Романюк В.В.
Хмельницький національний університет,
м. Хмельницький, Україна

ДОВЕДЕННЯ ТВЕРДЖЕНЬ ДЛЯ МОДЕЛІ ДІЇ НОРМОВАНОГО ОДИНИЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА ТРИ КОЛОНИ ОДНАКОВОЇ ВИСОТИ У БУДІВЕЛЬНІЙ КОНСТРУКЦІЇ

Постановка проблеми дослідження

Задача оптимального використання будівельних ресурсів у конструкції, що складається з декількох елементів однакової геометричної форми, на які діє відоме навантаження, є відомою і практично значущою. У роботі [1] у формі антагоністичної гри на підмножині одиничного гіперкуба в $\mathbb{R}^4$ представлено модель визначення оптимальних витрат будівельних ресурсів при проектуванні опорної конструкції з трьома колонами. Там же обґрунтовано строгу опуклість представленої гри і визначено оптимальну стратегію проектувальника за усіх можливих варіантів співвідношень із мінімальним та максимальним навантаженням на кожну з двох колон. Проте твердження про ситуації рівноваги у чистих стратегіях та деякі особливі випадки ще не були розглянуті.

Аналіз останніх досліджень та вихідних положень

Те, що ефект стискаючого зусилля або навантаження, що діє на опори, можна моделювати за допомогою антагоністичної гри, є відомим хоча б за [2, с. 144; 3, 4]. Частка від граничного навантаження на i-й елемент будівельної конструкції з площею поперечного перерізу y_i, на який діє стискаюче зусилля x_i, знаходиться як

$$T_i\left(x_i,\, y_i\right) = \beta\, \frac{x_i}{y_i^2}\,, \tag{1}$$

де β є коефіцієнтом, куди включено механічні властивості матеріалу колони. Якщо $\left[a_i;\, b_i\right] \subset \left[0;\, 1\right]$ є сегментом усіх можливих нормованих навантажень, які можуть стискувати i-ту колону, то $x_1 \in \left[a_1;\, b_1\right]$ та $x_2 \in \left[a_2;\, b_2\right]$, а $x_3 = 1 - \left(x_1 + x_2\right)$. Сумарна площа поперечних перерізів трьох колон теж нормована й $y_1 \in \left[a_1;\, b_1\right]$, $y_2 \in \left[a_2;\, b_2\right]$, $y_3 = 1 - \left(y_1 + y_2\right)$. Мають місце умови

$$0 < a_1 < b_1 < 1\,,\ 0 < a_2 < b_2 < 1\,,\ b_1 + b_2 < 1 \tag{2}$$

як наслідок зазначених строгих включень в одиничний сегмент, а також того, що навантаження на третю колону не може бути недодатним. Ядром побудованої в [1] антагоністичної гри є гіперповерхня

$$T\left(\mathbf{X},\, \mathbf{Y}\right) = T\left(x_1,\, x_2;\, y_1,\, y_2\right) = \max\left\{\beta\,\frac{x_1}{y_1^2},\, \beta\,\frac{x_2}{y_2^2},\, \beta\,\frac{1 - x_1 - x_2}{\left(1 - y_1 - y_2\right)^2}\right\} =$$

$$= \beta\,\max\left\{\frac{x_1}{y_1^2},\, \frac{x_2}{y_2^2},\, \frac{1 - x_1 - x_2}{\left(1 - y_1 - y_2\right)^2}\right\}, \tag{3}$$

котра задається на паралелепіпеді

$$\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} = \prod_{s=1}^{2}\left[a_1;\, b_1\right] \times \left[a_2;\, b_2\right] \subset \prod_{k=1}^{4}\left[0;\, 1\right] \tag{4}$$

з умовами (2). У цій грі першим гравцем виступатимуть випадкові явища, що зумовлюють не обов'язково рівномірний розподіл одиничного нормованого навантаження на три опори конструкції. Другим гравцем є проектувальник, перед яким стоїть задача вибрати площу поперечного перерізу кожної з трьох колон так, щоб мінімізувати максимально можливий дисбаланс у навантаженні на опори. І саме обмеження по верхньому значенню площі поперечного перерізу кожної колони або обмеження по сумарній кількості наявного матеріалу, з якого виготовляють опори, і породжує антагоністичну гру [1, 5].

Формулювання мети продовжуваного дослідження

Обґрунтування строгої опуклості гри з ядром (3) на паралелепіпеді (4) відбулось в [1]. Тому гра з ядром (3) на паралелепіпеді (4) з умовами (2) є строго опуклою, і у ній проектувальник має єдину чисту оптимальну стратегію $\mathbf{Y}_* = \begin{bmatrix} y_1^* & y_2^* \end{bmatrix}$, де $\mathbf{Y}_* \in [a_1; b_1] \times [a_2; b_2]$. Компонентами оптимальної стратегії проектувальника є [1, с. 20]

$$y_1^* = \frac{\sqrt{b_1}}{\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \sqrt{1 - a_1 - a_2}}, \tag{5}$$

$$y_2^* = \frac{\sqrt{b_2}}{\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \sqrt{1 - a_1 - a_2}}, \tag{6}$$

