Застосуємо операторну матрицю-стовпець (35) за правилом множення матриць до матриці - елемента $[\widetilde{u}(\beta)]$, де функція $\widetilde{u}(\beta)$ визначена за формулою (34). У результаті елементарних перетворень одержуємо єдиний розв'язок крайової задачі (1),(2):

$$
\begin{aligned}
u_j(r) = \sum_{k=1}^{2} d_k \Big[\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{Z^{(\mu),k}_{\nu(\alpha);12}(\beta)}{\beta^2+q_1^2} V^{(\mu)}_{\nu(\alpha);j}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{\nu(\alpha)}(\beta)d\beta\omega_{2k}-\\
-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{Z^{(\mu),k}_{\nu(\alpha);22}(\beta)}{\beta^2+q_1^2} V^{(\mu)}_{\nu(\alpha);j}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{\nu(\alpha)}(\beta)d\beta\omega_{1k}\Big]+\\
+\int\limits_0^{R_1}\Big(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{V^{(\mu)}_{\nu(\alpha);j}(r,\beta)}{\beta^2+q_1^2} V^{(\mu)}_{\nu(\alpha);1}(\rho,\beta)\Omega^{(\mu)}_{\nu(\alpha)}(\beta)d\beta\Big)g_1(\rho)\sigma_1\rho^{2\alpha_1+1}d\rho+\\
+\int\limits_{R_1}^{R_2}\Big(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty V^{(\mu)}_{\nu(\alpha);j}(r,\beta)V^{(\mu)}_{\nu(\alpha);2}(\rho,\beta)\frac{\Omega^{(\mu)}_{\nu(\alpha)}(\beta)d\beta}{\beta^2+q_1^2}\Big)g_2(\rho)\sigma_2\rho^{2\alpha_2-1}d\rho+\\
+\int\limits_{R_2}^{\infty}\Big(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty V^{(\mu)}_{\nu(\alpha);j}(r,\beta)V^{(\mu)}_{\nu(\alpha);3}(\rho,\beta)\frac{\Omega^{(\mu)}_{\nu(\alpha)}(\beta)d\beta}{\beta^2+q_1^2}\Big)g_3(\rho)\sigma_3 sh\rho d\rho.
\end{aligned}
\tag{36}
$$

Порівнюючи розв'язки (19) та (36) в силу єдиності, одержуємо зображення поліпараметричних невласних інтегралів за власними елементами ГДО $M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}$:

$$
\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);k}(\rho,\beta)\frac{\Omega^{(\mu)}_{\nu(\alpha)}(\beta)}{\beta^2+q_1^2}d\beta = \frac{1}{\sigma_k}\mathcal{H}^{(\mu)}_{\nu(\alpha);jk}(r,\rho,q);\, j,k=\overline{1,3} \tag{37}
$$

$$
\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty Z^{(\mu),k}_{\nu,(\alpha);12}(\beta)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)\frac{\Omega^{(\mu)}_{\nu(\alpha)}(\beta)}{\beta^2+q_1^2}d\beta = d_k^{-1}\mathcal{R}^{(\mu)j}_{\nu(\alpha);2k}(r,q),\, k=1,2,\, j=\overline{1,3} \tag{38}
$$

$$
\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty Z^{(\mu),k}_{\nu,(\alpha);22}(\beta)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)\frac{\Omega^{(\mu)}_{\nu(\alpha)}(\beta)}{\beta^2+q_1^2}d\beta = -d_k^{-1}\mathcal{R}^{(\mu)j}_{\nu(\alpha);1k}(r,q),\, k=1,2,\, j=\overline{1,3} \tag{39}
$$

Функції впливу $\mathcal{H}^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);jk}(r,\rho,q)$ визначені формулами (18), функції Гріна $\mathcal{R}^{(\mu)j}_{\nu,(\alpha);i2}(r,q)$ умов спряження визначені формулами (17).

Оскільки праві частини в рівностях (37) - (39) не залежать від нерівностей $(q_j^2 - q_m^2) \geq 0$, то можна покласти $q_1^2 = q_2^2 = q_3^2 \equiv q_0^2 > 0$.

Якщо $q^2 = q_2^2$, то $k_1^2 = q_2^2 - q_1^2 \geq 0 k_2^2 = 0$, $k_3^2 = q_2^2 - q_3^2 \geq 0$ і вираз $(\beta^2 + q_1^2)$ заміниться на вираз $(\beta^2 + q_2^2)$. Якщо $q^2 = q_3^2$, то $k_1^2 = q_3^2 - q_1^2 \geq 0$, $k_2^2 = q_3^2 - q_2^2 \geq 0$, $k_3^2 = 0$ і замість $(\beta^2 + q_1^2)$ буде $(\beta^2 + q_3^2)$.

Результатом виконаних досліджень є твердження.

Основна теорема. Якщо вектор-функція

$$
f(r) = \{B_{\nu,\alpha_1}[q_1(r)]; B_{\alpha_2}[q_2(r)]; \Lambda_{(\mu)}[g_3(r)]\}
$$

неперервна на множині I_2^+, функції $g_j(r)$ задовільняють умови спряження (2) й виконується умова (16) однозначної розв'язності крайові задачі (1),(2), то справджуються формули (37) - (39) обчислення поліпараметричної сім'ї невласних інтегралів за власними елементами ГДО $M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}$, визначеного рівністю (20).

Література:

1. Ленюк М.П. Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя. - Киев, 1983. - 62с. - (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.3).
2. Ленюк М.П. Міхалевська Г.І. Інтегральні перетворення типу Конторовича - Лебєдєва. - Чернівці: Прут, 2002. -280 с.
3. Конет І.М., Ленюк М.П. Інтегральні перетворення типу Мелера - Фока. - Чернівці: Прут, 2002. - 248с.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. - М.: Физматгиз, 1959. - 468с.
5. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс.- М.: Наука, 1965.-328с.
6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.- М.: Наука, 1971.-432с.
7. Ленюк М.П., Шинкарик М.Ш. Гібридні інтегральні перетворення (**Фур'є**, Бесселя, Лежандра). Частина 1. - Тернопіль: Економ. думка, 2004. - 368с.

УДК 517.91: 532.2

В.В. Мороз

Гібридне інтегральне перетворення типу Ейлера-Фур'є-(Конторовича-Лєбєдєва) на полярній осі із спектральним параметром в умовах спряження.

(м. Хмельницький)

Методом дельта-подібної послідовності (ядро Коші) запроваджено гібридне інтегральне перетворення Ейлера-Фур'є-(Конторовича-Лебєдєва) на полярній осі з двома точками спряження в припущенні, що спектральний параметр бере участь в умовах спряження.

Методом дельта - образной последовательности (ядро Коши) введено интегральное преобразование Эйлера-Фурье-(Конторовича-Лебедева), на полярной оси с двумя точками сопряжения в предположении, что спектральний параметр принимает участие в условиях сопряжения.

Бібліогр.: 7 назв.

