p=1}^{j-1}\left(\tilde{q}_p-\tilde{q}_j\right)^2=-\frac{56}{9}\alpha\lambda+\frac{56}{9}\lambda+\frac{112}{9}\alpha-\frac{52}{9}\lambda^2+\frac{52}{9}\alpha\lambda^2-\frac{40}{9}, \tag{52}$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}h(\alpha,\lambda)=\frac{\partial}{\partial\lambda}\sum_{j=1}^{4}\sum_{p=1}^{j-1}\left(\tilde{q}_p-\tilde{q}_j\right)^2=-\frac{104}{9}\alpha\lambda+\frac{52}{9}\lambda+\frac{56}{9}\alpha-\frac{28}{9}-\frac{28}{9}\alpha^2+\frac{52}{9}\alpha^2\lambda, \tag{53}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}h(\alpha,\lambda)=\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\sum_{j=1}^{4}\sum_{p=1}^{j-1}\left(\tilde{q}_p-\tilde{q}_j\right)^2=$$

$$=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(-\frac{56}{9}\alpha\lambda+\frac{56}{9}\lambda+\frac{112}{9}\alpha-\frac{52}{9}\lambda^2+\frac{52}{9}\alpha\lambda^2-\frac{40}{9}\right)=\frac{112}{9}-\frac{56}{9}\lambda+\frac{52}{9}\lambda^2, \tag{54}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}h(\alpha,\lambda)=\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\sum_{j=1}^{4}\sum_{p=1}^{j-1}\left(\tilde{q}_p-\tilde{q}_j\right)^2=$$

$$=\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(-\frac{104}{9}\alpha\lambda+\frac{52}{9}\lambda+\frac{56}{9}\alpha-\frac{28}{9}-\frac{28}{9}\alpha^2+\frac{52}{9}\alpha^2\lambda\right)=\frac{52}{9}-\frac{104}{9}\alpha+\frac{52}{9}\alpha^2, \tag{55}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda\partial\alpha}h(\alpha,\lambda)=\frac{\partial^2}{\partial\lambda\partial\alpha}\sum_{j=1}^{4}\sum_{p=1}^{j-1}\left(\tilde{q}_p-\tilde{q}_j\right)^2=$$

$$=\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(-\frac{56}{9}\alpha\lambda+\frac{56}{9}\lambda+\frac{112}{9}\alpha-\frac{52}{9}\lambda^2+\frac{52}{9}\alpha\lambda^2-\frac{40}{9}\right)=\frac{104}{9}\alpha\lambda-\frac{104}{9}\lambda-\frac{56}{9}\alpha+\frac{56}{9}, \tag{56}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\lambda}h(\alpha,\lambda)=\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\lambda}\sum_{j=1}^{4}\sum_{p=1}^{j-1}\left(\tilde{q}_p-\tilde{q}_j\right)^2=$$

$$=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(-\frac{104}{9}\alpha\lambda+\frac{52}{9}\lambda+\frac{56}{9}\alpha-\frac{28}{9}-\frac{28}{9}\alpha^2+\frac{52}{9}\alpha^2\lambda\right)=\frac{104}{9}\alpha\lambda-\frac{104}{9}\lambda-\frac{56}{9}\alpha+\frac{56}{9}. \tag{57}$$

Решая уравнения

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}h(\alpha,\lambda)=0, \tag{58}$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}h(\alpha,\lambda)=0, \tag{59}$$

то есть

$$-\frac{56}{9}\alpha\lambda+\frac{56}{9}\lambda+\frac{112}{9}\alpha-\frac{52}{9}\lambda^2+\frac{52}{9}\alpha\lambda^2-\frac{40}{9}=0, \tag{60}$$

$$-\frac{104}{9}\alpha\lambda+\frac{52}{9}\lambda+\frac{56}{9}\alpha-\frac{28}{9}-\frac{28}{9}\alpha^2+\frac{52}{9}\alpha^2\lambda=0, \tag{61}$$

находим (44), после чего, использовав (54) — (57),

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}h(\alpha,\lambda)\right|_{\alpha=\alpha^*=\frac{9}{35},\,\lambda=\lambda^*=\frac{7}{13}}=\left.\left(\frac{112}{9}-\frac{56}{9}\lambda+\frac{52}{9}\lambda^2\right)\right|_{\alpha=\alpha^*=\frac{9}{35},\,\lambda=\lambda^*=\frac{7}{13}}=\frac{140}{13}>0, \tag{62}$$

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}h(\alpha,\lambda)\right|_{\alpha=\alpha^*=\frac{9}{35},\,\lambda=\lambda^*=\frac{7}{13}}=\left.\left(\frac{52}{9}-\frac{104}{9}\alpha+\frac{52}{9}\alpha^2\right)\right|_{\alpha=\alpha^*=\frac{9}{35},\,\lambda=\lambda^*=\frac{7}{13}}=\frac{35152}{11025}, \tag{63}$$