які, щоправда, мають місце тільки при:

$$\frac{\sqrt{b_1}}{\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \sqrt{1 - a_1 - a_2}} \in [a_1; b_1], \tag{7}$$

$$\frac{\sqrt{b_2}}{\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \sqrt{1 - a_1 - a_2}} \in [a_2; b_2]. \tag{8}$$

Завдяки опуклості гіперповерхні (3) по змінним y_1 та y_2 при

$$\frac{\sqrt{b_1}}{\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \sqrt{1 - a_1 - a_2}} < a_1 \tag{9}$$

буде $y_1^* = a_1$. Так само при

$$\frac{\sqrt{b_2}}{\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \sqrt{1 - a_1 - a_2}} < a_2 \tag{10}$$

буде $y_2^* = a_2$, при

$$\frac{\sqrt{b_1}}{\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \sqrt{1 - a_1 - a_2}} > b_1 \tag{11}$$

буде $y_1^* = b_1$, а при

$$\frac{\sqrt{b_2}}{\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \sqrt{1 - a_1 - a_2}} > b_2 \tag{12}$$

буде $y_2^* = b_2$. Отже, при (7) і (8) оптимальною стратегією проектувальника є

$$\mathbf{Y}_* = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{b_1}}{\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \sqrt{1 - a_1 - a_2}} & \dfrac{\sqrt{b_2}}{\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \sqrt{1 - a_1 - a_2}} \end{bmatrix}. \tag{13}$$

При невиконанні хоча б одного зі співвідношень (7) і (8) в [1] враховано наступні випадки. Для випадку $y_1^* = a_1$ при (8) та (9) за умови $y_2^{*\langle 1 \rangle} \in [a_2; b_2)$, де

$$y_2^{*\langle 1 \rangle} = \frac{(1 - a_1)\sqrt{b_2}}{\sqrt{b_2} + \sqrt{1 - a_1 - a_2}}, \tag{14}$$

буде

$$\mathbf{Y}_* = \begin{bmatrix} a_1 & \dfrac{(1 - a_1)\sqrt{b_2}}{\sqrt{b_2} + \sqrt{1 - a_1 - a_2}} \end{bmatrix}. \tag{15}$$

При $y_2^{*\langle 1 \rangle} < a_2$ оптимальною стратегією проектувальника буде

$$\mathbf{Y}_* = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

При одночасному виконанні (7) і (10) за умови $y_1^{*\langle 1\rangle} \in \left[a_1;\, b_1 \right)$, де

$$y_1^{*\langle 1\rangle} = \frac{\left(1 - a_2\right)\sqrt{b_1}}{\sqrt{b_1} + \sqrt{1 - a_1 - a_2}}, \tag{17}$$

буде

$$\mathbf{Y}_* = \begin{bmatrix} \dfrac{\left(1 - a_2\right)\sqrt{b_1}}{\sqrt{b_1} + \sqrt{1 - a_1 - a_2}} & a_2 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

А при $y_1^{*\langle 1\rangle} < a_1$ оптимальною стратегією проектувальника буде (16). При одночасному виконанні (9) і (10) стратегія (16) залишається оптимальною, а при одночасному виконанні (11) і (12)

$$\mathbf{Y}_* = \left[b_1 \quad b_2 \right]. \tag{19}$$

При одночасному виконанні (8) й (11)

$$\mathbf{Y}_* = \begin{bmatrix} b_1 & \dfrac{\sqrt{b_2}}{\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \sqrt{1 - a_1 - a_2}} \end{bmatrix}. \tag{20}$$

У симетричному випадку, коли одночасно виконані (7) і (12), оптимальна стратегія проектувальника

$$\mathbf{Y}_* = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{b_1}}{\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \sqrt{1 - a_1 - a_2}} & b_2 \end{bmatrix}. \tag{21}$$

При одночасному виконанні (9) і (12) за

$$\frac{1}{b_2} \geqslant \frac{1 - a_1 - a_2}{\left(1 - a_1 - b_2\right)^2} \tag{22}$$

оптимальною стратегією проектувальника є

$$\mathbf{Y}_* = \left[a_1 \quad b_2 \right]. \tag{23}$$

У випадку

$$\frac{1}{b_2} < \frac{1 - a_1 - a_2}{\left(1 - a_1 - b_2\right)^2} \tag{24}$$

при $y_2^{*\langle 1\rangle} \in \left[a_2;\, b_2 \right)$ оптимальною стратегією проектувальника буде (15), а при $y_2^{*\langle 1\rangle} < a_2$ вектор (16) є його оптимальною стратегією. При одночасному виконанні (10) й (11) міркування є симетричними. При

$$\frac{1}{b_1} \geqslant \frac{1 - a_1 - a_2}{\left(1 - b_1 - a_2\right)^2} \tag{25}$$

оптимальна стратегія проектувальника

$$\mathbf{Y}_* = \left[b_1 \quad a_2 \right]. \tag{26}$$

У випадку

$$\frac{1}{b_1} < \frac{1 - a_1 - a_2}{\left(1 - b_1 - a_2\right)^2} \tag{27}$$

при $y_1^{*\langle 1\rangle} \in \left[a_1;\, b_1 \right)$ буде (18), а при $y_1^{*\langle 1\rangle} < a_1$ оптимальною стратегією проектувальника буде (16).

