Романюк В.В.
Хмельницький національний університет,
м. Хмельницький, Україна

МОДЕЛЬ ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО РІШЕННЯ ПРОЕКТУВАЛЬНИКА У ЗАДАЧІ ПРО РОЗРАХУНОК ПОВЗДОВЖНЬОЇ СТІЙКОСТІ ДВОХ ЕЛЕМЕНТІВ БУДІВЕЛЬНОЇ КОНСТРУКЦІЇ ПРИ ДІЇ НА НИХ НОРМОВАНОГО СТИСКАЮЧОГО ЗУСИЛЛЯ

Вступ та постановка проблеми

Основними завданнями сучасної прикладної математики є моделювання та оптимізація, у першу чергу, екологічних та енергетичних систем, які дуже сильно впливають на розвиток суспільства. Не далекий вже той час, коли прикладна математика стане фундаментальною складовою у галузі медицини. Про роль точних наук у будівельних галузях, зокрема, у прикладній механіці й опорі матеріалів, говорити зайве. Тут усе знаходиться у математичній атмосфері, панує точність і надійність. Однак у будівельній механіці існує задача про розрахунок повздовжньої стійкості елемента конструкції, який являє собою призматичний стержень, під дією стискаючого зусилля. Як правило, інтервал значень стискаючого зусилля є відомим, але при дії на декілька стержнів одночасно воно розподіляється заздалегідь непередбачуваним чином. Таке явище можна змоделювати у формі антагоністичної гри, де, як відомо, фігурують імовірності та математичні сподівання виграшів при описі і застосуванні змішаних стратегій.

Аналіз останніх публікацій по напряму використання теорії антагоністичних ігор у будівельній механіці

Будівельна механіка є порівняно новою галуззю, де може застосовуватись теорія антагоністичних ігор, адже основним фрагментом практичного впровадження результатів теорії антагоністичних ігор є конфліктні соціально-економічні процеси [1, 2]. Про задачу представлення розрахунку повздовжньої стійкості системи призматичних стержнів під дією стиснення у формі антагоністичної гри згадується у [3, с. 144], де здійснено постановку задачі в узагальненому виді. Проте розв’язок поставленої задачі не є відомим, хоча й передбачається, що припущення про випуклість функції від площі поперечного перерізу стержня як частки від граничного навантаження на нього є достатнім для існування рівноважної ситуації [4].

Формулювання мети статті

Відштовхуватимемось від найпростішої системи призматичних стержнів, на яку діє одиничне сумарне стискаюче зусилля. Якщо на перший з двох стержнів діє зусилля x, то тоді на другий стержень діє зусилля $1-x$. Кількість виділеного матеріалу, тобто сума площ поперечних перерізів двох стержнів, є фіксованою і приймається рівною одиниці. Якщо y є площею поперечного перерізу першого стержня, то $1-y$ є площею поперечного перерізу другого. Вважається, що зі зміною площі y кожен з поперечних перерізів залишається геометрично подібним самому собі.

Частка від граничного навантаження на перший стержень, яке виникає у ньому при стискаючому зусиллі x та площі його поперечного перерізу y, виражається [3, с. 144] функцією $k\dfrac{x}{y^2}$, де коефіцієнт k характеризує механічні якості матеріалу, з якого виготовлені стержні. Очевидно, що частка від граничного навантаження на другий стержень, яке виникає у ньому при стискаючому зусиллі $1-x$ та площі його поперечного перерізу $1-y$, виражається функцією $k\dfrac{1-x}{(1-y)^2}$. Метою того, хто задає площі поперечних перерізів двох стержнів, тобто проектувальника, є мінімізація найбільшого граничного навантаження на стержні [3, с. 130] з урахуванням того, що стискаюче зусилля на перший стержень укладено в підсегмент $[a; b] \subset [0; 1]$, де $0 < a < b < 1$. Таким чином, функцією виграшу відповідної антагоністичної гри є поверхня

$$T(x, y) = \max\left\{k\frac{x}{y^2},\ k\frac{1-x}{(1-y)^2}\right\} = k\max\left\{\frac{x}{y^2},\ \frac{1-x}{(1-y)^2}\right\}, \tag{1}$$

де $x \in [a; b]$, $y \in [a; b]$, яка задається на підмножині $[a; b] \times [a; b]$ одиничного квадрату $[0; 1] \times [0; 1]$. Звідси метою даної статті виступає задача знаходження розв’язку антагоністичної гри з функцією виграшу (1), де перший гравець, в особі або якості якого виступають певні невідомі наперед обставини, має сегмент $[a; b]$ чистих стратегій, а проектувальник (другий гравець) володіє такою ж самою множиною чистих стратегій.

Обгрунтування випуклості гри

Якщо гра виявиться випуклою, то у ній проектувальник володітиме чистою оптимальною стратегією, і тим легше, можна сказати, навіть тривіально, буде реалізована оптимальна поведінка в рівноважній ситуації. Розглянемо функцію виграшу (1). Тут її частини під знаком максимуму мають такі другі частинні похідні по y :

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{x}{y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{2x}{y^3}\right) = \frac{6x}{y^4}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1-x}{(1-y)^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2(1-x)}{(1-y)^3}\right) = \frac{6(1-x)}{(1-y)^4}. \tag{3}$$

А оскільки $y \in [a; b]$ та й $x \in [a; b]$, то (2) і (3) набувають додатних значень при довільному $y \in [a; b]$. Тому умова $\frac{\partial^2}{\partial y^2}T(x, y) > 0$ строгої випуклості антагоністичної гри виконана $\forall\ y \in [a; b]$. Отже, гра з функцією виграшу (1) на квадраті $[a; b] \times [a; b]$ є строго випуклою, і у ній проектувальник має чисту оптимальну стратегію $y_* \in [a; b]$, яка, до того ж, є його єдиною оптимальною стратегією.