Розглянемо диференціальний оператор Ейлера $B^*_{\alpha_1} = r^2 d^2/dr^2 + (2\alpha_1 + 1) r d/dr + +\alpha_1^2[1]$, Фур'є $d^2/dr^2[1]$ та (Конторовича-Лєбєдєва) $B_{\alpha_2} = r^2 d^2/dr^2 + (2\alpha_2 +$

$+1)rd/dr + \alpha_2^2 - \lambda^2 r^2$[2]. Нехай $\theta(x)-$ одинична функція Гевісайда [3]. Утворимо гібридний диференціальний оператор (ГДО)

$$M_{(\alpha)} = \theta(r)\theta(R_1 - r)B^*_{\alpha_1} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)d^2/dr^2 + \theta(r - R_2)B_{\alpha_2} \quad (1)$$

У цих рівностях $(2\alpha_j + 1) > 0, \lambda \in (0, \infty), r \in (0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, \infty).(\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2)$.

__Означення__. За область визначення ГДО $M_{(\alpha)}$ назвемо множину G вектор-функцій $g(r) = \{g_1(r); g_2(r); g_3(r)\}$ з такими властивостями:

1) вектор-функція$f(r) = \{B^*_{\alpha_1}[g_1(r)]; g_2''(r); B_{\alpha_2}[g_3(r)]\}$ неперервна на множині $I_2^+ = \{r : r \in (0. R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, \infty)\}$;

2) функції $g_j(r)$ задовільняють умови спряження

$$\left[(\widetilde{\alpha}_{j1}^k d/dr + \widetilde{\beta}_{j1}^k) g_k(r) - (\widetilde{\alpha}_{j2}^k d/dr + \widetilde{\beta}_{j2}^k) g_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k} = 0; j, k = 1, 2 \quad (2)$$

3) існують такі числа γ_1 та γ_2, що моють місце умови обмеження

$$\lim_{r\to 0}[r^{\gamma_1} g_1(r)] = 0, \lim_{r\to\infty}[r^{\gamma_2} g_3(r)] = 0 \quad (3)$$

У рівності (2) беруть участь величини

$$\widetilde{\alpha}_{jm}^k = \alpha_{jm}^k - (\beta^2 + \gamma^2)\delta_{jm}^k, \widetilde{\beta}_{jm}^k = \beta_{jm}^k - (\beta^2 + \gamma^2)\gamma_{jm}^k, \gamma^2 \geq 0,$$

$\beta \in (0, \infty)$, $\beta-$ спектральний параметр.

Припустимо, що виконані умови на коефіцієнти: $\alpha_{jm}^k \geq 0, \beta_{jm}^k \geq 0, \delta_{jm}^k \geq 0, \gamma_{jm}^k \geq 0. c_{11,k}c_{21,k} > 0; c_{j1,k} = \alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k; c_{j2,k} \equiv \delta_{2j}^k\gamma_{1j}^k - \delta_{1j}^k\gamma_{2j}^k = 0, \alpha_{1j}^k\gamma_{2j}^k - \alpha_{2j}^k\gamma_{1j}^k = \beta_{1j}^k\delta_{2j}^k - \beta_{2j}^k\delta_{1j}^k, j, m. k = 1, 2$.

Якщо визначити числа

$$\widetilde{a}_{11}^k = \widetilde{\alpha}_{11}^k\widetilde{\alpha}_{22}^k - \widetilde{\alpha}_{21}^k\widetilde{\alpha}_{12}^k; \widetilde{a}_{21}^k = \widetilde{\beta}_{11}^k\widetilde{\alpha}_{22}^k - \widetilde{\beta}_{21}^k\widetilde{\alpha}_{12}^k;$$

$$\widetilde{a}_{12}^k = \widetilde{\alpha}_{11}^k\widetilde{\beta}_{22}^k - \widetilde{\alpha}_{21}^k\widetilde{\beta}_{12}^k; \widetilde{a}_{22}^k = \widetilde{\beta}_{11}^k\widetilde{\beta}_{22}^k - \widetilde{\beta}_{21}^k\widetilde{\beta}_{12}^k.$$

то безпосередньо встановлюємо, що

$$\widetilde{\alpha}_{11}^k\widetilde{\beta}_{21}^k - \widetilde{\alpha}_{21}^k\widetilde{\beta}_{11}^k = -c_{11,k}; \widetilde{\alpha}_{12}^k\widetilde{\beta}_{22}^k - \widetilde{\alpha}_{22}^k\widetilde{\beta}_{12}^k = -c_{21,k};$$

$$\widetilde{a}_{22}^k\widetilde{a}_{11}^k - \widetilde{a}_{12}^k\widetilde{a}_{21}^k = c_{11,k}c_{21,k}.$$

Внаслідок умов спряження для $u(r) \in G$ та $v(r) \in G$ маємо базову тотожність:

$$[u_k(r)v_k'(r) - u_k'(r)v_k(r)]|_{r=R_k} = \frac{c_{21,k}}{c_{11,k}}[u_{k+1}(r)v_{k+1}'(r) - u_{k+1}'(r)v_{k+1}(r)]c_{11,k} \quad (4)$$

Введемо до розгляду величини

$$\sigma_1 = \frac{c_{11,1}c_{11,2}}{c_{21,1}c_{21,2}}\frac{R_2^{2\alpha_2+1}}{R_1^{2\alpha_1+1}}, \sigma_2 = \frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}R_2^{2\alpha_2+1}, \sigma_3 = 1,$$

вагову функцію

$$\sigma(r) = \theta(r)\theta(R_1 - r)\sigma_1 r^{2\alpha_1 - 1} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)\sigma_2 + \theta(r - R_2)\sigma_3 r^{2\alpha_2 - 1}. \quad (5)$$

та скалярний добуток

$$(u(r), v(r)) = \int_0^\infty u(r)v(r)\sigma(r)dr \equiv \int_0^{R_1} u_1(r)v_1(r)\sigma_1 r^{2\alpha_1 - 1}dr +$$

$$+ \int_{R_1}^{R_2} u_2(r)v_2(r)\sigma_2 dr + \int_{R_2}^{\infty} u_3(r)v_3(r)\sigma_3 r^{2\alpha_2 - 1}dr. \quad (6)$$

Покажемо, що ГДО $M_{(\alpha)}$ самоспряжений.