Мета продовжуваного дослідження полягає у розгляді ситуацій рівноваги у чистих стратегіях та деяких особливих випадків.

Теорема про вісім ситуацій рівноваги у чистих стратегіях

Із останніх зауважень про вихід точки (5) або (6) за межі сегмента $\left[a_1;\, b_1 \right]$ або $\left[a_2;\, b_2 \right]$ відповідно слідує, що якщо хоча б одна з нерівностей (9) — (12) виконується, то точка (13) не може бути оптимальною стратегією проектувальника, одна з компонент якої потраплятиме в одну з вершин квадрата $[a_1; b_1] \times [a_2; b_2]$. Звідси доречним буде формулювання наступного твердження.

Теорема 1. В антагоністичній грі з ядром (3) на паралелепіпеді (4) з умовами (2) існують ситуації

$$\{\mathbf{X}_*, \mathbf{Y}_*\} = \left\{\begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1^* & y_2^* \end{bmatrix}\right\} \tag{28}$$

рівноваги у чистих стратегіях, де $\mathbf{X}_* = \begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* \end{bmatrix}$ є оптимальною стратегією першого гравця, причому можливі наступні випадки. При одночасному виконанні (8), (9) та $y_2^{*\langle 1 \rangle} < a_2$

$$\{\mathbf{X}_*, \mathbf{Y}_*\} = \left\{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}\right\}. \tag{29}$$

При одночасному виконанні (7), (10) та $y_1^{*\langle 1 \rangle} < a_1$ ситуація (29) залишається рівноважною. Те саме буде і при одночасному виконанні (9) і (10). Якщо одночасно виконуються (11) і (12), то

$$\{\mathbf{X}_*, \mathbf{Y}_*\} = \left\{\begin{bmatrix} b_1 & x_2^* \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix}\right\} \text{ при } b_1 < b_2,\ x_2^* \in [a_2; b_2], \tag{30}$$

$$\{\mathbf{X}_*, \mathbf{Y}_*\} = \left\{\begin{bmatrix} b_1 & x_2^* \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix}\right\} \text{ або } \{\mathbf{X}_*, \mathbf{Y}_*\} = \left\{\begin{bmatrix} x_1^* & b_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\text{при } b_1 = b_2,\ x_1^* \in [a_1; b_1],\ x_2^* \in [a_2; b_2], \tag{31}$$

$$\{\mathbf{X}_*, \mathbf{Y}_*\} = \left\{\begin{bmatrix} x_1^* & b_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix}\right\} \text{ при } b_1 > b_2,\ x_1^* \in [a_1; b_1]. \tag{32}$$

При одночасному виконанні (8) й (11)

$$\{\mathbf{X}_*, \mathbf{Y}_*\} = \left\{\begin{bmatrix} b_1 & x_2^* \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 & \dfrac{\sqrt{b_2}}{\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \sqrt{1 - a_1 - a_2}} \end{bmatrix}\right\},\ x_2^* \in [a_2; b_2]. \tag{33}$$

При одночасному виконанні (7) і (12)

$$\{\mathbf{X}_*, \mathbf{Y}_*\} = \left\{\begin{bmatrix} x_1^* & b_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{b_1}}{\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \sqrt{1 - a_1 - a_2}} & b_2 \end{bmatrix}\right\},\ x_1^* \in [a_1; b_1]. \tag{34}$$

При одночасному виконанні (9), (12) та (22)

$$\{\mathbf{X}_*, \mathbf{Y}_*\} = \left\{\begin{bmatrix} x_1^* & b_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_1 & b_2 \end{bmatrix}\right\},\ x_1^* \in [a_1; b_1]. \tag{35}$$

При одночасному виконанні (9), (12), (24) та $y_2^{*\langle 1 \rangle} < a_2$ буде (29). При одночасному виконанні (10), (11) та (25)

$$\{\mathbf{X}_*, \mathbf{Y}_*\} = \left\{\begin{bmatrix} b_1 & x_2^* \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 & a_2 \end{bmatrix}\right\},\ x_2^* \in [a_2; b_2]. \tag{36}$$

При одночасному виконанні (10), (11), (27) та $y_1^{*\langle 1 \rangle} < a_1$ буде (29).