Маємо:

$$\max_{x\in[a;b]} T(x, y) = k\max_{x\in[a;b]}\left\{\max\left\{\frac{x}{y^2},\ \frac{1-x}{(1-y)^2}\right\}\right\} =$$

$$= k\max\left\{\max_{x\in[a;b]}\frac{x}{y^2},\ \max_{x\in[a;b]}\frac{1-x}{(1-y)^2}\right\} = k\max\left\{\frac{b}{y^2},\ \frac{1-a}{(1-y)^2}\right\}, \tag{4}$$

$$\min_{y\in[a;b]}\max_{x\in[a;b]} T(x, y) = k\min_{y\in[a;b]}\max\left\{\frac{b}{y^2},\ \frac{1-a}{(1-y)^2}\right\}, \tag{5}$$

де мінімум (5) досягається на чистій оптимальній стратегії $y = y_*$, котра є коренем рівняння:

$$\frac{b}{y^2} = \frac{1-a}{(1-y)^2}, \tag{6}$$

з якого через:

$$b(1-y)^2 = (1-a)\,y^2,$$

$$b\left(1-2y+y^2\right) = y^2 - ay^2,$$

отримуємо квадратне рівняння:

$$y^2\left(a+b-1\right)-2by+b=0\,. \tag{7}$$

Дискримінант квадратного рівняння (7):

$$D=\left(-2b\right)^2-4\left(a+b-1\right)b=4b^2-4ab-4b^2+4b=4b\left(1-a\right) \tag{8}$$

й, остаточно, корені рівняння (6) або (7):

$$\begin{aligned} y=y_1&=\frac{2b-\sqrt{D}}{2\left(a+b-1\right)}=\frac{2b-\sqrt{4b\left(1-a\right)}}{2\left(a+b-1\right)}=\frac{b-\sqrt{b\left(1-a\right)}}{a+b-1}=\\ &=\frac{\sqrt{b}\left(\sqrt{b}-\sqrt{1-a}\right)}{\left(\sqrt{b}-\sqrt{1-a}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{1-a}\right)}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{1-a}}\,, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} y=y_2&=\frac{2b+\sqrt{D}}{2\left(a+b-1\right)}=\frac{2b+\sqrt{4b\left(1-a\right)}}{2\left(a+b-1\right)}=\frac{b+\sqrt{b\left(1-a\right)}}{a+b-1}=\\ &=\frac{\sqrt{b}\left(\sqrt{b}+\sqrt{1-a}\right)}{\left(\sqrt{b}-\sqrt{1-a}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{1-a}\right)}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{1-a}}\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Бачимо, що далі треба дослідити усі варіанти співвідношень кінців сегменту чистих стратегій проектувальника.

Випадок $a+b=1$

При $a+b=1$ рівняння (7) перетворюється у рівняння $-2by+b=0$, коренем якого є $y=y_*=\dfrac{1}{2}$. Тоді значення гри:

$$v_*=k\frac{b}{\left(y_*\right)^2}=k\frac{1-a}{\left(1-y_*\right)^2}=4kb=4k\left(1-a\right)\,. \tag{11}$$

Активні стратегії першого гравця знаходяться [5, 6] як корені рівняння $v_*=T\left(x,\,y_*\right)$. Маємо:

$$v_*=4kb=T\left(x,\,y_*\right)=T\left(x,\,\frac{1}{2}\right)=k\max\left\{4x,\,4\left(1-x\right)\right\}\,. \tag{12}$$

Очевидно, що коренями рівняння (12) є $x=x_*^{\langle 1\rangle}=a$ та $x=x_*^{\langle 2\rangle}=b$. Знайдемо імовірності, з якими перший гравець обиратиме свої активні стратегії, реалізуючи таким чином свою оптимальну змішану стратегію. Маємо:

$$\frac{d}{dy}T\left(x_*^{\langle 1\rangle},\,y\right)\Bigg|_{y=y_*}=\frac{d}{dy}T\left(a,\,y\right)\Bigg|_{y=\frac{1}{2}}=k\frac{d}{dy}\frac{1-a}{\left(1-y\right)^2}\Bigg|_{y=\frac{1}{2}}=2k\frac{1-a}{\left(1-y\right)^3}\Bigg|_{y=\frac{1}{2}}=16k\left(1-a\right)\,, \tag{13}$$

$$\frac{d}{dy}T\left(x_*^{\langle 2\rangle},\,y\right)\Big|_{y=y_*}=\frac{d}{dy}T\left(b,\,y\right)\Big|_{y=\frac{1}{2}}=k\frac{d}{dy}\frac{b}{y^2}\Big|_{y=\frac{1}{2}}=\left(-2k\frac{b}{y^3}\right)\Big|_{y=\frac{1}{2}}=-16kb\,. \tag{14}$$

Оптимальна імовірність $\alpha_*\left(x_*^{\langle 1\rangle}\right)$ обирання активної стратегії $x_*^{\langle 1\rangle}=a$ визначається з рівняння:

$$\alpha_*\left(x_*^{\langle 1\rangle}\right)\left(\frac{d}{dy}T\left(x_*^{\langle 1\rangle},\,y\right)\Big|_{y=y_*}\right)+\left[1-\alpha_*\left(x_*^{\langle 1\rangle}\right)\right]\left(\frac{d}{dy}T\left(x_*^{\langle 2\rangle},\,y\right)\Big|_{y=y_*}\right)=0\,, \tag{15}$$

тому із (13) і (14) тут:

$$16k\left(1-a\right)\alpha_*\left(x_*^{\langle 1\rangle}\right)+\left[1-\alpha_*\left(x_*^{\langle 1\rangle}\right)\right]\left(-16kb\right)=0\,, \tag{16}$$

звідки:

$$\alpha_*\left(x_*^{\langle 1\rangle}\right)=\frac{b}{1+b-a}=\frac{1-a}{1+b-a}=\frac{1}{2}\,. \tag{17}$$

Імовірністю $\alpha_*\left(x_*^{\langle 2\rangle}\right)$ обирання активної стратегії $x_*^{\langle 2\rangle}=b$ є $\alpha_*\left(x_*^{\langle 2\rangle}\right)=1-\alpha_*\left(x_*^{\langle 1\rangle}\right)=\frac{1}{2}$.

Як і слід було очікувати, у випадку $a+b=1$, коли проектувальник задає площу поперечного перерізу кожного стержня, яка дорівнює середині сегменту $\left[a;\,b\right]$ можливих стиснень, найгірша для нього ситуація наступить тоді, коли стискаюче зусилля з однаковою імовірністю дорівнюватиме одному з кінців цього сегменту.

Випадок $a+b<1$

При $a+b<1$ очевидно, що корінь (10) $y_2=\dfrac{b+\sqrt{b\left(1-a\right)}}{a+b-1}<0$. Тому дослідимо тільки корінь (9) y_1. Маємо $b<1-a$, $b^2<b\left(1-a\right)$, звідки буде $b<\sqrt{b\left(1-a\right)}$, що означає $b-\sqrt{b\left(1-a\right)}<0$. Отже, при $a+b<1$ значення $y_1=\dfrac{b-\sqrt{b\left(1-a\right)}}{a+b-1}>0$ і залишається вияснити, чи воно належить сегменту $\left[a;\,b\right]$.