Згідно правила (6) маємо:

$$(M_{(\alpha)}[u(r)], v(r)) = \int_0^\infty (M_{(\alpha)}[u(r)])v(r)\sigma(r)dr = \int_0^{R_1} B^*_{\alpha_1}[u_1]\times$$

$$\times v_1\sigma_1 r^{2\alpha_1 - 1}dr + \int_{R_1}^{R_2} \frac{d^2u_2}{dr^2}v_2\sigma_2 dr + \int_{R_2}^{\infty} B_{\alpha_2}[u_3]v_3\sigma_3 r^{2\alpha_2 - 1}dr \quad (7)$$

Проінтегруємо під знаком інтегралів два рази частинами:

$$(M_{(\alpha)}[u], v) = \sigma_1 r^{2\alpha_1 + 1}(\frac{du_1}{dr}v_1 - u_1\frac{dv_1}{dr})|_0^{R_1} + \sigma_2(\frac{du_2}{dr}v_2 - u_2\frac{dv_2}{dr})|_{R_1}^{R_2} +$$

$$+\sigma_3 r^{2\alpha_2 + 1}(\frac{du_3}{dr}v_3 - u_3\frac{dv_3}{dr})|_{R_2}^{\infty} + \int_0^\infty u(r)(M_\alpha[v(r)])\sigma(r)dr \quad (8)$$

В силу умов обмеження (3) вирази в точці $r = 0$ та в точці $r = \infty$ перетворюються в нуль:

$$\lim_{r\to 0}[r^{2\alpha_1+1}(u_1'v_1 - u_1v_1')] = 0, \lim_{r\to\infty}[r^{2\alpha_2+1}(u_3'v_3 - u_3v_3')] = 0,$$

На підставі базової тотожності (4) маємо:

1) $\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}(u_1'v_1 - u_1v_1')|_{r=R_1} - \sigma_2(u_2'v_2 - u_2v_2')|_{r=R_1} =$

$$= (\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21,1}}{c_{11,1}} - \sigma_2)(u_2'v_2 - u_2v_2')|_{r=R_1} =$$

$$= \left(\frac{c_{11,1}c_{11,2}}{c_{21,1}c_{21,2}}\frac{R_2^{2\alpha_2+1}}{R_1^{2\alpha_1+1}}R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21,1}}{c_{11,1}} - \frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}R_2^{2\alpha_2+1}\right)(u_2'v_2 - u_2v_2')|_{r=R_1} =$$

$$= (\frac{c_{11,2}}{c_{21,2}} - \frac{c_{11,2}}{c_{21,2}})R_2^{2\alpha_2+1}[u_2'(r)v_2(r) - u_2(r)v_2'(r))]|_{r=R_1} = 0\cdot[u_2'(r)v_2(r) - u_2(r)v_2'(r))]|_{r=R_1} = 0;$$

$$2)\sigma_2(\tfrac{du_2}{dr}v_2 - u_2\tfrac{dv_2}{dr})|_{r=R_2} - \sigma_3 R_2^{2\alpha_2+1}(\tfrac{du_3}{dr}v_3 - u_3\tfrac{dv_3}{dr})|_{r=R_2} =$$

$$= (\sigma_2\frac{c_{21,2}}{c_{11,2}} - \sigma_3 R_2^{2\alpha_2+1})(u_3'v_3 - u_3v_3')|_{r=R_2} = \left(\frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}R_2^{2\alpha_2+1}\frac{c_{21,2}}{c_{11,2}} - \sigma_3 R_2^{2\alpha_2+1}\right)\times$$

$$\times(u_3'v_3 - u_3v_3')|_{r=R_2} = (1-1)R_2^{2\alpha_2+1}(u_3'v_3 - u_3v_3')|_{r=R_2} = 0.$$

Рівність (8) набуває вигляду:

$$(M_{(\alpha)}[u], v) = (u(r), M_{(\alpha)}[v(r)]). \tag{9}$$

Рівність (9) означає, що ГДО $M_{(\alpha)}$ самоспряжений. Значить, його спектр дійсний. Оскільки ГДО $M_{(\alpha)}$ має на множині I_2^+ одну особливу точку $r = 0$, то його спектр неперервний. Вважаємо, що спектральний параметр $\beta \in (0, \infty)$. Йому відповідає дійсна спектральна вектор-функція

$$V_{(\alpha)}(r,\beta) = \theta(r)\theta(R_1 - r)V_{(\alpha);1}(r,\beta) + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)V_{(\alpha);2}(r,\beta) +$$
$$+\theta(r - R_2)V_{(\alpha);3}(r,\beta). \tag{10}$$

При цьому функції $V_{(\alpha);j}(r,\beta)$ повинні задовільняти відповідно диференціальні рівняння

$$\left(B_{\alpha_1}^* + b_1^2\right)V_{(\alpha);1}(r,\beta) = 0, r \in (0, R_1),$$
$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + b_2^2\right)V_{(\alpha);2}(r,\beta) = 0, r \in (R_1, R_2), \tag{11}$$
$$\left(B_{\alpha_2} + b_3^2\right)V_{(\alpha);3}(r,\beta) = 0, r \in (R_2, \infty)$$

умови спряження (2) та умови обмеження (3); $b_j^2 = (\beta^2 + k_j^2), k_j^2 \geq 0, j = \overline{1,3}, \beta \in (0, \infty)$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B_{\alpha_1}^* + b_1^2)v = 0$ складають функції $v_1 = r^{-\alpha_1}\cos(b_1 lnr)$ та $v_2 = r^{-\alpha_1}\sin(b_1 lnr)$[1]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $(d^2/dr^2 + b_2^2)v = 0$ складають тригометричні функції $v_1 = cosb_2r$ та $v_2 = sinb_2r$ [1]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння (Конторовича-Лебєдева) $(B_{\alpha_2} + b_3^2)v = 0$ складають функції $v_1 = C_{\alpha_2}(\lambda r, b_3)$ та $v_2 = D_{\alpha_2}(\lambda r, b_3)$ [2].

Якщо покласти

$$V_{(\alpha);1}(r,\beta) = A_1 r^{-\alpha_1}\cos(b_1 lnr) + B_1 r^{-\alpha_1}\sin(b_1 lnr),$$
$$V_{(\alpha);2}(r,\beta) = A_2\cos b_2 r + B_2 \sin b_2 r, \tag{12}$$
$$V_{(\alpha);3}(r,\beta) = B_3 D_{\alpha_2}(\lambda r, b_3),$$

то умови спряження (2) дають для визначення величин $A_j = (j = 1,2)$ та $B_k (k = \overline{1,3})$ алгебраїчну систему з чотирьох рівнянь:

$$A_1 Y_{\alpha_1;j1}^{11}(b_1, R_1) + B_1 Y_{\alpha_1;j1}^{12}(b_1, R_1) - A_2 v_{j2}^{11}(b_2R_1) - B_2 v_{j2}^{12}(b_2R_1) = 0$$
$$A_2 v_{j1}^{21}(b_2R_2) + B_2 v_{j1}^{22}(b_2R_2) - X_{\alpha_2;j2}^{22}(\lambda R_2, b_3)B_3 = 0, j = 1,2 \tag{13}$$

Алгебраїчна система (13) завжди сумісна [4]. При $B_3 \neq 0$ розглянемо алгебраїчну систему стосовно A_2, B_2 :

$$v_{j1}^{21}(b_2R_2)A_2 + v_{j1}^{22}(b_2R_2)B_2 = X_{\alpha_2;j2}^{22}(\lambda R_2, b_3)B_3, j = 1,2 \tag{14}$$