Доведення. У даній грі активні стратегії першого гравця [1, 5] визначаються як корені рівняння

$$v_* \equiv \max\left\{\frac{b_1}{\left(y_1^*\right)^2}, \frac{b_2}{\left(y_2^*\right)^2}, \frac{1 - a_1 - a_2}{\left(1 - y_1^* - y_2^*\right)^2}\right\} =$$

$$= T\left(x_1, x_2; y_1^*, y_2^*\right) \equiv \max\left\{\frac{x_1}{\left(y_1^*\right)^2}, \frac{x_2}{\left(y_2^*\right)^2}, \frac{1 - x_1 - x_2}{\left(1 - y_1^* - y_2^*\right)^2}\right\}. \tag{37}$$

Якщо корінь $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* \end{bmatrix}$ рівняння (37) виявиться єдиним, то наслідком цього уже буде відповідна ситуація рівноваги у чистих стратегіях.

Про умови оптимальності стратегії проектувальника у ситуаціях (29) - (36) йшлося ще до цієї теореми. Залишається довести оптимальність відповідних чистих стратегій першого гравця. Почнемо з випадку (29). Тут маємо $\mathbf{Y}_* = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}$, тому рівняння (37) приймає вид:

$$v_* = \beta \max\left\{\frac{b_1}{a_1^2}, \frac{b_2}{a_2^2}, \frac{1-a_1-a_2}{\left(1-a_1-a_2\right)^2}\right\} = \beta \max\left\{\frac{b_1}{a_1^2}, \frac{b_2}{a_2^2}, \frac{1}{1-a_1-a_2}\right\} =$$

$$= T\left(x_1, x_2; a_1, a_2\right) = \beta \max\left\{\frac{x_1}{a_1^2}, \frac{x_2}{a_2^2}, \frac{1-x_1-x_2}{\left(1-a_1-a_2\right)^2}\right\}. \quad (38)$$

Нерівності [1, с. 21]

$$\frac{b_1}{a_1^2} < \frac{b_2}{\left(y_2^*\right)^2} < \frac{1-a_1-a_2}{\left(1-a_1-y_2^*\right)^2} \quad (39)$$

й [1, с. 23]

$$\frac{b_2}{a_2^2} < \frac{b_1}{\left(y_1^*\right)^2} < \frac{1-a_1-a_2}{\left(1-y_1^*-a_2\right)^2} \quad (40)$$

дають

$$\frac{b_1}{a_1^2} < \frac{1-a_1-a_2}{\left(1-a_1-a_2\right)^2}, \quad (41)$$

$$\frac{b_2}{a_2^2} < \frac{1-a_1-a_2}{\left(1-a_1-a_2\right)^2}, \quad (42)$$

тому рівняння (38) переписується як

$$v_* = \frac{\beta}{1-a_1-a_2} = T\left(x_1, x_2; a_1, a_2\right) = \beta \max\left\{\frac{x_1}{a_1^2}, \frac{x_2}{a_2^2}, \frac{1-x_1-x_2}{\left(1-a_1-a_2\right)^2}\right\}. \quad (43)$$

Звідси $\mathbf{X}_* = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}$ і ситуація (29) є рівноважною.

У випадку (30) — (32) маємо таке рівняння (37):

$$v_* = \beta \max\left\{\frac{b_1}{b_1^2}, \frac{b_2}{b_2^2}, \frac{1-a_1-a_2}{\left(1-b_1-b_2\right)^2}\right\} = \beta \max\left\{\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \frac{1-a_1-a_2}{\left(1-b_1-b_2\right)^2}\right\} =$$

$$= T\left(x_1, x_2; b_1, b_2\right) = \beta \max\left\{\frac{x_1}{b_1^2}, \frac{x_2}{b_2^2}, \frac{1-x_1-x_2}{\left(1-b_1-b_2\right)^2}\right\}. \quad (44)$$

Нерівності

$$\frac{1}{b_1} > \frac{b_2}{\left(y_2^*\right)^2} > \frac{1-a_1-a_2}{\left(1-b_1-y_2^*\right)^2} \quad (45)$$

й

$$\frac{1}{b_2} > \frac{b_1}{\left(y_1^*\right)^2} > \frac{1-a_1-a_2}{\left(1-y_1^*-b_2\right)^2} \quad (46)$$

тут дають

$$\frac{1}{b_1} > \frac{1-a_1-a_2}{\left(1-b_1-b_2\right)^2}, \quad (47)$$

$$\frac{1}{b_2} > \frac{1-a_1-a_2}{\left(1-b_1-b_2\right)^2}, \quad (48)$$

тому рівняння (44) переписується як

$$v_* = \beta \max\left\{\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}\right\} = T\left(x_1, x_2; b_1, b_2\right) = \beta \max\left\{\frac{x_1}{b_1^2}, \frac{x_2}{b_2^2}, \frac{1 - x_1 - x_2}{\left(1 - b_1 - b_2\right)^2}\right\}. \tag{49}$$

При $b_1 < b_2$ відповідне рівняння

$$v_* = \frac{\beta}{b_1} = T\left(x_1, x_2; b_1, b_2\right) = \beta \max\left\{\frac{x_1}{b_1^2}, \frac{x_2}{b_2^2}, \frac{1 - x_1 - x_2}{\left(1 - b_1 - b_2\right)^2}\right\} \tag{50}$$