Якщо $\dfrac{b-\sqrt{b\left(1-a\right)}}{a+b-1}\geqslant a$, то послідовно отримаємо:

$$\begin{gathered}
b-\sqrt{b\left(1-a\right)}\leqslant a^2+ab-a\,,\\
b+a-a\left(b+a\right)\leqslant\sqrt{b\left(1-a\right)}\,,\\
\left(b+a\right)\left(1-a\right)\leqslant\sqrt{b\left(1-a\right)}\,,\\
\left(b+a\right)^2\left(1-a\right)^2\leqslant b\left(1-a\right),\\
\left(b+a\right)^2\left(1-a\right)\leqslant b\,.
\end{gathered} \tag{18}$$

Позначивши $s=a+b$, нерівність (18) подамо у вигляді $s^2\left(1-a\right)\leqslant s-a$ та розв'яжемо відповідне квадратне рівняння:

$$s^2(1-a)-s+a=0. \tag{19}$$

Дискримінант квадратного рівняння (19):

$$D=1-4(1-a)a=1-4a+4a^2=(1-2a)^2. \tag{20}$$

Враховуючи, що при $a+b<1$ буде $2a<a+b<1$, то $a<\frac{1}{2}$, і тут для (20) $\sqrt{D}=1-2a$. Тому коренями рівняння (19) є:

$$s=s_1=\frac{1-(1-2a)}{2(1-a)}=\frac{a}{1-a}, \tag{21}$$

$$s=s_2=\frac{1+(1-2a)}{2(1-a)}=1. \tag{22}$$

Вітки параболи $s^2(1-a)-s+a$ як функції від $s=a+b$ направлені уверх, тому при $s\in[s_1;s_2]$ нерівність (18) виконана й $y_1\geqslant a$. Оскільки $a<\frac{1}{2}$, то $2>\frac{1}{1-a}$, звідки $1>a+b>2a>s_1$, тобто завжди $s>s_1$. Отже, при $s\in[s_1;1]$ нерівність (18) виконана й $y_1\geqslant a$.

Якщо $\frac{b-\sqrt{b(1-a)}}{a+b-1}\leqslant b$, то послідовно отримаємо:

$$\begin{gathered}
b-\sqrt{b(1-a)}\geqslant ab+b^2-b,\\
2b-ab-b^2\geqslant\sqrt{b(1-a)},\\
b\left[2-(b+a)\right]\geqslant\sqrt{b(1-a)},\\
b^2\left[2-(b+a)\right]^2\geqslant b(1-a),\\
b\left[2-(b+a)\right]^2\geqslant 1-a.
\end{gathered} \tag{23}$$

Нерівність (23) подаємо у вигляді $b(2-s)^2\geqslant 1-s+b$ та розв’язуємо відповідне квадратне рівняння:

$$bs^2+s(1-4b)+3b-1=0. \tag{24}$$

Дискримінант квадратного рівняння (24):

$$D=(1-4b)^2-4b(3b-1)=1-8b+16b^2-12b^2+4b=1-4b+4b^2=(1-2b)^2. \tag{25}$$

При $a+b<1$ може бути як $b<\frac{1}{2}$, так і $b\geqslant\frac{1}{2}$. Якщо $b\geqslant\frac{1}{2}$, то для (25) $\sqrt{D}=2b-1$ й коренями рівняння (24) є:

$$s=s_1=\frac{4b-1-(2b-1)}{2b}=\frac{2b}{2b}=1, \tag{26}$$

$$s = s_2 = \frac{4b-1+(2b-1)}{2b} = \frac{6b-2}{2b} = \frac{3b-1}{b}. \tag{27}$$

Вітки параболи $bs^2 + s(1-4b) + 3b - 1$ як функції від $s = a + b$ направлені уверх, тому при $s \leqslant s_1 = 1$ буде виконана нерівність (23) й $y_1 \leqslant b$. Але при $b < \frac{1}{2}$ для (25) $\sqrt{D} = 1 - 2b$ й $s_2 < s_1$, тому умова $y_1 \leqslant b$ буде справедливою лише при $a + b \leqslant \frac{3b-1}{b}$. При $a + b > \frac{3b-1}{b}$ буде $y_1 > b$.

Таким чином, при $b \geqslant \frac{1}{2}$ точка $y_1 \in [a; b]$ й $y_* = y_1$ за (9). Тут значення гри можна знайти як:

$$v_* = k\frac{b}{(y_*)^2} = k\frac{b}{\left(\dfrac{b-\sqrt{b(1-a)}}{a+b-1}\right)^2} = \frac{kb(a+b-1)^2}{\left(b-\sqrt{b(1-a)}\right)^2} = kb\frac{(a+b)^2 - 2(a+b) + 1}{b^2 - 2b\sqrt{b(1-a)} + b(1-a)} =$$

$$= k\frac{(a+b)^2 - 2(a+b) + 1}{b - 2\sqrt{b(1-a)} + 1 - a} = k\frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{1-a}\right)^2\left(\sqrt{b}+\sqrt{1-a}\right)^2}{\left(\sqrt{b}-\sqrt{1-a}\right)^2} = k\left(\sqrt{b}+\sqrt{1-a}\right)^2. \tag{28}$$

Маємо рівняння:

$$v_* = k\left(\sqrt{b}+\sqrt{1-a}\right)^2 = T(x, y_*) = T\left(x, \frac{b-\sqrt{b(1-a)}}{a+b-1}\right). \tag{29}$$

Легко перевірити, що коренями рівняння (29) є $x = x_*^{\langle 1\rangle} = a$ та $x = x_*^{\langle 2\rangle} = b$. Справді, окрім (28), тут також значення гри можна знайти як:

$$v_* = k\frac{1-a}{(1-y_*)^2} = k\frac{1-a}{\left(1-\dfrac{b-\sqrt{b(1-a)}}{a+b-1}\right)^2} =$$

$$= k\frac{(1-a)(a+b-1)^2}{\left(a+b-1-b+\sqrt{b(1-a)}\right)^2} = k\frac{(1-a)\left[(a+b)^2 - 2(a+b) + 1\right]}{\left(a-1+\sqrt{b(1-a)}\right)^2} =$$

$$= k\frac{(1-a)\left[(a+b)^2 - 2(a+b) + 1\right]}{(a-1)^2 + 2(a-1)\sqrt{b(1-a)} + b(1-a)} = k\frac{(a+b)^2 - 2(a+b) + 1}{1 - a - 2\sqrt{b(1-a)} + b} =$$

$$= k\frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{1-a}\right)^2\left(\sqrt{b}+\sqrt{1-a}\right)^2}{\left(\sqrt{b}-\sqrt{1-a}\right)^2} = k\left(\sqrt{b}+\sqrt{1-a}\right)^2.$$