Визначник алгебраїчної системи (14)

$$v_{11}^{21}(b_2R_2)v_{21}^{22}(b_2R_2) - v_{21}^{22}(b_2R_2)v_{11}^{21}(b_2R_2) = c_{11,2}b_2 \neq 0.$$

Алгебраїчна система (14) має єдиний розв'язок [4]:

$$A_2 = B_3[b_2c_{11,2}]^{-1}\left[X_{\alpha_2;12}^{22}(\lambda R_2, b_3)v_{21}^{22}(b_2R_2) - X_{\alpha_2;22}^{22}(\lambda R_2, b_3)v_{11}^{22}(b_2R_2)\right],$$
$$B_2 = -B_3[b_2c_{11,2}]^{-1}\left[X_{\alpha_2;12}^{22}(\lambda R_2, b_3)v_{21}^{21}(b_2R_2) - X_{\alpha_2;22}^{22}(\lambda R_2, b_3)v_{11}^{21}(b_2R_2)\right], \tag{15}$$

При визначених A_2, B_2 розглянемо алгебраїчну систему стосовно A_1, B_1 :

$$Y_{\alpha_1;j1}^{11}(b_1, R_1)A_1 + Y_{\alpha_1;j1}^{12}(b_1, R_1)B_1 = B_3[b_2c_{11,2}]^{-1}\Big\{X_{\alpha_2;12}^{22}(\lambda R_2, b_3)[v_{21}^{22}(b_2R_2)\times$$
$$\times v_{j2}^{11}(b_2R_1) - v_{21}^{21}(b_2R_2)v_{j2}^{12}(b_2R_1)] - X_{\alpha_2;22}^{22}(\lambda R_2, b_3)[v_{11}^{22}(b_2R_2)v_{j2}^{11}(b_2R_2) -$$
$$-v_{11}^{21}(b_2R_2)v_{j2}^{12}(b_2R_1)]\Big\} \equiv B_3[b_2c_{11,2}]^{-1}[X_{\alpha_2;12}^{22}(\lambda R_2, b_3)\times$$
$$\times\delta_{j2}(b_2R_1, b_2R_2) - X_{\alpha_2;22}^{22}(\lambda R_2, b_3)\delta_{j1}(b_2R_1, b_2R_2)\Big] \equiv B_3[b_2c_{11,2}]^{-1}b_{\alpha_2;j}(\beta) \tag{16}$$

Визначник алгебраїчної системи (16)

$$Y_{\alpha_1;11}^{11}Y_{\alpha_1;21}^{12} - Y_{\alpha_1;21}^{11}Y_{\alpha_1;11}^{12}(b_1, R_1) = c_{11,1}b_1R_1^{-(2\alpha_1+1)} \neq 0$$

Алгебраїчна система (16) має єдиний розв'язок [4]:

$$A_1 = \omega_{(\alpha);2}(\beta), B_1 = -\omega_{(\alpha);1}(\beta); B_3 = c_{11,1}b_1c_{11,2}b_2R_1^{-(2\alpha_1+1)},$$
$$\omega_{(\alpha);j}(\beta) = b_{\alpha_2;1}(\beta)Y_{\alpha_1;21}^{1j}(b_1, R_1) - b_{\alpha_2;2}(\beta)Y_{\alpha_1;11}^{1j}(b_1, R_1). \tag{17}$$

Підставивши згідно формул (15) та (17) визначені величини A_j та B_k у рівності (11), отримаємо:

$$V_{(\alpha);1}(r,\beta) = \omega_{(\alpha);2}(\beta)r^{-\alpha_1}\cos(b_1 lnr) - \omega_{(\alpha);1}(\beta)r^{-\alpha_1}\sin(b_1 lnr),$$
$$V_{(\alpha);2}(r,\beta) = c_{11,1}b_1R_1^{-(2\alpha_1+1)}\Big[X_{\alpha_2;12}^{22}(\lambda R_2, b_3)\varphi_{21}^2(b_2R_2, b_2r) -$$
$$-X_{\alpha_2;22}^{22}(\lambda R_2, b_3)\varphi_{11}^2(b_2R_2, b_2r)\Big],$$

$$\varphi_{j1}^2(b_2R_2, b_2r) = v_{j1}^{22}(b_2R_2)\cos b_2r - v_{j1}^{21}(b_2R_2)\sin b_2r; \tag{18}$$

$$V_{(\alpha);3}(r,\beta) = c_{11,1}b_1c_{11,2}b_2R_1^{-(2\alpha_1+1)}D_{\alpha_2}(\lambda r, b_3)$$

З цим спектральна вектор-функція $V_{(\alpha)}(r.\beta)$ стає відомою.

Наявність вогової функції $\sigma(r)$, спектральної функції $V_{(\alpha)}(r,\beta)$ та спектральної щільності

$$\Omega_{(\alpha)}(\beta) = \beta[b_1(\beta)]^{-1}\left([\omega_{(\alpha);1}(\beta)]^2 + [\omega_{(\alpha)2}(\beta)]^2\right)^{-1}$$

дозволяє запровадити пряме $H_{(\alpha)}$ й обернене $H_{(\alpha)}^{-1}$ гібридне інтегральне перетворення (ГІП), породжене на множені I_2^+ ГДО $M_{(\alpha)}$, визначеного рівністю (1) [5]:

$$H_{(\alpha)}[g(r)] = \int_0^\infty g(r)V_{(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr \equiv \widetilde{g}(\beta) \tag{19}$$

$$H_{(\alpha)}^{-1}[\widetilde{g}(\beta)] = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \widetilde{g}(\beta)V_{(\alpha)}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta \equiv g(r) \tag{20}$$

Математичним обгрунтуванням формул (19), (20) є твердження.

Теорема 1 (про інтегральне зображення). Якщо вектор-функція

$$f(r) = [\theta(r)\theta(R_1 - r)r^{\alpha_1 - 1/2} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)1 + \theta(r - R_2)r^{\alpha_2 - 1/2}]g(r)$$

неперервна, абсолютно сумовна й має обмежену варіацію на множині $(0,\infty)$, то для будь-якого $r \in I_2^+$ справджується інтегральне зображення

$$g(r) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\int_0^\infty g(\rho)V_{(\alpha)}(\rho,\beta)\sigma(\rho)d\rho\right)V_{(\alpha)}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta \tag{21}$$

Доведення проведемо методом дельта-подібної послідовності- ядро Коші як фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для системи рівнянь з частинними похідними параболічного типу, породженої ГДО $M_{(\alpha)}$.