має безліч коренів виду $\mathbf{X}_* = \left[b_1 \quad x_2^*\right]$ для $x_2^* \in \left[a_2; b_2\right]$. При $b_1 = b_2$ відповідне рівняння (49) має безліч коренів виду $\mathbf{X}_* = \left[x_1^* \quad b_2\right]$ або $\mathbf{X}_* = \left[b_1 \quad x_2^*\right]$ для $x_1^* \in \left[a_1; b_1\right]$ або $x_2^* \in \left[a_2; b_2\right]$ відповідно. Нарешті, при $b_1 > b_2$ рівняння

$$v_* = \frac{\beta}{b_2} = T\left(x_1, x_2; b_1, b_2\right) = \beta \max\left\{\frac{x_1}{b_1^2}, \frac{x_2}{b_2^2}, \frac{1 - x_1 - x_2}{\left(1 - b_1 - b_2\right)^2}\right\} \tag{51}$$

знову має безліч коренів виду $\mathbf{X}_* = \left[x_1^* \quad b_2\right]$ для $x_1^* \in \left[a_1; b_1\right]$.

У випадку (33) маємо $\mathbf{Y}_* = \left[b_1 \quad y_2^*\right]$ при (6), а рівнянням (37) є

$$v_* = \beta \max\left\{\frac{b_1}{b_1^2}, \frac{b_2}{\left(y_2^*\right)^2}, \frac{1 - a_1 - a_2}{\left(1 - b_1 - y_2^*\right)^2}\right\} = \beta \max\left\{\frac{1}{b_1}, \frac{b_2}{\left(y_2^*\right)^2}, \frac{1 - a_1 - a_2}{\left(1 - b_1 - y_2^*\right)^2}\right\} =$$

$$= T\left(x_1, x_2; b_1, y_2^*\right) = \beta \max\left\{\frac{x_1}{b_1^2}, \frac{x_2}{\left(y_2^*\right)^2}, \frac{1 - x_1 - x_2}{\left(1 - b_1 - y_2^*\right)^2}\right\}. \tag{52}$$

При (11) справедлива подвійна нерівність (45), тому

$$v_* = \frac{\beta}{b_1} = T\left(x_1, x_2; b_1, y_2^*\right) = \beta \max\left\{\frac{x_1}{b_1^2}, \frac{x_2}{\left(y_2^*\right)^2}, \frac{1 - x_1 - x_2}{\left(1 - b_1 - y_2^*\right)^2}\right\}, \tag{53}$$

звідки $\mathbf{X}_* = \left[b_1 \quad x_2^*\right]$ для $x_2^* \in \left[a_2; b_2\right]$.

У випадку (34) маємо $\mathbf{Y}_* = \left[y_1^* \quad b_2\right]$ при (5), а рівнянням (37), використовуючи симетричну до (45) подвійну нерівність (46), є

$$v_* = \frac{\beta}{b_2} = T\left(x_1, x_2; y_1^*, b_2\right) = \beta \max\left\{\frac{x_1}{\left(y_1^*\right)^2}, \frac{x_2}{b_2^2}, \frac{1 - x_1 - x_2}{\left(1 - y_1^* - b_2\right)^2}\right\}. \tag{54}$$

З рівняння (54) відразу отримуємо $\mathbf{X}_* = \left[x_1^* \quad b_2\right]$ для $x_1^* \in \left[a_1; b_1\right]$.

У випадку (35) маємо $\mathbf{Y}_* = \left[a_1 \quad b_2\right]$ і рівняння (37)

$$v_* = \beta \max\left\{\frac{b_1}{a_1^2}, \frac{b_2}{b_2^2}, \frac{1 - a_1 - a_2}{\left(1 - a_1 - b_2\right)^2}\right\} = \beta \max\left\{\frac{b_1}{a_1^2}, \frac{1}{b_2}, \frac{1 - a_1 - a_2}{\left(1 - a_1 - b_2\right)^2}\right\} =$$

$$= \frac{\beta}{b_2} = T\left(x_1, x_2; a_1, b_2\right) = \beta \max\left\{\frac{x_1}{a_1^2}, \frac{x_2}{b_2^2}, \frac{1 - x_1 - x_2}{\left(1 - a_1 - b_2\right)^2}\right\}, \tag{55}$$

де використано нерівність (46) та її наслідок $\frac{b_1}{a_1^2} < \frac{1}{b_2}$, а також (22). Рівняння (55) має безліч коренів виду $\mathbf{X}_* = \begin{bmatrix} x_1^* & b_2 \end{bmatrix}$ для $x_1^* \in [a_1;\, b_1]$.