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial\lambda\partial\alpha}h(\alpha,\lambda)\right|_{\alpha=\alpha^*=\frac{9}{35},\,\lambda=\lambda^*=\frac{7}{13}}=\left.\left(\frac{104}{9}\alpha\lambda-\frac{104}{9}\lambda-\frac{56}{9}\alpha+\frac{56}{9}\right)\right|_{\alpha=\alpha^*=\frac{9}{35},\,\lambda=\lambda^*=\frac{7}{13}}=0, \tag{64}$$

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\lambda}h(\alpha,\lambda)\right|_{\alpha=\alpha^*=\frac{9}{35},\ \lambda=\lambda^*=\frac{7}{13}} = \left.\left(\frac{104}{9}\alpha\lambda - \frac{104}{9}\lambda - \frac{56}{9}\alpha + \frac{56}{9}\right)\right|_{\alpha=\alpha^*=\frac{9}{35},\ \lambda=\lambda^*=\frac{7}{13}} = 0\,, \qquad (65)$$

$$\begin{vmatrix} \left.\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}h(\alpha,\lambda)\right|_{\alpha=\alpha^*=\frac{9}{35},\ \lambda=\lambda^*=\frac{7}{13}} & \left.\frac{\partial^2}{\partial\lambda\partial\alpha}h(\alpha,\lambda)\right|_{\alpha=\alpha^*=\frac{9}{35},\ \lambda=\lambda^*=\frac{7}{13}} \\ \left.\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\lambda}h(\alpha,\lambda)\right|_{\alpha=\alpha^*=\frac{9}{35},\ \lambda=\lambda^*=\frac{7}{13}} & \left.\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}h(\alpha,\lambda)\right|_{\alpha=\alpha^*=\frac{9}{35},\ \lambda=\lambda^*=\frac{7}{13}} \end{vmatrix} = \frac{10816}{315} > 0\,, \qquad (66)$$

а (44) являются координатами точки минимума функции (51), откуда получается единственное решение (50) и задачи (32), и обеих задач (31) и (32). Теорема доказана.

Вывод и возможность продолжения исследований

Отметим, что решение строгой задачи устранения однопараметрической четырёхмодельной $\{2\sigma, 3\sigma, 4\sigma\}$-неопределённости с помощью применения оценки (28) или, другими словами, чистой стратегии s_2, является лишь частным случаем, когда минимакс в 4×4-игре (11) совпал с оптимальным значением игры. И, безусловно, решение (50) этой задачи является исключительно локальным случаем при соотношении $2:3:4$ между тремя зафиксированными значениями по отношению к четвёртому (минимальному). Однако идея процесса её решения может быть использована и для устранения однопараметрической четырёхмодельной $\{a, b, c\}$-неопределённости с модельными значениями

$$\{v_i\}_{i=1}^{4} = \{v_1, v_1 + a, v_1 + b, v_1 + c\}\,,\ \ v_1 \subset \mathbb{R}\,,\ \ a > 0\,,\ \ b > 0\,,\ \ c > 0\,. \qquad (67)$$

Возможность продолжения исследований устранения однопараметрической четырёхмодельной неопределённости состоит также в некотором ослаблении предельно жёстких условий неопределённости, когда ничего не известно о распределении вероятностей (все вероятностные распределения на множестве четырёх значений является равноправными), то есть в байесификации [2] соответствующей задачи принятия решений. Кроме того, в данной работе рассмотрены лишь однопараметрические математические модели, с одним модельным “выходом”, тогда как, вообще говоря, математические модели могут иметь больше выходных переменных (скажем, система нескольких дифференциальных уравнений), и даже описывающие один объект разные математические модели могут иметь неодинаковое количество этих переменных (модельных значений).

Литература

1. Kovalchuk S. S. An antagonistic framework as symmetric kernel matrix game for removing four-model uncertainty of tool wear evaluation / S. S. Kovalchuk, V. V. Romanuke // Інформатика та системні науки (ІСН-2012) : матеріали ІІІ Всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Полтава, 1 — 3 березня 2012 р.) / за ред. О. О. Ємця. — Полтава : ПУЕТ, 2012. — С. 261 — 264.
2. Трухаев Р. И. Модели принятия решений в условиях неопределённости / Трухаев Р. И. — М. : Наука, 1981. — 258 с.
3. Романюк В. В. Определение квазиравновероятного распределения из континуума оптимальных стратегий в строгой задаче устранения однопараметрической трёхмодельной $\{2\varepsilon, 3\varepsilon\}$-неопределённости по принципу гарантировано минимальных абсолютных отклонений / В. В. Романюк // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. — 2012. — № 2. — С. 56 — 64.

Надійшла 20.6.2012 р.
Рецензент: д.т.н. Рудницький В.Б.