Знайдемо імовірності $\alpha_*\left(x_*^{\langle 1\rangle}\right)$ й $\alpha_*\left(x_*^{\langle 2\rangle}\right)$. Маємо:

$$\left.\frac{d}{dy}T\left(x_*^{\langle 1\rangle},\, y\right)\right|_{y=y_*}=\left.\frac{d}{dy}T\left(a,\, y\right)\right|_{y=y_1}=\left.k\frac{d}{dy}\frac{1-a}{\left(1-y\right)^2}\right|_{y=y_1}=$$

$$=\left.2k\frac{1-a}{\left(1-y\right)^3}\right|_{y=y_1}=2k\frac{\left(1-a\right)\left(a+b-1\right)^3}{\left(a-1+\sqrt{b\left(1-a\right)}\right)^3}, \tag{30}$$

$$\left.\frac{d}{dy}T\left(x_*^{\langle 2\rangle},\, y\right)\right|_{y=y_*}=\left.\frac{d}{dy}T\left(b,\, y\right)\right|_{y=y_1}=\left.k\frac{d}{dy}\frac{b}{y^2}\right|_{y=y_1}=$$

$$=\left.\left(-2k\frac{b}{y^3}\right)\right|_{y=y_1}=-2k\frac{b\left(a+b-1\right)^3}{\left(b-\sqrt{b\left(1-a\right)}\right)^3}, \tag{31}$$

після чого рівняння (15) приймає вид:

$$2k\frac{\left(1-a\right)\left(a+b-1\right)^3}{\left(a-1+\sqrt{b\left(1-a\right)}\right)^3}\alpha_*\left(x_*^{\langle 1\rangle}\right)+\left[1-\alpha_*\left(x_*^{\langle 1\rangle}\right)\right]\left(-2k\frac{b\left(a+b-1\right)^3}{\left(b-\sqrt{b\left(1-a\right)}\right)^3}\right)=0, \tag{32}$$

або, після спрощення:

$$\alpha_*\left(x_*^{\langle 1\rangle}\right)\left[\frac{1-a}{\left(a-1+\sqrt{b\left(1-a\right)}\right)^3}+\frac{b}{\left(b-\sqrt{b\left(1-a\right)}\right)^3}\right]-\frac{b}{\left(b-\sqrt{b\left(1-a\right)}\right)^3}=0. \tag{33}$$

Тепер, враховуючи співвідношення:

$$\left(a-1+\sqrt{b\left(1-a\right)}\right)^3=\left(a-1\right)^3+3\left(a-1\right)^2\sqrt{b\left(1-a\right)}-3b\left(1-a\right)^2+b\left(1-a\right)\sqrt{b\left(1-a\right)},$$

$$\left(b-\sqrt{b\left(1-a\right)}\right)^3=b^3-3b^2\sqrt{b\left(1-a\right)}+3b^2\left(1-a\right)-b\left(1-a\right)\sqrt{b\left(1-a\right)},$$

маємо:

$$\frac{1-a}{\left(a-1+\sqrt{b\left(1-a\right)}\right)^3}=\frac{1-a}{\left(a-1\right)^3+3\left(a-1\right)^2\sqrt{b\left(1-a\right)}-3b\left(1-a\right)^2+b\left(1-a\right)\sqrt{b\left(1-a\right)}}=$$

$$=\frac{1}{-\left(a-1\right)^2+3\left(1-a\right)\sqrt{b\left(1-a\right)}-3b\left(1-a\right)+b\sqrt{b\left(1-a\right)}}=$$

$$=\frac{1}{\left(3\left(1-a\right)+b\right)\sqrt{b\left(1-a\right)}-\left(1-a\right)\left(3b+1-a\right)}, \tag{34}$$

$$\frac{b}{\left(b-\sqrt{b\left(1-a\right)}\right)^3}=\frac{b}{b^3-3b^2\sqrt{b\left(1-a\right)}+3b^2\left(1-a\right)-b\left(1-a\right)\sqrt{b\left(1-a\right)}}=$$

$$=\frac{1}{b^2-3b\sqrt{b\left(1-a\right)}+3b\left(1-a\right)-\left(1-a\right)\sqrt{b\left(1-a\right)}}==\frac{1}{b\left(b+3\left(1-a\right)\right)-\sqrt{b\left(1-a\right)}\left(3b+1-a\right)}. \tag{35}$$

Розпишемо вираз у квадратних дужках лівої частини рівняння (33):

$$\frac{1-a}{\left(a-1+\sqrt{b(1-a)}\right)^3}+\frac{b}{\left(b-\sqrt{b(1-a)}\right)^3}=$$

$$=\frac{1}{\left(3(1-a)+b\right)\sqrt{b(1-a)}-(1-a)(3b+1-a)}+\frac{1}{b\left(b+3(1-a)\right)-\sqrt{b(1-a)}\,(3b+1-a)}=$$

$$=\frac{b\left(b+3(1-a)\right)-\sqrt{b(1-a)}\,(3b+1-a)+\left(3(1-a)+b\right)\sqrt{b(1-a)}-(1-a)(3b+1-a)}{\left[\left(3(1-a)+b\right)\sqrt{b(1-a)}-(1-a)(3b+1-a)\right]\left[b\left(b+3(1-a)\right)-\sqrt{b(1-a)}\,(3b+1-a)\right]}=$$

$$=\frac{\left(b+3(1-a)\right)\left(b+\sqrt{b(1-a)}\right)-(3b+1-a)\left(1-a+\sqrt{b(1-a)}\right)}{\left[\left(3(1-a)+b\right)\sqrt{b(1-a)}-(1-a)(3b+1-a)\right]\left[b\left(b+3(1-a)\right)-\sqrt{b(1-a)}\,(3b+1-a)\right]}. \quad (36)$$

Тоді рівняння (33) набуває форми:

$$\frac{\alpha_*\left(x_*^{\langle 1\rangle}\right)\left[\left(b+3(1-a)\right)\left(b+\sqrt{b(1-a)}\right)-(3b+1-a)\left(1-a+\sqrt{b(1-a)}\right)\right]}{\left[\left(3(1-a)+b\right)\sqrt{b(1-a)}-(1-a)(3b+1-a)\right]\left[b\left(b+3(1-a)\right)-\sqrt{b(1-a)}\,(3b+1-a)\right]}=$$

$$=\frac{1}{b\left(b+3(1-a)\right)-\sqrt{b(1-a)}\,(3b+1-a)}, \quad (37)$$

де, як видно, можна виконати скорочення на значення (35):

$$\alpha_*\left(x_*^{\langle 1\rangle}\right)\frac{\left(b+3(1-a)\right)\left(b+\sqrt{b(1-a)}\right)-(3b+1-a)\left(1-a+\sqrt{b(1-a)}\right)}{\left(3(1-a)+b\right)\sqrt{b(1-a)}-(1-a)(3b+1-a)}=1. \quad (38)$$