У випадку (36) маємо $\mathbf{Y}_* = \begin{bmatrix} b_1 & a_2 \end{bmatrix}$ і рівняння (37)

$$v_* = \beta \max\left\{ \frac{b_1}{b_1^2},\, \frac{b_2}{a_2^2},\, \frac{1-a_1-a_2}{\left(1-b_1-a_2\right)^2} \right\} = \beta \max\left\{ \frac{1}{b_1},\, \frac{b_2}{a_2^2},\, \frac{1-a_1-a_2}{\left(1-b_1-a_2\right)^2} \right\} =$$

$$= \frac{\beta}{b_1} = T\left(x_1,\, x_2;\, b_1,\, a_2\right) = \beta \max\left\{ \frac{x_1}{b_1^2},\, \frac{x_2}{a_2^2},\, \frac{1-x_1-x_2}{\left(1-b_1-a_2\right)^2} \right\}, \tag{56}$$

де використано нерівність (45) та її наслідок $\dfrac{1}{b_1} > \dfrac{b_2}{a_2^2}$, а також (25). Рівняння (56) має безліч коренів виду $\mathbf{X}_* = \begin{bmatrix} b_1 & x_2^* \end{bmatrix}$ для $x_2^* \in [a_2;\, b_2]$.

Отже, досліджено усі вісім форм ситуацій рівноваги (29) — (36), серед яких лише ситуація (29) є єдиною, а кожна із ситуацій (30) — (36) є елементом континууму рівноважних ситуацій для відповідного випадку. Теорему доведено.

Звуження досліджуваної гри на випадок $a_1 = a_2 = a$ та $b_1 = b_2 = b$

У частинному випадку стискаюче зусилля на дві з трьох колон оцінюється однаково, тобто $a_1 = a_2 = a$ та $b_1 = b_2 = b$. Вочевидь, тоді легше перевірити умови, за яких значення (5) та (6) виходять за межі сегмента $[a;\, b]$, хоча тут, тим більше,

$$y_1^* = y_2^* = \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{b} + \sqrt{1-2a}}. \tag{57}$$

Теорема 2. В антагоністичній грі з ядром (3) на паралелепіпеді (4) з умовами (2), де $a_1 = a_2 = a$ та $b_1 = b_2 = b$, існує два види рівноважних ситуацій, причому при

$$b \leqslant \frac{5-\sqrt{17}}{4} \tag{58}$$

рівноважною ситуацією є

$$\left\{\mathbf{X}_*,\, \mathbf{Y}_*\right\} = \left\{\begin{bmatrix} x_1^* & b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b & b \end{bmatrix}\right\} \text{ або } \left\{\mathbf{X}_*,\, \mathbf{Y}_*\right\} = \left\{\begin{bmatrix} b & x_2^* \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b & b \end{bmatrix}\right\},\ x_1^* \in [a;\, b],\ x_2^* \in [a;\, b], \tag{59}$$

а при

$$a \geqslant \frac{3-\sqrt{5}}{2} \tag{60}$$

рівноважною ситуацією є

$$\left\{\mathbf{X}_*,\, \mathbf{Y}_*\right\} = \left\{\begin{bmatrix} a & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & a \end{bmatrix}\right\}. \tag{61}$$

Доведення. Якщо $y_1^* > b$ або, що те саме, $y_2^* > b$, то оптимальною стратегією проектувальника є

$$\mathbf{Y}_* = \begin{bmatrix} b & b \end{bmatrix}. \tag{62}$$

З відповідної нерівності

$$\frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{b} + \sqrt{1-2a}} > b \tag{63}$$

маємо:

$$\frac{1}{2\sqrt{b} + \sqrt{1-2a}} > \sqrt{b},$$

$$1 > 2b + \sqrt{b(1-2a)}\,,$$

$$(1-2b)^2 > b(1-2a)\,, \tag{64}$$

де використано те, що $2a < 1$. Позначивши $s = a + b$, нерівність (64) подамо у вигляді

$$1 - 4b + 4b^2 > b(1 - 2s + 2b)\,,$$

$$2bs > 5b - 2b^2 - 1\,,$$

$$s > \frac{5b - 2b^2 - 1}{2b}\,, \tag{65}$$

тобто при (65) буде (62). Ясно, що нерівність (65) виконується при $5b - 2b^2 - 1 \leqslant 0$, тобто при $2b^2 - 5b + 1 \geqslant 0$. Дискримінантом відповідного квадратного рівняння $2b^2 - 5b + 1 = 0$ є $D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 17$, звідки його корені $b_1 = \dfrac{5 - \sqrt{17}}{4}$ та $b_2 = \dfrac{5 + \sqrt{17}}{4}$. Оскільки гілки параболи $2b^2 - 5b + 1$ направлені уверх, то при (58) буде нерівність (65), тобто виконуватиметься і (63), причому при відповідній оптимальній стратегії проектувальника (62) рівняння (37) набуває вигляду:

$$v_* = \beta \max\left\{\frac{b}{b^2}, \frac{b}{b^2}, \frac{1-2a}{(1-2b)^2}\right\} = \beta \max\left\{\frac{1}{b}, \frac{1-2a}{(1-2b)^2}\right\} =$$

$$= \frac{\beta}{b} = T(x_1, x_2; b, b) = \beta \max\left\{\frac{x_1}{b^2}, \frac{x_2}{b^2}, \frac{1 - x_1 - x_2}{(1-2b)^2}\right\}. \tag{66}$$

Тут використано (45) — (48), з яких і виходить нерівність $\dfrac{1}{b} > \dfrac{1-2a}{(1-2b)^2}$. Рівняння (66) має безліч коренів виду $\mathbf{X}_* = \begin{bmatrix} x_1^* & b \end{bmatrix}$ або $\mathbf{X}_* = \begin{bmatrix} b & x_2^* \end{bmatrix}$ для $x_1^* \in [a; b]$, $x_2^* \in [a; b]$. А це означає справедливість (59) при (58).