Розглянемо задачу про побудову обмеженого в області $D_2^+ = \{(t,r) : t \in (0,\infty), r \in I_2^+\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь параболічного типу [6]

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_1^2 u_1 - B_{\alpha_1}^*[u_1] = 0, r \in (0, R_1) \\ &\frac{\partial u_2}{\partial t} + \gamma_2^2 u_2 - \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} = 0, r \in (R_1, R_2) \\ &\frac{\partial u_3}{\partial t} + \gamma_3^2 u_3 - B_{\alpha_3}[u_3] = 0, r \in (R_2, \infty) \end{aligned} \tag{22}$$

за початковими умовами

$$u_j(t,r)|_{t=0} = g_j(r), r \in I_2^+, j = \overline{1,3} \tag{23}$$

та умовами спряження

$$\left(L_{j1}^k[u_k(t,r)]) - L_{j2}^k[u_{k+1}(t,r)]\right)|_{r=R_k} = 0; j,k = 1,2 \tag{24}$$

У рівності (24) беруть участь диференціальні оператори

$$L_{jm}^k = (\alpha_{jm}^k + \delta_{jm}^k\frac{\partial}{\partial t})\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{jm}^k + \gamma_{jm}^k\frac{\partial}{\partial t}; j.m,k = 1,2$$

Припустимо, що вектор-функція $u(t.r) = \{u_1(t,r); u_2(t,r); u_3(t,r)\}$ є оригіналом за Лапласом щодо t[7]. У зображенні за Лапласом параболічній задачі (22)-(24) відповідає крайова задача: побудувати обмежений на множені I_2^+ розв'язок сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь Ейлера,Фур'є та (Конторовича-Лєбєдева) для модифікованих функцій

$$\begin{aligned} &(B_{\alpha_1}^* - q_1^2)u_1^*(p,r) = -g_1(r), r \in (0, R_1), \\ &(d^2/dr^2 - q_2^2)u_2^*(p.r) = -g_2(r), r \in (R_1, R_2) \\ &(B_{\alpha_2} - q_3^2)u_3^*(p,r) = -g_3(r), r \in (R_2, \infty) \end{aligned} \tag{25}$$

за умовами спряження

$$\left[(\overline{\alpha}_{j1}^k d/dr + \overline{\beta}_{j1}^k)u_k^*(p,r) - (\overline{\alpha}_{j2}^k d/dr + \overline{\beta}_{j2}^k)u_{k+1}^*(p,r)\right]|_{r=R_k} = 0; j,k = 1.2 \tag{26}$$

Тут $q_j = (p+\gamma_j^2)^{1/2}, u_j^*(p.r) = \int_0^\infty u_j(t,r)e^{-pt}dt,$

$$\overline{\alpha}_{jm}^k = \alpha_{jm}^k + p\delta_{jm}^k, \overline{\beta}_{jm}^k = \beta_{jm}^k + p\gamma_{jm}^k, Req_j > 0.$$

Ми вважаємо, що числа

$$\psi_{jk} \equiv \delta_{j1}^k g_k'(R_k) + \gamma_{j1}^k g_k(R_k) - [\delta_{j2}^k g_{k+1}'(R_k) + \gamma_{j2}^k g_{k+1}(R_k)] = 0.$$

В протилежному випадку переходимо до нових початкових даних $\overline{g}_1 = g_1(r) - b_1, \overline{g}_2 = g_2(r) - (a_2r + b_2), \overline{g}_3 = g_3(r) - b_3$ і числа $b_1, b_2. b_3$ та a_2 знаходимо із алгебраїчної системи

$$(\gamma_{j1}^k R_k + \delta_{j1}^k)a_k + \gamma_{j1}^k b_k - (\gamma_{j2}^k R_k + \delta_{j2}^k)a_{k+1} - \gamma_{j2}^k b_{k+1} = \psi_{jk}; a_1 = a_3 = 0.$$

При виконанні умов на коефіцієнти ця система має єдиний розв'язок.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B_{\alpha_1}^* + b_1^2)v = 0$ утворюють функції $v_1 = r^{-\alpha_1 - q_1}$ та $v_2 = r^{-\alpha_1 + q_1}$[1]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $(d^2/dr^2 - q_2^2)v = 0$ утворють функції $v_1 = chq_2r$ та $v_2 = shq_2r$[1], фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння (Конторовича-Лебєдева) $(B_{\alpha_2} - q_3^2)v = 0$ утворюють модифіковані функції Бесселя $I_{q_3,\alpha_2}(\lambda r)$ та $K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r)$[2].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє побудувати розв'язок крайової задачі (25),(26) методом функцій Коші [1,3]:

$$u_1^*(p,r) = A_1 r^{-\alpha_1+q_1} + \int\limits_0^{R_1} E_1^*(p,r,\rho) g_1(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho,$$

$$u_2^*(p,r) = A_2 chq_2 r + B_2 shq_2 r + \int\limits_{R_1}^{R_2} E_2^*(p,r,\rho) g_2(\rho)d\rho, \qquad (27)$$

$$u_3^*(p,r) = B_3 K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r) + \int\limits_{R_2}^{\infty} E_3^*(p,r,\rho) g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho.$$

У рівностях (27) $E_j^*(p,r.\rho)$– функції Коші:

$$E_1^*(p,r,\rho) = \frac{1}{2q_1 Z^{12}_{\alpha_1;11}(q_1,R_1)} \begin{cases} r^{-\alpha_1+q_1}\psi^{1*}_{\alpha_1;11}(q_1,\rho), 0<r<\rho<R_1, \\ \rho^{-\alpha_1+q_1}\psi^{1*}_{\alpha_1;11}(q_1,r), 0<\rho<r<R_1, \end{cases} \qquad (28)$$

$$E_2^*(p,r,\rho) = -\frac{1}{q_2\Delta_{11}(q_2R_1,q_2R_2)} \begin{cases} \Phi^1_{12}(q_2R_1,q_2r), \Phi^2_{11}(q_2R_2,q_2\rho), R_1<r<\rho<R_2, \\ \Phi^1_{12}(q_2R_1,q_2\rho), \Phi^2_{11}(q_2R_2,q_2r), R_1<\rho<r<R_2, \end{cases} \qquad (29)$$

$$E_3^*(p,r,\rho) = -\frac{\lambda^{2\alpha_2}}{U^{22}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2)} \begin{cases} K_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho)\psi^{2*}_{q_3,\alpha_2,12}(\lambda R_2,\lambda r), R_2<r<\rho<\infty \\ K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r)\psi^{2*}_{q_3,\alpha_2,12}(\lambda R_2,\lambda\rho), R_2<\rho<r<\infty. \end{cases} \qquad (30)$$