Вираз коефіцієнта перед імовірністю у (38) можна спростити:

$$\frac{\left(b+3(1-a)\right)\left(b+\sqrt{b(1-a)}\right)-(3b+1-a)\left(1-a+\sqrt{b(1-a)}\right)}{\left(3(1-a)+b\right)\sqrt{b(1-a)}-(1-a)(3b+1-a)}=$$

$$=\frac{\left(b+3(1-a)\right)\sqrt{b}\left(\sqrt{b}+\sqrt{1-a}\right)-\sqrt{1-a}\,(3b+1-a)\left(\sqrt{1-a}+\sqrt{b}\right)}{\left(3(1-a)+b\right)\sqrt{b(1-a)}-(1-a)(3b+1-a)}=$$

$$=\frac{\left[\left(b+3(1-a)\right)\sqrt{b}-\sqrt{1-a}\,(3b+1-a)\right]\left(\sqrt{b}+\sqrt{1-a}\right)}{\left[\left(3(1-a)+b\right)\sqrt{b}-\sqrt{1-a}\,(3b+1-a)\right]\sqrt{1-a}}=\frac{\sqrt{b}+\sqrt{1-a}}{\sqrt{1-a}}. \quad (39)$$

Отже, імовірність обирання активної стратегії $x_*^{\langle 1\rangle}=a$ тут визначена як обернене значення (39):

$$\alpha_*\left(x_*^{\langle 1\rangle}\right)=\alpha_*(a)=\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{1-a}}. \quad (40)$$

Імовірністю $\alpha_*\left(x_*^{\langle 2\rangle}\right)$ обирання активної стратегії $x_*^{\langle 2\rangle}=b$ є:

$$\alpha_*\left(x_*^{\langle 2\rangle}\right) = 1 - \alpha_*\left(x_*^{\langle 1\rangle}\right) = \alpha_*(b) = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b} + \sqrt{1-a}}. \qquad (41)$$

Таким чином, при $a + b < 1$ та $b \geqslant \frac{1}{2}$ оптимальна площа поперечного перерізу першого стержня дорівнює (9), а найгіршою ситуацією для проектувальника є випадок, коли стискаюче зусилля $x = a$ діє на перший стержень з імовірністю (40). Зауважимо, що імовірність (40), як і (41), є ірраціональними числами.

При $b < \frac{1}{2}$ й $a+b \leqslant \frac{3b-1}{b}$ також $y_1 \in [a; b]$ й $y_* = y_1$. Значенням гри залишиться (28), та й оптимальна змішана стратегія першого гравця не зміниться, де лівий та правий кінці сегменту $[a; b]$ можливих стискаючих зусиль мають обиратися з імовірностями (40) і (41) відповідно.

Продовжимо наші розмірковування для випадку $b < \frac{1}{2}$ й $a + b > \frac{3b-1}{b}$. Тут має місце наступне твердження.

Теорема 1. Антагоністична гра з функцією виграшів (1), яка задається на нескінченній підмножині $[a; b] \times [a; b]$ одиничного квадрату $[0; 1] \times [0; 1]$, при $b < \frac{1}{2}$ й $a + b > \frac{3b-1}{b}$ має єдину ситуацію рівноваги у чистих стратегіях $\{x_*, y_*\} = \{b, b\}$, де x_* та y_* є оптимальними чистими стратегіями першого та другого гравців відповідно.

Доведення. Оскільки функція під знаком мінімуму у (5) є випуклою, то при $y_1 > b$ буде $y_* = b$. При цьому різниця:

$$\frac{b}{b^2} - \frac{1-a}{(1-b)^2} = \frac{(1-b)^2 - (1-a)b}{b(1-b)^2} = \frac{1 - 2b + b^2 - b + ab}{b(1-b)^2} =$$

$$= \frac{b(a+b) - (3b-1)}{b(1-b)^2} = \frac{1}{(1-b)^2}\left(a + b - \frac{3b-1}{b}\right)$$

є додатною завдяки саме умові $a + b - \frac{3b-1}{b} > 0$, з чого випливає:

$$\max\left\{\frac{b}{(y_*)^2}, \frac{1-a}{(1-y_*)^2}\right\} = \frac{1}{b},$$

та $v_* = k\frac{b}{(y_*)^2} = \frac{k}{b}$. Знаходимо активні стратегії першого гравця як корені рівняння $v_* = T(x, y_*)$, яке тут приймає форму:

$$v_* = \frac{k}{b} = T(x, y_*) = T(x, b) = k\max\left\{\frac{x}{b^2}, \frac{1-x}{(1-b)^2}\right\}. \qquad (42)$$

Маємо різницю:

$$\frac{x}{b^2} - \frac{1-x}{(1-b)^2} = \frac{x(1-b)^2 - b^2(1-x)}{b^2(1-b)^2} = \frac{x - 2bx + b^2x - b^2 + b^2x}{b^2(1-b)^2} = \frac{x\left(2b^2 - 2b + 1\right) - b^2}{b^2(1-b)^2} \qquad (43)$$

з додатним нахилом $2b^2 - 2b + 1 = (b-1)^2 + b^2$, яка перетворюється у нуль при $x = \dfrac{b^2}{2b^2 - 2b + 1}$.

Але

$$\frac{b^2}{2b^2 - 2b + 1} - b = \frac{b^2 - 2b^3 + 2b^2 - b}{(b-1)^2 + b^2} = b\frac{-2b^2 + 3b - 1}{(b-1)^2 + b^2}, \tag{44}$$

де очевидними коренями квадратного рівняння $-2b^2 + 3b - 1 = 0$ є $b = 1$ та $b = \dfrac{1}{2}$. Ясно, що при $b \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$ буде $-2b^2 + 3b - 1 \geqslant 0$. При $b < \dfrac{1}{2}$ різниця (44) є від'ємною, тобто різниця (43) перетворюється у нуль у точці $x = \dfrac{b^2}{2b^2 - 2b + 1}$, що лежить ліворуч від точки $x = b$. Тому:

$$\max\left\{\frac{x}{b^2}, \frac{1-x}{(1-b)^2}\right\} = \frac{1-x}{(1-b)^2} \text{ при } x \in \left[a; \frac{b^2}{2b^2 - 2b + 1}\right] \tag{45}$$