Якщо $y_1^* < a$ або, що те саме, $y_2^* < a$, то оптимальною стратегією проектувальника є

$$\mathbf{Y}_* = \begin{bmatrix} a & a \end{bmatrix}. \tag{67}$$

З відповідної нерівності

$$\frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{b} + \sqrt{1-2a}} < a \tag{68}$$

маємо:

$$\sqrt{b} < 2a\sqrt{b} + a\sqrt{1-2a}\,,$$

$$\sqrt{b}(1-2a) < a\sqrt{1-2a}\,,$$

$$\sqrt{b(1-2a)} < a\,,$$

$$b(1-2a) < a^2. \tag{69}$$

Позначивши $s = a + b$, нерівність (69) подамо у вигляді

$$s - a - 2as + 2a^2 < a^2,$$

$$a^2 + s(1-2a) - a < 0\,,$$

$$s(1-2a) < a(1-a)\,,$$

$$s < a\frac{1-a}{1-2a}\,, \tag{70}$$

тобто при (70) буде (67). Ясно, що нерівність (70) виконується при $a\dfrac{1-a}{1-2a} \geqslant 1$, тобто при

$a^2 - 3a + 1 \leqslant 0$. Дискримінантом відповідного квадратного рівняння $a^2 - 3a + 1 = 0$ є $D = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 5$, звідки його корені $a_1 = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$ та $a_2 = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$. Оскільки гілки параболи $a^2 - 3a + 1$ направлені уверх, то при (60) буде нерівність (70), тобто виконуватиметься і (68), причому при відповідній оптимальній стратегії проектувальника (67) рівняння (37) набуває вигляду:

$$v_* = \beta \max\left\{ \frac{b}{a^2}, \frac{b}{a^2}, \frac{1-2a}{(1-2a)^2} \right\} = \beta \max\left\{ \frac{b}{a^2}, \frac{1}{1-2a} \right\} =$$

$$= \frac{\beta}{1-2a} = T(x_1, x_2; a, a) = \beta \max\left\{ \frac{x_1}{a^2}, \frac{x_2}{a^2}, \frac{1 - x_1 - x_2}{(1-2a)^2} \right\}. \qquad (71)$$

Тут використано (39) — (42), з яких і виходить нерівність $\dfrac{b}{a^2} < \dfrac{1}{1-2a}$. Рівняння (71) має єдиний корінь $\mathbf{X}_* = [a \quad a]$, тому рівноважна ситуація (61) наступає за умови (60). Теорему доведено.

Трактування отриманих результатів

На практиці, скоріш за все, сегменти $[a_1; b_1]$ та $[a_2; b_2]$ мають бути такими, щоб виконувались (7) і (8). Випадки (9) — (12) досліджені більше для узагальнення, ніж для їх практичного втілення у разі потреби. Тим не менше, при настанні такої потреби, коли один або два, що буває ще рідше, з цих випадків все ж трапляються, теорема 1 дає усі можливі ситуації рівноваги у чистих стратегіях, де найгірші обставини для проектувальника у дійсності можуть відбутися, адже перший гравець володітиме чистою оптимальною стратегією [6, 7]. При цьому мінімально можливі стискаючі зусилля на дві колони зумовлять те, що проектувальник виготовить ці колони з мінімальною затратою ресурсів, про що і говорить рівноважна ситуація (29). А ось тоді, коли на одну з колон діятиме максимально можливе значення стискаючого навантаження, проектувальнику доведеться витратити максимум наявних ресурсів для виготовлення цієї опори конструкції і не виключено, що на виготовлення іншої колони теж підуть усі виділені на неї ресурси. Щодо стратегій (15) і (18), то вони теж виявляються оптимальними у специфічних випадках, але тут легко переконатися у тому, що там перший гравець не має чистої оптимальної стратегії.

Результати теореми 2, вихідні умови $a_1 = a_2 = a$ та $b_1 = b_2 = b$ якої також дещо звужують межі застосування цієї теореми, напрочуд легко використовувати на практиці. Скажімо, якщо у нас $a = 0.39$ та $b \in (a; 0.5)$, то тут виконано (60) і ситуація $\{[0.39 \quad 0.39], [0.39 \quad 0.39]\}$ є рівноважною, хоча цей випадок відповідатиме доволі незначному стискаючому навантаженні на третю колону, що не перевищуватиме 0.22. Якщо ж навантаження на дві однакові колони з трьох опор конструкції є невеликим, коли, наприклад, $b = 0.21$, то ситуація $\left\{ \left[x_1^* \quad 0.21 \right], [0.21 \quad 0.21] \right\}$ або $\left\{ \left[0.21 \quad x_2^* \right], [0.21 \quad 0.21] \right\}$ є рівноважною при $x_1^* \in [a; 0.21]$, $x_2^* \in [a; 0.21]$.