У рівностях (28)-(30) беруть участь функції:

$$Z^{11}_{\alpha_1,j1}(q_1,R_1) = [(\bar\beta^1_{j1} - \alpha_1 R_1^{-1}\bar\alpha^1_{j1}) - \bar\alpha^1_{j1}R_1^{-1}q_1]R_1^{-\alpha_1-q_1},$$

$$Z^{12}_{\alpha_1,j1}(q_1,R_1) = [(\bar\beta^1_{j1} - \alpha_1 R_1^{-1}\bar\alpha^1_{j1}) + \bar\alpha^1_{j1}R_1^{-1}q_1]R_1^{-\alpha_1+q_1},$$

$$\psi^{1*}_{\alpha_1,j1}(q_1,r) = Z^{12}_{\alpha_1,j1}(q_1,R_1)r^{-\alpha_1-q_1} - Z^{11}_{\alpha_1,j1}(q_1,R_1)r^{-\alpha_1+q_1};$$

$$V^{m1}_{jk}(q_sR_m) = \bar\alpha^m_{jk}q_s shq_sR_m + \bar\beta^m_{jk}chq_sR_m \equiv (\bar\alpha^m_{jk}d/dr + \bar\beta^m_{jk})chq_sr|_{r=R_m},$$

$$V^{m2}_{jk}(q_sR_m) = \bar\alpha^m_{jk}q_s chq_sR_m + \bar\beta^m_{jk}shq_sR_m \equiv (\bar\alpha^m_{jk}d/dr + \bar\beta^m_{jk})chq_sr|_{r=R_m},$$

$$\Phi^m_{jk}(q_sR_m,q_sr) = V^{m2}_{jk}(q_sR_m)chq_sr - V^{m1}_{jk}(q_sR_m)shq_sr,$$

$$\Delta_{jk}(q_2R_1,q_2R_2) = V^{11}_{j2}(q_2R_1)V^{22}_{k1}(q_2R_2) - V^{12}_{j2}(q_2R_1)V^{22}_{k1}(q_2R_2);\ j,k=1,2.$$

$$U^{m1}_{q_3,\alpha_2;jk}(\lambda R_m) = (\bar\alpha^m_{jk}\frac{q_3-\alpha_2}{R_m} + \bar\beta^m_{jk})I_{q_3,\alpha_2}(\lambda R_m) + \bar\alpha^m_{jk}\lambda^2R_mI_{q_3+1,\alpha_2+1}(\lambda R_m),$$

$$U^{m2}_{q_3,\alpha_2;jk}(\lambda R_m) = (\bar\alpha^m_{jk}\frac{q_3-\alpha_2}{R_m} + \bar\beta^m_{jk})K_{q_3,\alpha_2}(\lambda R_m) - \bar\alpha^m_{jk}\lambda^2R_mK_{q_3+1,\alpha_2+1}(\lambda R_m),$$

$$\psi^{m*}_{q_3,\alpha_2;jk}(\lambda R_m) = U^{m1}_{q_3,\alpha_2;jk}(\lambda R_m)K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r) - U^{m2}_{q_3,\alpha_2;jk}(\lambda R_m)I_{q_3,\alpha_2}(\lambda r).$$

Умови спряження (26) для визначення величин A_1, A_2, B_2, B_3 дають **неоднорідну** алгебраїчну систему з чотирьох рівнянь:

$$Z^{12}_{\alpha_1,j1}(q_1,R_1)A_1 - V^{11}_{j2}(q_2R_1)A_2 - V^{12}_{j2}(q_2R_1)B_2 = \delta_{j2}G^*_{12}, j=1,2;$$

$$V^{21}_{j1}(q_2R_2)A_2 + V^{22}_{j1}(q_2R_2)B_2 - U^{22}_{q_3,\alpha_2;j2}(\lambda R_2)B_3 = \delta_{j2}G_{23}. \qquad (31)$$

У системі (31) беруть участь функції

$$G^*_{12} = \frac{c^*_{11}(p)}{R_1^{2\alpha_1+1}}\int\limits_{R_0}^{R_1}\frac{\rho^{-\alpha+q_1}}{Z^{12}_{\alpha_1,11}(q_1,R_1)}g_1(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho + c^*_{21}(p)\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{\Phi^2_{11}(q_2R_2,q_2\rho)}{\Delta_{11}(q_2R_1,q_2R_2)}g_2(\rho)d\rho,$$

$$G^*_{23} = -c^*_{12}\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{\Phi^1_{12}(q_2R_1,q_2\rho)}{\Delta_{11}(q_2R_1,q_2R_2)}\bar g_2(\rho)d\rho + \frac{c^*_{22}(p)}{R_2^{2\alpha_2+1}}\int\limits_{R_2}^{\infty}\frac{K_{q_3,\alpha_2}(q_3\rho)}{U^{22}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2)}g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho$$

та символ Кронекера $\delta_{j2}(\delta_{12}=0,\delta_{22}=1)$[4].

Введемо до розгляду функції:

$$A_{\alpha_1;j}(p) = Z^{12}_{\alpha_1,11}(q_1,R_1)\Delta_{2j}(q_2R_1,q_2R_2) - Z^{12}_{\alpha_1,21}(q_1,R_1)\Delta_{1j}(q_2R_1,q_2R_2),$$

$$B_{q_3,\alpha_2;j}(p) = U^{22}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2)\Delta_{j1}(q_2R_1,q_2R_2) - U^{22}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2)\Delta_{j2}(q_2R_1,q_2R_2)$$

$$\theta^*_{\alpha_1,1}(r,p) = Z^{12}_{\alpha_1,11}(q_1,R_1)\Phi^1_{22}(q_2R_2,q_2r) - Z^{12}_{\alpha_1,21}(q_1,R_1)\Phi^1_{12}(q_2R_2,q_2r),$$

$$\theta^*_{q_3,\alpha_2,2}(r,p) = U^{22}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2)\Phi^2_{21}(q_2R_2,q_2r) - U^{22}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2)\Phi^2_{11}(q_2R_2,q_2r).$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі (25),(26): для $p \doteq \sigma + is$ із $Rep = \sigma \geq \sigma_0$, де σ_0– абциса збіжності інтеграла Лапласа та $Imp = s \in (-\infty,+\infty)$ визначник алгебраїчної системи (31)

$$\Delta^*_{(\alpha)}(p) \equiv Z^{12}_{\alpha_1,11}(q_1,R_1)B_{q_3,\alpha_2,;2}(p) - Z^{12}_{\alpha_1,21}(q_1,R_1)B_{q_3,\alpha_2,;1}(p) =$$

$$= U^{22}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2)A_{\alpha_1,1}(p) - U^{22}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2)A_{\alpha_1,2}(p) \neq 0 \qquad (32)$$