і

$$\max\left\{\frac{x}{b^2}, \frac{1-x}{(1-b)^2}\right\} = \frac{x}{b^2} \text{ при } x \in \left[\frac{b^2}{2b^2 - 2b + 1}; b\right]. \tag{46}$$

Один корінь $x = b$ рівняння (42) очевидний. А якби було ще $\dfrac{k}{b} = k\dfrac{1-x}{(1-b)^2}$, то:

$$x = 1 - \frac{(1-b)^2}{b} = \frac{b - 1 + 2b - b^2}{b} = \frac{3b - 1 - b^2}{b}. \tag{47}$$

Проте різниця:

$$\frac{3b - 1 - b^2}{b} - a = \frac{3b - 1 - b^2 - ab}{b} = \frac{3b - 1 - b(b + a)}{b}$$

завдяки вихідній умові $a + b > \dfrac{3b - 1}{b}$ є від'ємною, тобто $\dfrac{3b - 1 - b^2}{b} < a$ і (47) не може бути коренем рівняння (42).

Отже, $x_* = b$ є єдиною оптимальною стратегією першого гравця, звідки і випливає те, що ситуація рівноваги у чистих стратегіях $\{x_*, y_*\} = \{b, b\}$ є єдиною у даній грі. Теорему доведено.

Наслідок 1. При $b \leqslant \dfrac{1}{3}$ антагоністична гра з функцією виграшів (1), яка задається на нескінченній підмножині $[a; b] \times [a; b]$ одиничного квадрату $[0; 1] \times [0; 1]$, має єдину ситуацію рівноваги у чистих стратегіях $\{x_*, y_*\} = \{b, b\}$.

Доведення. Умова $a+b>\dfrac{3b-1}{b}$ тут уже стає зайвою, оскільки при $b\leqslant\dfrac{1}{3}$ буде $\dfrac{3b-1}{b}\leqslant 0$, а у нас завжди має бути $a+b>0$. Автоматичне виконання останньої нерівності і доводить дане твердження для випадку $b\leqslant\dfrac{1}{3}$. Наслідок доведено.

Випадок $a+b>1$

У своєрідній дуальності цього випадку і випадку з $a+b<1$ ми переконаємось пізніше. Поки що зауважимо очевидну умову $y_2\geqslant 0$, але насправді при $a+b>1$ буде ще й $y_2>1$. Дійсно, якщо $\dfrac{b+\sqrt{b(1-a)}}{a+b-1}>1$, то:

$$b+\sqrt{b(1-a)}>a+b-1,$$
$$\sqrt{b(1-a)}>a-1,$$

що завжди виконано, адже $a-1<0$. Тому дослідимо тільки приналежність точки y_1 сегменту $[a;b]$.

Якщо $y_1\geqslant a$, то замість (18) має виконуватись:

$$(b+a)^2(1-a)\geqslant b. \tag{48}$$

При $a\leqslant\dfrac{1}{2}$ для дискримінанта (20) рівняння (19) $\sqrt{D}=1-2a$, $s_1\leqslant s_2$ у (21) та (22), і тоді нерівність (48) не виконується лише для $s\in\left[\dfrac{a}{1-a};1\right]$. А у нас $a+b>1$, тому при $a\leqslant\dfrac{1}{2}$ нерівність (48) виконана, тобто $y_1\geqslant a$. При $a>\dfrac{1}{2}$ для дискримінанта (20) рівняння (19) $\sqrt{D}=2a-1$, $s_1>s_2$ і тоді нерівність (48) не виконується лише для $s\in\left[1;\dfrac{a}{1-a}\right]$. Отже, при $a+b<\dfrac{a}{1-a}$ буде $y_1<a$, і при $a+b\geqslant\dfrac{a}{1-a}$ буде $y_1\geqslant a$.

Врахуємо, що при $2b>a+b>1$ буде $b>\dfrac{1}{2}$, і для нерівності:

$$b\left[2-(b+a)\right]^2\leqslant 1-a, \tag{49}$$

котра відповідає умові $y_1\leqslant b$, буде дискримінант (25) відповідного квадратного рівняння (24), де $\sqrt{D}=2b-1$ й $s_1\leqslant s_2$ у (26) та (27). Отже, при $s\in\left[1;\dfrac{3b-1}{b}\right]$ нерівність (49) виконана й $y_1\leqslant b$. Покажемо, що у цьому випадку $a+b<\dfrac{3b-1}{b}$. Якщо $2b<\dfrac{3b-1}{b}$, то виконуватиметься і нерівність $a+b<\dfrac{3b-1}{b}$. Маємо різницю:

$$2b - \frac{3b-1}{b} = \frac{2b^2 - 3b + 1}{b} = \frac{b^2 - 2b + 1 + b^2 - b}{b} = \frac{(b-1)^2 + b(b-1)}{b} = \frac{(b-1)(2b-1)}{b},$$

яка, зрозуміло, при $b > \frac{1}{2}$ є від'ємною. Тому $a + b < \frac{3b-1}{b}$.

Таким чином, при $a \leqslant \frac{1}{2}$ маємо $y_1 \in [a; b]$, й оптимальною стратегією проектувальника є $y_* = y_1$. Такою ж його оптимальна стратегія залишається і для випадку $a > \frac{1}{2}$ при $a+b \geqslant \frac{a}{1-a}$. Значенням гри залишиться (28), а оптимальна змішана стратегія першого гравця також полягатиме у виборі лівого та правого кінців сегменту $[a; b]$ з імовірностями (40) і (41) відповідно.

Для випадку $a > \frac{1}{2}$ й $a + b < \frac{a}{1-a}$ має місце твердження, яке може вважатись дуальним до теореми 1 з випадком $b < \frac{1}{2}$ й $a + b > \frac{3b-1}{b}$.

Теорема 2. Антагоністична гра з функцією виграшів (1), яка задається на нескінченній підмножині $[a; b] \times [a; b]$ одиничного квадрату $[0; 1] \times [0; 1]$, при $a > \frac{1}{2}$ й $a + b < \frac{a}{1-a}$ має єдину ситуацію рівноваги у чистих стратегіях $\{x_*, y_*\} = \{a, a\}$, де x_* та y_* є оптимальними чистими стратегіями першого та другого гравців відповідно.