Загальний підсумок та перспектива подальшого дослідження

Як і у праці [1], необхідно констатувати, що тільки тоді, коли сегмент усіх можливих нормованих навантажень, які можуть стискувати кожну з двох колон (з усіх трьох колон), підібрано (або спрогнозовано) коректно, то за умов (7) і (8) оптимальною стратегією проектувальника є (13). Оптимальне значення гри, котре є максимально можливою часткою від граничного навантаження, взагалі кажучи, не має особливого значення. В інших випадках справедливі наступні твердження.

1. При (8), (9) та $y_2^{*\langle 1 \rangle} \in [a_2; b_2)$, а також при (9), (12), (24) та $y_2^{*\langle 1 \rangle} \in [a_2; b_2)$ оптимальною стратегією проектувальника є (15) [1, с. 22, 24].

2. При (7), (10) та $y_1^{*\langle 1 \rangle} \in [a_1; b_1)$, а також при (10), (11), (27) та $y_1^{*\langle 1 \rangle} \in [a_1; b_1)$ буде (18) [1, с. 23, 24].

3. При (8), (9) та $y_2^{*\langle 1\rangle} < a_2$, а також при (7), (10) та $y_1^{*\langle 1\rangle} < a_1$ оптимальною стратегією проектувальника є (16); ця ж стратегія залишається оптимальною і при одночасному виконанні (9) і (10) [1, с. 22, 24].

4. При (9), (12), (24) та $y_2^{*\langle 1\rangle} < a_2$, а також при (10), (11), (27) та $y_1^{*\langle 1\rangle} < a_1$ знову буде (16) [1, с. 22, 24].

5. Оптимальна стратегія проектувальника (19) має місце тільки при одночасному виконанні (11) і (12) [1, с. 23, 24].

6. При (9), (12) та (22) оптимальною стратегією проектувальника є (23) [1, с. 24].

7. Оптимальна стратегія проектувальника (26) має місце при одночасному виконанні (10), (11) та (25) [1, с. 24].

8. При одночасному виконанні (8) й (11) оптимальною стратегією проектувальника є (20) [1, с. 23, 24].

9. При одночасному виконанні (7) і (12) оптимальною стратегією проектувальника є (21) [1, с. 23, 24].

Таким чином, проектувальник, отримуючи потенційні мінімальне та максимальне навантаження на кожну з двох колон, відразу визначає оптимальну площу поперечного перерізу кожної з них, а площа поперечного перерізу третьої колони знаходиться як $y_3^* = 1 - \left(y_1^* + y_2^* \right)$.

Перспектива подальшого дослідження вбачається у проблемі розрахунку повздовжньої стійкості конструкцій з більшою кількістю опор й обґрунтуванні відповідних положень. Там, хоча й, на перший погляд, знаходження оптимальної стратегії проектувальника не є вельми складним завданням, теж можуть не виконуватись умови належності попередньо визначених координат цієї стратегії відповідним сегментам усіх можливих нормованих навантажень на колони [1, с. 20, 21]. У зв'язку з цим визначення оптимальної площі поперечного перерізу кожної колони у конструкціях з багатьма опорами не є тривіальною задачею, результати якої за умови її всебічного дослідження і розв'язання доцільно використовувати при проектуванні (будівництві) опорних конструкцій з нерівномірним розподілом навантажень на них.

Література

1. Романюк В.В. Моделювання дії нормованого одиничного навантаження на три колони однакової висоти у будівельній конструкції і знаходження оптимальної площі кожної опори / В.В. Романюк // Проблеми трибології. − 2010. − № 3. − С. 18-25.

2. Воробьёв Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков / Воробьёв Н.Н. − М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. − 272 с.

3. Оуэн Г. Теория игр / Оуэн Г.; [пер. с англ.]. − 2-е изд. − М.: Едиториал УРСС, 2004. − 216 с.

4. Теория игр: [учеб. пособие для ун-тов] / Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. − М.: Высшая школа, Книжный дом "Университет", 1998. − 304 с. : ил.

5. Романюк В.В. Модель визначення оптимального рішення проектувальника у задачі про розрахунок повздовжньої стійкості двох елементів будівельної конструкції при дії на них нормованого стискаючого зусилля / В.В. Романюк // Проблеми трибології. − 2010. − № 1. − С. 42-56.

6. Романюк В.В. Моделювання реалізації оптимальних змішаних стратегій в антагоністичній грі з двома чистими стратегіями в кожного з гравців / В.В. Романюк // Наукові вісті НТУУ "КПІ". − 2007. − № 3. −С. 74-77.

7. Романюк В.В. Метод реалізації принципу оптимальності у матричних іграх без сідлової точки / В.В. Романюк // Вісник НТУ "ХПІ". Тематичний випуск: Інформатика та моделювання. − Харків : НТУ "ХПІ", 2008. − № 49. − С. 146-154.

Надійшла 14.09.2010