Визначимо породжені неоднорідністю системи (25) функції впливу:

$$\mathcal{H}^*_{(\alpha);11}(p,r,\rho) = \frac{1}{2q_1\Delta^*_{(\alpha)}(p)}\begin{cases} r^{-\alpha_1+q_1}[B_{q_3,\alpha_2,;2}(p)\psi^{1*}_{\alpha_1;11}(q_1,\rho) - B_{q_3,\alpha_2;1}\psi^{1*}_{\alpha_1;21}(q_1,\rho)], \\ 0<r<\rho<R_1 \\ \rho^{-\alpha_1+q_1}[B_{q_3,\alpha_2,;2}(p)\psi^{1*}_{\alpha_1;11}(q_1,r) - B_{q_3,\alpha_2;1}\psi^{1*}_{\alpha_1;21}(q_1,r)], \\ 0<\rho<r<R_1 \end{cases}$$

$$\mathcal{H}^*_{(\alpha);12}(p,r,\rho) = \frac{c^*_{21}}{\Delta^*_{(\alpha)}(p)}r^{-\alpha_1+q_1}\theta^*_{q_3,\alpha_2;2}(\rho,p), \mathcal{H}^*_{(\alpha);13}(p,r,\rho) = \frac{c^*_{21}c^*_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}}q_2r^{-\alpha_1+q_1}K_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho),$$

$$\mathcal{H}^*_{(\alpha);21}(p,r,\rho) = \frac{c^*_{11}(p)}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{\Delta^*_{(\alpha)}(p)}\rho^{-\alpha_1+q_1}\theta_{q_3,\alpha_2;2}(r,p).$$

$$H^*_{(\alpha);22}(p,r,\rho)=\frac{1}{q_2\Delta^*_{(\alpha)}(p)}\begin{cases}\theta^*_{\alpha_1;1}(r,p)\theta_{q_3,\alpha_2;2}(\rho,p),\ R_1<r<\rho<R_2\\ \theta^*_{\alpha_1;1}(\rho,p)\theta_{q_3,\alpha_2;2}(r,p),\ R_1<\rho<r<R_2,\end{cases}$$

$$\mathcal{H}^*_{(\alpha);23}(p,r,\rho)=\frac{c^*_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta^*_{(\alpha)}(p)}\theta^*_{\alpha_1;1}(r,p)K_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho),\ \mathcal{H}^*_{(\alpha);31}(p,r,\rho)=\frac{c^*_{11}c^*_{12}q_2}{R_1^{2\alpha_1+1}\Delta^*_{(\alpha)}(p)}\times$$

$$\times\rho^{-\alpha_1+q_1}K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r);\ \mathcal{H}^*_{(\alpha);32}(p,r,\rho)=\frac{c^*_{12}}{\Delta^*_{(\alpha)}(p)}\theta^*_{\alpha_1;1}(\rho,p)K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r),\qquad(33)$$

$$\mathcal{H}^*_{q_3,\alpha_2;33}(p,r,\rho)=\frac{\lambda^{2\alpha_2}}{\Delta^*_{(\alpha)}(p)}\begin{cases}K_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho)[A_{\alpha_1;2}(p)\psi^{2*}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda r)-\\ K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r)[A_{\alpha_1;2}(p)\psi^{2*}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda\rho)-\end{cases}$$

$$-A_{\alpha_1;1}(p)\psi^{2*}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2,\lambda r)],\ R_2<r<\rho<\infty$$

$$-A_{\alpha_1;1}(p)\psi^{2*}_{q_3,\alpha_3;22}(\lambda R_2,\lambda\rho)],\ R_2<\rho<r<\infty.$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (31), підстановки отриманих значень A_j та B_k у формули (27) й низки елементарних перетворень маємо єдиний розв'язок крайової задачі (25),(26):

$$u^*_j(p,r)=\int\limits_0^{R_1}\mathcal{H}^*_{(\alpha);j1}(p,r,\rho)g_1(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho+\int\limits_{R_1}^{R_2}\mathcal{H}^*_{(\alpha);j2}(p,r,\rho)g_2(\rho)d\rho+$$

$$+\int\limits_{R_2}^{\infty}\mathcal{H}^*_{(\alpha);j3}(p,r,\rho)g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho,\ j=\overline{1,3}\qquad(34)$$

Повертаючись в (34) до оригіналу, отримуємо єдиний розв'язок параболічної задачі (22)-(24):

$$u_j(t,r)=\int\limits_0^{R_1}\mathcal{H}_{(\alpha);j1}(t,r,\rho)g_1(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho+\int\limits_{R_1}^{R_2}\mathcal{H}_{(\alpha);j2}(t,r,\rho)g_2(\rho)d\rho+$$

$$+\int\limits_{R_2}^{\infty}\mathcal{H}_{(\alpha);j3}(t,r,\rho)g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho,\ j=\overline{1,3}\qquad(35)$$

У рівностях (35) за означенням [7]

$$\mathcal{H}_{(\alpha);jk}(t,r,\rho)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}\mathcal{H}^*_{(\alpha);jk}(p,r,\rho)e^{pt}dp,\ j,k=\overline{1,3}\qquad(36)$$

Особливими точками функцій $\mathcal{H}^*_{(\alpha);jk}(p,r,\rho)$ є точки галуження $p=-\gamma_j^2$ та $p=$

$=\infty$. Нехай $\gamma^2=max\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\}$. Покладемо $\gamma^2-\gamma_j^2=k_j^2\geq 0$. Тоді при $\sqrt{p+\gamma_j^2}=i\sqrt{\beta^2+k_j^2}$ маємо, що $p+\gamma_j^2=-(\beta^2+k_j^2)$. Звідси випливає, що $p=-(\beta^2+k_j^2+\gamma_j^2)=-(\beta^2+\gamma^2)\equiv(\beta^2+\gamma^2)\exp(\pi i);dp=-2\beta d\beta$.

Якщо скористатися методом контурного інтегралу, лемою Жордана й теоремою Коші [7], то формули (36) можна перетворити майже до розрахункових:

$$\mathcal{H}_{(\alpha);jk}(t,r,\rho)=-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}Jm\Big\{\mathcal{H}^*_{(\alpha);jk}(e^{\pi i}(\beta^2+\gamma^2),r,\rho)\Big\}e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}\beta d\beta;\ j,k=\overline{1,3}\quad(37)$$

Тут $Jm(...)$ означає уявну частину виразу (...).

Виконавши зазначені у формулі (37) операції, знаходимо, що

$$\mathcal{H}_{(\alpha);jk}(t,r,\rho)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}V_{(\alpha);j}(r,\beta)V_{(\alpha);k}(\rho,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta.\sigma_k;\ j,k=\overline{1,3}\qquad(38)$$

Розв'язок (35) параболічної задачі (22)-(24) набуває вигляду:

$$u_j(t,r)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}V_{(\alpha);j}(r,\beta)\Big(\int\limits_0^{R_1}g_1(\rho)V_{(\alpha);1}(\rho,\beta)\sigma_1\rho^{2\alpha_1-1}d\rho\Big)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}e^{-(\gamma^2+\beta^2)t}V_{(\alpha);j}(r,\beta)\Big(\int\limits_{R_1}^{R_2}g_2(\rho)V_{(\alpha);2}(\rho,\beta)\sigma_2d\rho\Big)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta+\qquad(39)$$

$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}V_{(\alpha);j}(r,\beta)\Big(\int\limits_{R_2}^{\infty}g_3(\rho)V_{(\alpha);3}(\rho,\beta)\sigma_3\rho^{2\alpha_2-1}d\rho\Big)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta;\ j=\overline{1,3}$$

Внаслідок властивостей ядра Коші як дельта-подібної послідовності та початкових умов (23) одержуємо інтегральні зображення:

$$g_1(r)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}V_{(\alpha);1}(r,\beta)\Big(\int\limits_0^{R_1}g_1(\rho)V_{(\alpha);1}(\rho,\beta)\sigma_1\rho^{2\alpha_1-1}d\rho\Big)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta\qquad(39)$$

$$g_2(r)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}V_{(\alpha);2}(r,\beta)\Big(\int\limits_{R_1}^{R_2}g_2(\rho)V_{(\alpha);2}(\rho,\beta)\sigma_2d\rho\Big)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta\qquad(40)$$

$$g_3(r)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}V_{(\alpha);3}(r,\beta)\Big(\int\limits_{R_2}^{\infty}g_3(\rho)V_{(\alpha);3}(\rho,\beta)\sigma_3\rho^{2\alpha_2-1}d\rho\Big)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta\qquad(41)$$

Помножимо рівність (39) на $\theta(r)\theta(R_1 - r)$, рівність (40)- на $\theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)$, а рівність (41) помножимо на $\theta(r - R_2)$ і додамо. У результаті приходимо до інтегрального зображення (21). На цьому доведення теореми завершено.