Доведення. Оскільки функція під знаком мінімуму у (5) є випуклою, то при $y_1 < a$ буде $y_* = a$. При цьому різниця:

$$\frac{b}{a^2} - \frac{1-a}{(1-a)^2} = \frac{b - ba - a^2}{a^2(1-a)} = \frac{b(1-a) - a^2}{a^2(1-a)}$$

є додатною завдяки саме умові $a + b < \frac{a}{1-a}$, з чого випливає:

$$\max\left\{\frac{b}{(y_*)^2}, \frac{1-a}{(1-y_*)^2}\right\} = \frac{1}{1-a},$$

та $v_* = k\frac{1-a}{(1-y_*)^2} = \frac{k}{1-a}$. Знаходимо активні стратегії першого гравця як корені рівняння $v_* = T(x, y_*)$, яке тут приймає форму:

$$v_* = \frac{k}{1-a} = T(x, y_*) = T(x, a) = k\max\left\{\frac{x}{a^2}, \frac{1-x}{(1-a)^2}\right\}. \tag{50}$$

Маємо різницю:

$$\frac{x}{a^2} - \frac{1-x}{(1-a)^2} = \frac{x(1-a)^2 - a^2(1-x)}{a^2(1-a)^2} = \frac{x - 2ax + a^2x - a^2 + a^2x}{a^2(1-a)^2} = \frac{x(2a^2 - 2a + 1) - a^2}{a^2(1-a)^2} \tag{51}$$

з додатним нахилом $2a^2-2a+1=\left(a-1\right)^2+a^2$, яка перетворюється у нуль при $x=\dfrac{a^2}{2a^2-2a+1}$. Але

$$\frac{a^2}{2a^2-2a+1}-a=\frac{a^2-2a^3+2a^2-a}{\left(a-1\right)^2+a^2}=a\frac{-2a^2+3a-1}{\left(a-1\right)^2+a^2}, \tag{52}$$

де очевидними коренями квадратного рівняння $-2a^2+3a-1=0$ є $a=1$ та $a=\dfrac{1}{2}$. Ясно, що при $a\in\left[\dfrac{1}{2};1\right]$ буде $-2a^2+3a-1\geqslant 0$. При $a>\dfrac{1}{2}$ різниця (52) є додатною, адже $a<1$ завжди, тобто різниця (51) перетворюється у нуль у точці $x=\dfrac{a^2}{2a^2-2a+1}$, що лежить праворуч від точки $x=a$. Тому:

$$\max\left\{\frac{x}{a^2},\frac{1-x}{\left(1-a\right)^2}\right\}=\frac{1-x}{\left(1-a\right)^2}\ \text{при}\ x\in\left[a;\frac{a^2}{2a^2-2a+1}\right] \tag{53}$$

і

$$\max\left\{\frac{x}{a^2},\frac{1-x}{\left(1-a\right)^2}\right\}=\frac{x}{a^2}\ \text{при}\ x\in\left[\frac{a^2}{2a^2-2a+1};b\right]. \tag{54}$$

Один корінь $x=a$ рівняння (50) очевидний. А якби було ще $\dfrac{k}{1-a}=k\dfrac{x}{a^2}$, то:

$$x=\frac{a^2}{1-a}. \tag{55}$$

Проте різниця:

$$\frac{a^2}{1-a}-b=\frac{a^2-b+ba}{1-a}=\frac{a^2-b\left(1-a\right)}{1-a}$$

завдяки вихідній умові $a+b<\dfrac{a}{1-a}$ є додатною, тобто $\dfrac{a^2}{1-a}>b$ і (55) не може бути коренем рівняння (50).

Отже, $x_*=a$ є єдиною оптимальною стратегією першого гравця, звідки і випливає те, що ситуація рівноваги у чистих стратегіях $\left\{x_*,\ y_*\right\}=\left\{a,\ a\right\}$ є єдиною у даній грі. Теорему доведено.

Наслідок 2. При $a\geqslant\dfrac{2}{3}$ антагоністична гра з функцією виграшів (1), яка задається на нескінченній підмножині $\left[a;b\right]\times\left[a;b\right]$ одиничного квадрату $\left[0;1\right]\times\left[0;1\right]$, має єдину ситуацію рівноваги у чистих стратегіях $\left\{x_*,\ y_*\right\}=\left\{a,\ a\right\}$.

Доведення. Умова $a+b<\dfrac{a}{1-a}$ тут уже стає зайвою, оскільки при $a\geqslant\dfrac{2}{3}$ буде $\dfrac{a}{1-a}\geqslant 2$, а у нас завжди має бути $a+b<2$, оскільки $a<1$ й $b<1$. Автоматичне виконання нерівності $a+b<2$ і доводить дане твердження для випадку $a\geqslant\dfrac{2}{3}$. Наслідок доведено.

Об'єднання наслідків двох доведених теорем дає необхідну і достатню умову того, щоб корінь (9) належав сегменту $[a;\,b]$ і, таким чином, був оптимальною стратегією проектувальника. А саме, при $(a+b)\in\left[\dfrac{a}{1-a};\,\dfrac{3b-1}{b}\right]$ оптимальною стратегією проектувальника є $y_*=\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{1-a}}$.

Підсумкове обговорення результатів і висновок про перспективу подальшого дослідження

У представленій нижче таблиці наведено згруповані результати розв'язування антагоністичної гри з функцією виграшу (1) на підмножині $[a;\,b]\times[a;\,b]$ одиничного квадрату $[0;\,1]\times[0;\,1]$, де відокремлено випадки $a+b<1$, $a+b=1$, $a+b>1$. При $a+b<1$ із $a\in(0;\,b)$ випливає, що $a\in\left(0;\,\dfrac{1}{2}\right)$, тому якщо найменше можливе значення стискаючого зусилля на перший стержень є меншим за половину від сумарного навантаження на обидва стержні, то оптимальна площа поперечного перерізу першого стержня залишається більшою за a. Проте ірраціональність оптимальної імовірності (40) обирання чистої стратегії $x_*^{\langle 1\rangle}=a$ першого гравця означає, що його оптимальна поведінка у цій грі є такою, яка не може бути практично реалізована ні при якій як завгодно великій кількості повторень гри [3, с. 201; 7, 8]. При цьому у випадку, коли верхнє можливе значення стискаючого зусилля на перший стержень не перевищує третини від загального навантаження на обидва стержні, то оптимальна площа поперечного перерізу першого стержня дорівнює максимально можливому значенню стискаючого зусилля на цей стержень. Але у таких випадках найгірша ситуація для проектувальника у дійсності може наступити, оскільки випадкові обставини в особі першого гравця мають чисту оптимальну стратегію, котра також дорівнює максимально можливому значенню стискаючого зусилля на перший стержень.

<table>
<tr><th>a</th><th>b</th><th>$a+b$</th><th>y_*</th><th>$\alpha_*(a)$</th><th>v_*</th></tr>
<tr><td rowspan="4">$a<\dfrac{1}{2}$</td><td>$b\geqslant\dfrac{1}{2}$</td><td>$a+b<1$</td><td rowspan="2">$y_*=\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{1-a}}$</td><td rowspan="2">$\alpha_*(a)=\dfrac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{1-a}}$</td><td rowspan="2">$k\left(\sqrt{b}+\sqrt{1-a}\right)^2$</td></tr>
<tr><td>$b<\dfrac{1}{2}$</td><td>$a+b\leqslant\dfrac{3b-1}{b}$</td></tr>
<tr><td>$b<\dfrac{1}{2}$</td><td>$a+b>\dfrac{3b-1}{b}$</td><td>$y_*=b$</td><td>$\alpha_*(a)=0$</td><td>$v_*=\dfrac{k}{b}$</td></tr>
<tr><td>$b>\dfrac{1}{2}$</td><td>$a+b=1$</td><td>$y_*=\dfrac{1}{2}$</td><td>$\alpha_*(a)=\dfrac{1}{2}$</td><td>$v_*=4kb=$
$=4k(1-a)$</td></tr>
<tr><td>$a\leqslant\dfrac{1}{2}$</td><td></td><td>$a+b>1$</td><td rowspan="2">$y_*=\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{1-a}}$</td><td rowspan="2">$\alpha_*(a)=\dfrac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{1-a}}$</td><td rowspan="2">$k\left(\sqrt{b}+\sqrt{1-a}\right)^2$</td></tr>
<tr><td>$a>\dfrac{1}{2}$</td><td></td><td>$a+b\geqslant\dfrac{a}{1-a}$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$a+b<\dfrac{a}{1-a}$</td><td>$y_*=a$</td><td>$\alpha_*(a)=1$</td><td>$v_*=\dfrac{k}{1-a}$</td></tr>
</table>

Випадок із $a+b=1$ видається доволі нескладним: проектувальник має площі поперечних перерізів обох стержнів зробити рівними, і тут найгірша для нього ситуація є такою, що може бути практично цілком реалізованою навіть за два повторення гри.

При $a + b > 1$ із $b \in (a; 1)$ випливає, що $b \in \left(\frac{1}{2}; 1 \right)$, тому якщо найбільше можливе значення стискаючого зусилля на перший стержень є більшим за половину від сумарного навантаження на обидва стержні, то оптимальна площа поперечного перерізу першого стержня залишається меншою за b. Проте, знову ж таки, ірраціональність оптимальної імовірності (40) обирання чистої стратегії $x_*^{\langle 1 \rangle} = a$ першого гравця означає, що його оптимальна поведінка і для таких випадків є такою, котра не може бути практично реалізована ні при якій як завгодно великій кількості повторень гри. Але у випадку, коли нижнє можливе значення стискаючого зусилля на перший стержень не є меншим за дві третини від загального навантаження на обидва стержні, й оптимальна площа поперечного перерізу першого стержня дорівнює мінімально можливому значенню стискаючого зусилля на цей стержень, будь-яка ірраціональність відсутня, і найгірша ситуація для проектувальника у дійсності може наступити, оскільки випадкові обставини в особі першого гравця мають чисту оптимальну стратегію, котра також дорівнює мінімально можливому значенню стискаючого зусилля на перший стержень.

Як приклад доцільності використання отриманих результатів у запропонованій моделі розглянемо задачу з параметрами $a = 0.2$ та $b = 0.5$, де $a + b < 1$ й оптимальною площею поперечного перерізу першого стержня є:

$$y_* = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b} + \sqrt{1 - a}} = \frac{\sqrt{0.5}}{\sqrt{0.5} + \sqrt{0.8}} \approx 0.4415$$

нормованих одиниць. При цьому максимальне перенавантаження складатиме:

$$v_* = k\left(\sqrt{b} + \sqrt{1 - a} \right)^2 = k\left(\sqrt{0.5} + \sqrt{0.8} \right)^2 = 2.5649k,$$

де $\alpha_*(0.2) \approx 0.5585$. А якби за площу поперечного перерізу першого стержня було узято значення $y = \frac{a + b}{2} = 0.35$, то максимальне перенавантаження склало б $2.8596k$ при $\alpha_*(0.2) \approx 0.5585$. А якщо $\alpha_*(0.2) = 0$, тобто точно буде $x = b = 0.5$, то максимальне перенавантаження складе уже $4.0816k$.

Перспектива подальших досліджень полягає в ускладненні розв'язаної у цій статті задачі, де вихідна кількість призматичних стержнів, на які здійснюватиметься стискаюче зусилля, буде більшою за два. Це допоможе при розрахунку більш складних конструкцій з нерівномірним розподілом стискаючих навантажень на їх елементи. А результати розв'язку антагоністичної гри з функцією виграшу (1) на підмножині $[a; b] \times [a; b]$ одиничного квадрату $[0; 1] \times [0; 1]$ можуть бути використані при будівництві нескладних мостоподібних конструкцій з двома опорами.

Література

1. Теория игр: Учеб. пособие для ун-тов / Л. А. Петросян, Н. А. Зенкевич, Е. А. Семина. − М.: Высшая школа, Книжный дом “Университет”, 1998. − 304 с.: ил.

2. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики: Пер. с франц. − М.: Мир, 1985. − 199 с.: ил.

3. Воробьёв Н. Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. − М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. − 272 с.

4. Оуэн Г. Теория игр: Пер. с англ. Изд. 2-е. − М.: Едиториал УРСС, 2004. − 216 с.

5. Romanuke V. V. The 12 situations in the kernel of a continuous strictly convex antagonistic game and the nine game solution forms // Информационно-вычислительные технологии и их приложения: сборник статей IX Международной научно-технической конференции. − Пенза: РИО ПГСХА, 2008. − С. 247-257.

6. Romanuke V. V. The figured 10 subcases of the coefficients interrelationships in the kernel of a continuous strictly convex antagonistic game with the corresponding six types of the solution // Науково-теоретичний журнал Хмельницького економічного університету “Наука й економіка”. − Випуск 2 (14), 2009. − С. 308-326.

7. Романюк В. В. Метод реалізації принципу оптимальності у матричних іграх без сідлової точки // Вісник НТУ "ХПІ". Тематичний випуск: Інформатика та моделювання. − Харків: НТУ "ХПІ", 2008. − № 49. − С. 146-154.

8. Романюк В. В. Метод реалізації оптимальних змішаних стратегій у матричній грі з порожньою множиною сідлових точок у чистих стратегіях з відомою кількістю партій гри // Наукові вісті НТУУ "КПІ". − 2009. − № 2. − С. 45-52.