Застосування запровадженого формулами (19),(20) гібридного інтегрального перетворення (ГІП) базується на основній тотожності інтегрального перетворення ГДО $M_{(\alpha)}$.

<u>**Теорема 2**</u>(про основну тотожність). Якщо вектор-функція

$$f(r) = \{B^*_{\alpha_1}[g_1(r)]; g_2''(r); B_{\alpha_1}[g_3(r)]\}$$

неперевна на множині I_2^+, а функції $g_j(r)$ задовільняють умови спряження

$$[(\tilde{\alpha}^k_{j1} d/dr + \tilde{\beta}^k_{j1})g_k(r) - (\tilde{\alpha}^k_{j2} d/dr + \tilde{\beta}^k_{j2})g_{k+1}(r)]|_{r=R_k} = \omega_{jk}; j, k = 1, 2 \quad (42)$$

та умови обмеження (3), то справджується основна тотожність ГІП ГДО $M_{(\alpha)}$:

$$H_\alpha\left[M(\alpha)[g(r)]\right] = -\beta^2\tilde{g}(\beta) - \sum_{j=1}^{3} k_j^2\tilde{g}_j(\beta) +$$

$$+\sum_{k=1}^{2} d_k\left[Z^k_{(\alpha);12}(\beta)\omega_{2k} - Z^k_{(\alpha);22}(\beta)\omega_{1k}\right] \quad (43)$$

Доведення тотожності (43) здійснюється за відомою логічною схемою [5].

Логічну схему застосуваня запровадженою формулами (19);(20) ГІП до розв'язання відповідних задач математичної фізики подамо в іншій роботі.

Література:

1. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. - М.: Физматгиз, 1969. - 428 с.

2. Ленюк М.П., Міхалевська Г.І. Інтегральні перетворення типу Конторовича-Лебєдєва. - Чернівці: Прут, 2002. - 280 с.

3. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс.- М.: Наука, 1965.-328с.

4. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.- М.: Наука, 1971.-432с.

5. Ленюк М.П. Гібридні інтегральні перетворення типу Ейлера - (Фур'є, Бесселя). - Чернівці: Прут, 2009. - 76 с. - (Препринт/НАН України. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача; 02.09).

6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1977. - 735 с.

7. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. - М.: Наука, 1987.-688с.

УДК 517.91: 532.2

О.М. Нікітіна

Скінченні гібридні інтегральні перетворення типу Бесселя - Ейлера - Фур'є на сегменті $[R_0, R_3]$ полярної осі.

(м. Чернівці)

Запроваджено скінченне гібридне інтегральне перетворення, породжене на трискладовому сегменті $[R_0, R_3]$, де $R_0 > 0$, полярної осі гібридним диференціальним оператором Бесселя - Ейлера - Фур'є.

Введено конечное гибридное интегральное преобразование, порожденное на трёхсоставном сегменте $[R_0, R_3]$, где $R_0 \cancel{> 0,}$ полярной оси гибридным дифференциальным оператором Бесселя - Эйлера - Фурье.

Бібліогр.: 6 назв.

Візьмемо диференціальний оператор Бесселя [1]

$$B_{\nu,\alpha_1} = d^2/dr^2 + \frac{2\alpha_1 + 1}{r} d/dr - \frac{\nu_2 - \alpha_1^2}{r^2}, \nu \geq \alpha_1 \geq -1/2, 2\alpha_1 + 1 > 0,$$

диференціальний оператор Ейлера [2]

$$B^*_{\alpha_2} = r^2 d^2/dr^2 + (2\alpha_2 + 1) r d/dr + \alpha_2^2, 2\alpha_2 + 1 \geq 0,$$

та диференціальний оператор Фур'є d^2/dr^2 [2].

З допомогою одиничної функції Гевісайда $\theta(x)$ [3] утворимо гібридний диференціальний оператор (ГДО)

$$M_{\nu,(\alpha)} = \theta(r - R_0)\theta(R_1 - r)B_{\nu,\alpha_1} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)B^*_{\alpha_2} + \theta(r - R_2)\theta(R_3 - r)d^2/dr^2, \quad (1)$$

Тут $(\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2), 2\alpha_j + 1 > 0$.

<u>**Означення**</u>. За область визначення ГДО $M_{\nu,(\alpha)}$ візьмемо множину G вектор-функцій $g(r) = \{g_1(r); g_2(r); g_3(r)\}$ з такими властивостями:

1) вектор-функція $f(r) = \{B_{\nu,\alpha_1}[g_1(r)]; B^*_{\alpha_2}[g_2(r)]; g_3''\}$ неперервна на множині $I_2 = \{r : r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3); R_0 > 0, R_3 < \infty\}$;

2) функції $g_j(r)$ задовільняють крайові умови

$$(\alpha^0_{11} d/dr + \beta^0_{11})g_1(r)|_{r=R_0} = 0, (\alpha^3_{22} d/dr + \beta^3_{22})g_3(r)|_{r=R_3} = 0, , \quad (2)$$

3) функції $g_j(r)$ задовільняють умови спряження

$$\left[(\alpha^k_{j1} d/dr + \beta^k_{j1})g_k(r) - (\alpha^k_{j2} d/dr + \beta^k_{j2})g_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k} = 0; j, k = 1, 2 \quad (3)$$

Припускаємо, що виконані умови на коефіцієнти: $\alpha^0_{11} \leq 0, \beta^0_{11} \geq 0, |\alpha^0_{11}| + \beta^0_{11} \neq 0, \alpha^3_{22} \geq 0, \beta^3_{22} \geq 0, \alpha^3_{22} + \beta^3_{22} \neq 0; \alpha^k_{jm} \geq 0; \beta^k_{jm} \geq 0, \alpha^k_{2j}\beta^k_{1j} - \alpha^k_{1j}\beta^k_{2j} \equiv c_{jk}, c_{1k}c_{2k} > 0$.

Визначимо вагову функцію

$$\sigma(r) = \theta(r - R_0)\theta(R_1 - r)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1} + \theta(r - R_2)\theta(R_3 - r)\sigma_3 \quad (4)$$